KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2014
Institut für Analysis 2. Juli 2014
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Stochastische Differentialgleichungen
12. Übungsblatt

Aufgabe 34 (Populationsmodell)

Die nichtlineare stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X_t = rX_t(K - X_t)\,\mathrm{d}t + \beta X_t\,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = x > 0,$$

wird oft als Modell für das Wachstum einer Population der Größe X_t in einem „stochastischen“, dicht gefüllten Gebiet verwendet. Die Konstante $K > 0$ wird als Kapazität des Gebietes bezeichnet, die Konstante $r \in \mathbb{R}$ ist ein Maß für die Qualität des Gebietes und $\beta \in \mathbb{R}$ ist ein Maß für die Größe des Rauschens im System.

Zeigen Sie, dass

$$X_t = \frac{x\exp\big((rK - \frac{1}{2}\beta^2)t + \beta B_t\big)}{1 + rx\int_0^t \exp\big((rK - \frac{1}{2}\beta^2)s + \beta B_s\big)\,\mathrm{d}s}, \quad t \geq 0,$$

die eindeutige Lösung der obigen Gleichung ist.

Hinweis: Aufgabe 33, Bernoulli-Differentialgleichungen.

Aufgabe 35 (Frachtraten)

1995 hat Jostein Tvedt in seiner Dissertation „Market Structure, Freight Rates and Assets in Bulk Shipping“ die stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X_t = \kappa\big(\alpha - \log(X_t)\big)X_t\,\mathrm{d}t + \sigma X_t\,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = x > 0,$$

benutzt, um die Frachtraten im Versand zu modellieren. Hierbei seien $\kappa, \alpha, \sigma > 0$.

a) Zeigen Sie, dass die Lösung von obiger Gleichung gegeben ist durch

$$X_t = \exp\Big(e^{-\kappa t}\log(x) + (\alpha - \tfrac{\sigma^2}{2\kappa})(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma e^{-\kappa t}\int_0^t e^{\kappa s}\,\mathrm{d}B_s\Big), \quad t \geq 0.$$

Hinweis: die Substitution $Y_t := \log(X_t)$ könnte hilfreich sein.

b) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}X_t = \exp\Big(e^{-\kappa t}\log(x) + (\alpha - \tfrac{\sigma^2}{2\kappa})(1 - e^{-\kappa t}) + \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\kappa t})}{4\kappa}\Big), \quad t \geq 0.$$

Hinweis: Aufgabe 15.

Aufgabe 36 **(L^p-Abschätzungen)**

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine m-dimensionale Brown'sche Bewegung. Wir betrachten die stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X_t = \mu(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}B_t, \quad X_0 = \xi,$$

wobei $\mu\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\sigma\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes erfüllen und

$$\mathbb{E}|\xi|^{2k} < \infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $(X_t)_{t\geq 0}$ die zugehörige Lösung dieser Gleichung. Zeigen Sie, dass dann zu jedem $T > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass

$$\mathbb{E}|X_t|^{2k} \leq (1 + \mathbb{E}|\xi|^{2k})e^{Ct}, \quad t \in [0, T].$$

Hinweis: Lemma von Gronwall.