KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2014
Institut für Analysis 21. Mai 2014
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Stochastische Differentialgleichungen
6. Übungsblatt

Aufgabe 16 (Itô-Integrale)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie für $t \geq 0$ die Varianzen der folgenden Integrale:

  i) $\int_0^t |B_s|^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}B_s$;

  ii) $\int_0^t (B_s + s)^2 \,\mathrm{d}B_s$.

b) Berechnen Sie für $t \geq 0$:

  i) $\int_0^t B_s^2 \,\mathrm{d}B_s$;

  ii) $\int_0^t B_s^n \,\mathrm{d}B_s, \quad n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 17 (Stochastische Version des Satzes von Fubini)

Sei $\phi\colon \Omega \times [0,T] \times [0,T]$ messbar, $(\phi(s,t))_{s\in[0,T]}$ adaptiert an die Brown'sche Filtration für alle $t \in [0,T]$ und

$$\int_0^T \Big(\int_0^T \mathbb{E}|\phi(s,t)|^2 \,\mathrm{d}s \Big)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}t < \infty.$$

Zeigen Sie:

a) $(\omega, s) \mapsto \phi(\omega,s,t) \in L^2(\Omega \times [0,T])$ für fast alle $t \in [0,T]$ und $t \mapsto \int_0^T \phi(s,t) \,\mathrm{d}B_s \in L^1([0,T], L^2(\Omega))$;

b) $t \mapsto \phi(\omega,s,t) \in L^1[0,T]$ für fast alle $(\omega,s) \in \Omega \times [0,T]$, $(\omega,s) \mapsto \int_0^T \phi(s,t)\,\mathrm{d}t \in L^2(\Omega \times [0,T])$ und $\big(\int_0^T \phi(s,t)\,\mathrm{d}t\big)_{s\in[0,T]}$ ist adaptiert an die Brown'sche Filtration;

c) Es gilt

$$\int_0^T \int_0^T \phi(s,t)\,\mathrm{d}B_s\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_0^T \phi(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}B_s \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

Aufgabe 18 (Hermite-Polynome)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Hermite-Polynome durch

$$h_n(t,x) := \frac{(-t)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2t}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad t,x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

$$\int_0^t h_n(s,B_s)\,\mathrm{d}B_s = h_{n+1}(t,B_t), \quad t \geq 0, n \in \mathbb{N}_0.$$