KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

SS 2014
16. April 2014

Stochastische Differentialgleichungen
1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Approximationssatz von Weierstraß)

Für eine beliebige Funktion $f \in C[0,1]$ sei das Bernstein-Polynom $b_n(f)$ definiert durch

$$\big(b_n(f)\big)(x) := \sum_{k=0}^{n} f\big(\tfrac{k}{n}\big)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie mithilfe der Markov-Ungleichung

$$\lim_{n\to\infty} \|f - b_n(f)\|_\infty = 0.$$

Hinweis: Ist Z eine $\mathrm{Bin}(n,x)$-verteilte Zufallsvariable, so gilt $\mathbb{E}\big(f(\frac{Z}{n})\big) = \big(b_n(f)\big)(x)$.

Aufgabe 2 (Charakteristische Funktion)

Sei X eine n-dimensionale reelle Zufallsvariable. Dann heißt

$$\varphi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \varphi_X(t) := \mathbb{E}\big[\exp(i\,t^\top X)\big] = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\,t^\top x)\,\mathrm{d}\mathbb{P}^X,$$

die *charakteristische Funktion* von X (bzw. von $\mathbb{P}^X$). Zeigen Sie:

a) $|\varphi_X(t)| \le \varphi_X(0) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}^n$;

b) $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}^n$;

c) $\varphi_{a^\top X}(t) = \varphi_X(ta)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^n$;

d) $\varphi_{CX+b}(t) = \exp(i\,t^\top b)\varphi_X(C^\top t)$ für alle $t \in \mathbb{R}^n$;

e) φ_X ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 3 (n-dimensionale Normalverteilung)

Sei im Folgenden stets $m \in \mathbb{R}^n$ und $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix.

Ist X eine n-dimensionale reelle Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C)}} \exp\Big(-\frac{(x-m)^\top C^{-1}(x-m)}{2}\Big),$$

so heißt X *normalverteilt*, in Zeichen $X \sim N(m, C)$.

— bitte wenden —

Zeigen Sie:

a) Ist Y $N(0, I)$-verteilt, so existiert eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sodass

$$BY + m \sim N(m, C).$$

b) Ist umgekehrt X $N(m, C)$-verteilt, so existiert eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$B^{-1}(X - m) \sim N(0, I).$$

c) Berechnen Sie die charakteristische Funktion einer $N(m, C)$-verteilten Zufallsvariable X.

d) Ist $X = (X_1, \ldots, X_n)$ $N(m, C)$-verteilt, so gilt

$$X_k \sim N(m_k, c_{kk}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Cov}(X)_{jk} := \mathrm{Cov}(X_j, X_k) = c_{jk}$$

für $j, k = 1, \ldots, n$.

e) Ist X $N(m, C)$-verteilt, so gilt

$$X_1, \ldots, X_n \text{ sind stochastisch unabhängig} \iff c_{jk} = 0 \text{ für alle } j \neq k.$$

Hinweis: In d) und e) dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass Wahrscheinlichkeitsmaße eindeutig durch ihre charakteristische Funktion bestimmt sind.