Aufgabe 6 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \bigotimes_{j=1}^{\infty} \big(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}), \mathbb{P}_j\big)$ mit $\mathbb{P}_j(\{0\}) = p$ und $\mathbb{P}_j(\{1\}) = 1-p$, $0 < p < 1$, $j \in \mathbb{N}$, das stochastische Modell einer unendlichen Folge von unabhängigen Würfen einer nicht notwendigerweise fairen Münze. Die Münze werde nun so oft geworfen, bis das erste Mal Kopf (Kopf $= 1$) erscheint. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

a) A: die Münze wird mindestens k mal geworfen ($k \in \mathbb{N}$);

b) B: die Münze wird eine gerade Anzahl oft geworfen.

Lösung: Sei $X : \Omega \to \mathbb{N}$ die Zufallsvariable, die die Anzahl der Würfe angibt, bis das erste Mal Kopf erscheint. Dann gilt wegen der Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}_1(\{1\}) = 1-p, \\
\mathbb{P}(X=2) &= \mathbb{P}_1(\{0\})\mathbb{P}_2(\{1\}) = p(1-p), \\
\mathbb{P}(X=3) &= \mathbb{P}_1(\{0\})\mathbb{P}_2(\{0\})\mathbb{P}_3(\{1\}) = p^2(1-p), \\
&\vdots \\
\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}_1(\{0\})\dots\mathbb{P}_{k-1}(\{0\})\mathbb{P}_k(\{1\}) = p^{k-1}(1-p), \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

a) Mit obiger Feststellung erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k-1) &= 1 - \sum_{j=1}^{k-1} p^{j-1}(1-p) \\
&= 1 - (1-p)\sum_{j=0}^{k-2} p^j = 1 - (1-p)\frac{1-p^{k-1}}{1-p} \\
&= p^{k-1}.
\end{aligned}$$

b) Ähnlich wie oben folgt hier

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2k) &= \sum_{k=1}^{\infty} p^{2k-1}(1-p) \\
&= p(1-p)\sum_{j=0}^{\infty} p^{2j} = p(1-p)\frac{1}{1-p^2} \\
&= \frac{p}{1+p}.
\end{aligned}$$

Für eine faire Münze ($p = \frac{1}{2}$) erhalten wir also $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$, d.h. die Wahrscheinlichkeit ungerade oft zu werfen ist hier doppelt so groß wie gerade oft zu werfen.