KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2014
Institut für Analysis 14. Mai 2014
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Stochastische Differentialgleichungen
5. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Beschränkte Variation)

Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt von beschränkter Variation (in Zeichen $f \in BV[a,b]$), falls

$$V_f[a,b] := \sup\Big\{\sum_{j=1}^{n} \big|f(t_j^{(n)}) - f(t_{j-1}^{(n)})\big| : a \le t_0^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \le b, n \in \mathbb{N}\Big\} < \infty.$$

Zeigen Sie:

a) Jede Funktion $f \in BV[a,b]$ ist beschränkt.

b) Ist f Lipschitzstetig oder stetig differenzierbar auf $[a,b]$, so ist f von beschränkter Variation.

c) Ist f monoton, so gilt $f \in BV[a,b]$ mit $V_f[a,b] = |f(b) - f(a)|$.

d) $f \in BV[a,b]$ genau dann, wenn monoton wachsende Funktionen $f_1, f_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ existieren mit $f = f_1 - f_2$.

Aufgabe 14 (Partielle Integration)

Sei $(B_t)_{t\ge0}$ eine Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}$ und $\phi \in C^1[0,T]$. Zeigen Sie:

$$\int_0^T \phi(t)\,\mathrm{d}B_t = \phi(T)B_T - \int_0^T \phi'(t)B_t\,\mathrm{d}t \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Aufgabe 15 (Eigenschaften des Wiener-Integral-Prozesses)

a) Sei $(B_t)_{t\ge0}$ eine Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}$ und $f \in L^2[0,T]$. Zeigen Sie, dass der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ definiert durch

$$X_t := \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0,T],$$

folgende Eigenschaften besitzt:

i) $X_t \sim N\big(0, \int_0^t f(s)^2\,\mathrm{d}s\big)$, $t \in [0,T]$;

ii) $(X_t)_{t\in[0,T]}$ hat unabhängige Zuwächse.

b) Sei nun $(B_t)_{t\ge0}$ eine n-dimensionale Brown'sche Bewegung und $F \in L^2([0,T], \mathbb{R}^{m\times n})$. Zeigen Sie, dass

$$Y_t := \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0,T],$$

m-dimensional normalverteilt ist, und bestimmen Sie die zugehörige Kovarianzmatrix.