Ergänzung: messbare Prozesse
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und rechtsseitig stetigen Pfaden. Dann ist die Abbildung

$$X\colon [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad (t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$$

$\big(\mathcal{B}[0,\infty) \otimes \mathcal{A}\big)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-messbar. (Einen solchen Prozess X nennt man dann auch *messbar*.)

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$X^{(k)}(t,\omega) := \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{[\frac{\ell-1}{k}, \frac{\ell}{k})}(t) X_{\frac{\ell}{k}}(\omega), \quad t \geq 0, \omega \in \Omega.$$

Für $X^{(k)}$ gilt dann für beliebiges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$(X^{(k)})^{-1}(B) = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \underbrace{\big[\tfrac{\ell-1}{k}, \tfrac{\ell}{k}\big) \times X^{-1}_{\frac{\ell}{k}}(B)}_{\in \mathcal{B}[0,\infty) \otimes \mathcal{A}} \in \mathcal{B}[0,\infty) \otimes \mathcal{A}.$$

Also ist $X^{(k)}$ per Konstruktion messbar auf $[0,\infty) \times \Omega$ und für jedes $t \geq 0$ konvergiert $X_t^{(k)}$ wegen der rechtsseitigen Stetigkeit punktweise gegen X_t. Also ist auch X $\big(\mathcal{B}[0,\infty) \otimes \mathcal{A}\big)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-messbar.