KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

SS 2014
7. Mai 2014

Stochastische Differentialgleichungen
4. Übungsblatt

Aufgabe 10 (Eigenschaften der Brown'schen Bewegung)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{E}B_t^{2k} = \frac{(2k)!t^k}{2^k k!}$ für $t \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$;

b) $\lambda\big(\{t \geq 0 \colon B_t = u\}\big) = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher für jedes $u \in \mathbb{R}$;

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} B_n = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

Hinweis für c): Verwenden Sie das Lemma von Borel-Cantelli.

Aufgabe 11 (nochmal Brown'sche Bewegungen)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann

a) $(X_t)_{t\geq 0}$, definiert durch $X_t := \frac{1}{a} B_{a^2 t}$ für $a \neq 0$ (Zeitdilation), und

b) $(Y_t)_{t\geq 0}$, definiert durch $Y_t := tB_{\frac{1}{t}}$ für $t > 0$ und $Y_0 = 0$ (Zeitinversion),

wieder Brown'sche Bewegungen sind.

Aufgabe 12 (Integral der Brown'schen Bewegung)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}$ und der stochastische Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ definiert durch $X_t := \int_0^t B_s \, \mathrm{d}s$. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{E}X_t^2 = \frac{1}{3}t^3$ für $t \geq 0$;

b) $\mathbb{E}\exp(\lambda X_t) = \exp(\frac{\lambda^2 t^3}{6})$ für $t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$.