KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

SS 2014
30. April 2014

Stochastische Differentialgleichungen
3. Übungsblatt

Aufgabe 7 (Unabhängige Summen)

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen in $\mathbb{R}$ mit Dichten f_X bzw. f_Y.

a) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $Z := X + Y$ die Dichte

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x = (f_X * f_Y)(z), \quad z \in \mathbb{R},$$

besitzt.

b) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von Z (siehe Aufgabe 2).

Aufgabe 8 (Gauß'sche Summen)

Sei $1 \leq p < \infty$, $(\gamma_i)_{i=1}^n$ eine Folge unabhängiger $N(0,1)$-verteilter Zufallsvariablen und $(\alpha_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann eine Konstante $C_p > 0$ existiert mit

$$\left(\mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}} = C_p \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Verteilung der Zufallsvariable $\sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i$, z.B. mithilfe ihrer charakteristischen Funktion (siehe auch Aufgabe 2 und 3).

Aufgabe 9 (Brown'sche Bewegung)

Es sei $(B_t)_{t\geq 0} = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(n)})_{t\geq 0}$ eine n-dimensionale Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Eigenschaften gelten:

a) Für jedes $s \geq 0$ ist $(X_t)_{t\geq 0} := (B_{s+t} - B_s)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung;

b) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| = 1$ ist $(x^\top B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}$;

c) Für jede Wahl von $0 \leq t_1 < \ldots < t_m$, $m \in \mathbb{N}$, und beliebiges $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$(B_{t_1}^{(i)}, \dots, B_{t_m}^{(i)}) \sim N(0, (\min\{t_k, t_l\})_{k,l=1,\dots,m}).$$