KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

SS 2014
24. Juni 2014

Stochastische Differentialgleichungen
11. Übungsblatt

Aufgabe 31 (Eindeutigkeit)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}$. Wir betrachten die stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = a \in \mathbb{R},$$

für $t \geq 0$, deren Koeffizienten zusätzlich folgende Bedingungen für jedes $t \geq 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllen:

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x-y| \quad \text{und} \quad |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq h(|x-y|),$$

wobei $K \geq 0$ und $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend mit $h(0) = 0$, sodass für jedes $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{h(s)^2}\,\mathrm{d}s = \infty.$$

Zeigen Sie, dass dann obige Gleichung höchstens eine Lösung besitzt.

Hinweis: Lemma von Gronwall.

Aufgabe 32 (Existenz und Eindeutigkeit)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass folgende stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X_t = \ln(1 + X_t^2)\,\mathrm{d}t + \mathbb{1}_{\{X_t > 0\}} X_t\,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = a \in \mathbb{R},$$

für $t \geq 0$ eine eindeutige Lösung besitzt.

b) Für $\alpha > 0$ und $t \geq 0$ betrachten wir die Differentialgleichungen

$$\mathrm{d}X_t = |X_t|^\alpha\,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = 0, \tag{1}$$

und

$$\mathrm{d}X_t = |X_t|^\alpha\,\mathrm{d}t, \quad X_0 = 0. \tag{2}$$

   i) Zeigen Sie, dass im Falle $\alpha \geq \frac{1}{2}$ genau eine Lösung von (1) existiert, und bestimmen Sie diese.

   ii) Zeigen Sie, dass im Falle $\alpha \in (0,1)$ mehr als eine Lösung von (2) existiert, und bestimmen Sie mindestens zwei verschiedene.

Aufgabe 33 (Lösen stochastischer Differentialgleichungen)

Wir betrachten die stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\,\mathrm{d}t + c(t)X_t\,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = x, \tag{1}$$

wobei $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen seien.

a) Wir definieren

$$F_t := \exp\Big(-\int_0^t c(s)\,\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t c(s)^2\,\mathrm{d}s\Big), \quad t \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass (1) geschrieben werden kann als

$$\mathrm{d}(F_t X_t) = F_t f(t, X_t)\,\mathrm{d}t, \quad X_0 = x.$$

b) Wir definieren weiter

$$Y_t := F_t X_t.$$

Zeigen Sie, dass dann $Y_t(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Y_t(\omega) = F_t(\omega) f\big(t, F_t^{-1}(\omega) Y_t(\omega)\big), \quad Y_0 = x.$$

erfüllt. Somit ist dann $X_t = F_t^{-1} Y_t$ die gesuchte Lösung von (1).

c) Lösen Sie die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$\mathrm{d}X_t = \frac{1}{X_t}\,\mathrm{d}t + X_t\,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = x > 0.$$

d) Seien $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$. Lösen Sie mit obiger Methode die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$\mathrm{d}X_t = X_t^\gamma\,\mathrm{d}t + \alpha X_t\,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = x > 0.$$

Für welche Werte von γ explodiert die Lösung?