KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

SS 2014
18. Juni 2014

Stochastische Differentialgleichungen
10. Übungsblatt

Aufgabe 28 (Itô-Prozesse)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass sich der Prozess $X_t := \frac{B_t}{1+t}$, $t \geq 0$, schreiben lässt als

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{1+t} X_t \,\mathrm{d}t + \frac{1}{1+t} \,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass der Prozess $X_t := \tan(t + B_t)$, $t < \tau := \inf\{s \geq 0 \colon s + B_s \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$, die folgende stochastische Differentialgleichung löst

$$\mathrm{d}X_t = (1 + X_t)(1 + X_t^2) \,\mathrm{d}t + (1 + X_t^2) \,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = 0.$$

c) Zeigen Sie, dass man den Prozess $X_t := \sin(B_t)$, $t < \tau := \inf\{s \geq 0 \colon B_s \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$, umformulieren kann zu

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{2} X_t \,\mathrm{d}t + \sqrt{1 - X_t^2} \,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = 0.$$

d) Zeigen Sie, dass der Prozess $X_t := \arctan(B_t)$, $t \geq 0$, der folgenden stochastischen Differentialgleichung genügt

$$\mathrm{d}X_t = -\sin(X_t)\cos^3(X_t) \,\mathrm{d}t + \cos^2(X_t) \,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = 0.$$

Aufgabe 29 (Homogene lineare stochastische Differentialgleichungen)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}$ mit vervollständigter Brown'scher Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, X_0 sei $\mathcal{F}_0$-messbar, $\mu, \sigma \colon [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ seien messbar und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptiert mit $\mu(\cdot, \omega) \in L^1[0,T]$ für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega$ und $\sigma \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}[0,T]$.

a) Zeigen Sie, dass der Prozess

$$X_t := X_0 \exp\Big(\int_0^t \big(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2\big) \,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s) \,\mathrm{d}B_s \Big), \quad t \in [0,T],$$

eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X_t = \mu(t) X_t \,\mathrm{d}t + \sigma(t) X_t \,\mathrm{d}B_t$$

mit Anfangswert X_0 ist.

b) Sei $\tilde{X}$ eine weitere Lösung von obiger Gleichung mit $\tilde{X}_0 = X_0$. Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{P}(\tilde{X}_t = X_t, \ \forall t) = 1$.

— bitte wenden —

Aufgabe 30 (Bessel-Prozess)

Sei $(B_t)_{t\geq 0} = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(n)})_{t\geq 0}$ eine n-dimensionale Brown'sche Bewegung, $n \geq 2$. Der Bessel-Prozess ist dann definiert durch

$$R_t := |B_t| = \Big(\sum_{j=1}^{n} |B_t^{(j)}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad t \geq 0.$$

a) Zeigen Sie, dass sich $V_t := R_t^2$ schreiben lässt als

$$\mathrm{d}V_t = n\,\mathrm{d}t + 2B_t \cdot \mathrm{d}B_t.$$

b) Zeigen Sie, dass $(R_t)_{t\geq 0}$ die stochastische Bessel-Gleichung löst, d.h.

$$\mathrm{d}R_t = \frac{n-1}{2R_t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{R_t} B_t \cdot \mathrm{d}B_t.$$