KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

SS 2014
23. April 2014

Stochastische Differentialgleichungen
2. Übungsblatt

Aufgabe 4 ($\sigma(X)$-messbare Zufallsvariablen)

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

a) Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $\Omega = \bigcup_{j=1}^n A_j$. Sei $X := \sum_{j=1}^n a_j \mathbb{1}_{A_j}$ und $\sigma(X)$ die von X erzeugte σ-Algebra.

   i) Bestimmen Sie $\sigma(X)$.

   ii) Sei Y eine $\sigma(X)$-messbare Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass Y auf jeder Menge A_j konstant ist, $j = 1, \dots, n$.

   iii) Zeigen Sie, dass Y als Funktion von X geschrieben werden kann.

b) Sei nun $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige Zufallsvariable und $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ $\sigma(X)$-messbar. Zeigen Sie, dass eine Funktion Φ existiert mit

$$Y = \Phi(X).$$

Hinweis: algebraische Induktion.

Aufgabe 5 (Produkt-Wahrscheinlichkeitsräume)

Seien $(\Omega_j, \mathcal{A}_j, \mathbb{P}_j)$, $j \in \mathbb{N}$, Wahrscheinlichkeitsräume,

$$\Omega := \bigtimes_{j=1}^{\infty} \Omega_j \quad \text{und} \quad \mathcal{A} := \bigotimes_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j := \sigma(\pi_j, j \in \mathbb{N})$$

die von den Projektionen $\pi_j\colon \Omega \to \Omega_j$ ($\pi_j(\omega) = \omega_j$, $j \in \mathbb{N}$) erzeugte Produkt-σ-Algebra. Zeigen Sie, dass genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{A}$ existiert mit

$$\mathbb{P}\big(A_1 \times \ldots \times A_n \times \bigtimes_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j\big) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}_j(A_j)$$

für beliebige Mengen $A_j \in \mathcal{A}_j$, $j = 1, \dots, n$.

Schreibweisen: $\mathbb{P} = \bigotimes_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}_j$ und $\bigotimes_{j=1}^{\infty}(\Omega_j, \mathcal{A}_j, \mathbb{P}_j) := (\bigtimes_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j, \bigotimes_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}_j)$.

Hinweise zum Beweis:

1) Man definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_n := \big\{B_n \times \bigtimes_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j \colon B_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n\big\}$$

und zeige, dass dadurch eine aufsteigende Folge von σ-Algebren gegeben ist.

— bitte wenden —

2) Für $\mathcal{F} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ zeige man, dass $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ und $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$.

3) Auf $\mathcal{F}_n$ definiere man nun das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_n\big(B_n \times \bigtimes_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j\big) := \mathbb{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n(B_n)$$

und auf $\mathcal{F}$ die Mengenfunktion $\mathbb{P}$ durch

$$\mathbb{P}(A) := \mu_n(A) \quad \text{falls } A \in \mathcal{F}_n.$$

4) Man zeige, dass $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ und $\mathbb{P}$ σ-additiv ist.

5) Mit dem Existenzsatz von Caratheodory und dem Eindeutigkeitssatz für Maße zeige man schließlich die Behauptung der Aufgabe.

Aufgabe 6 (unendlicher, unabhängiger Münzwurf)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \bigotimes_{j=1}^{\infty}\big(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}), \mathbb{P}_j\big)$ mit $\mathbb{P}_j(\{0\}) = p$ und $\mathbb{P}_j(\{1\}) = 1-p$, $0 < p < 1$, $j \in \mathbb{N}$, das stochastische Modell einer unendlichen Folge von unabhängigen Würfen einer nicht notwendigerweise fairen Münze. Die Münze werde nun so oft geworfen, bis das erste Mal Kopf (Kopf $= 1$) erscheint. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

a) A: die Münze wird mindestens k mal geworfen ($k \in \mathbb{N}$);

b) B: die Münze wird eine gerade Anzahl oft geworfen.