KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2014
Institut für Analysis 28. Mai 2014
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Stochastische Differentialgleichungen
7. Übungsblatt

Aufgabe 19 (Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ eine beliebige Sub-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ und $X \in L^1(\Omega)$. Zeigen Sie:

a) Ist $X \geq 0$, so ist auch $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$.

b) Ist $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion mit $\phi(X) \in L^1(\Omega)$, so gilt

$$\phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{G}] \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

c) Für $1 \leq p \leq \infty$ und $X \in L^p(\Omega)$ gilt:

$$\big\|E[X|\mathcal{G}]\big\|_{L^p(\Omega)} \leq \|X\|_{L^p(\Omega)}.$$

Aufgabe 20 (Zeitdiskrete Martingale)

a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, integrierbaren Zufallsvariablen und $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

  i) Ist $\mathbb{E}X_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, $n \in \mathbb{N}$, ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  ii) Ist $\mathbb{E}X_n = 0$ und $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $M_n := S_n^2 - n\sigma^2$, $n \in \mathbb{N}$, ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  iii) Ist $X_n \geq 0$ und $\mathbb{E}X_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $P_n := \prod_{k=1}^n X_k$, $n \in \mathbb{N}$, ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  iv) Sind alle X_n identisch verteilt mit $\phi(\lambda) := \mathbb{E}(\exp(\lambda X_1)) < \infty$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $L_n := \frac{1}{\phi(\lambda)^n} \exp(\lambda S_n)$, $n \in \mathbb{N}$, ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten Zufallsvariablen, sodass v_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ (eine solche Folge nennt man dann auch *vorhersehbar* bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Zeigen Sie, dass

$$(v * M)_n := \sum_{k=1}^n v_k(M_k - M_{k-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist (hierbei sei $M_0 := 0$ und $\mathcal{F}_0 := \{\varnothing, \Omega\}$).

Aufgabe 21 (Brown'sche Bewegung und Martingale)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}$ und $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s, s \leq t)$, $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass die folgenden Prozesse $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingale sind:

a) $\big(\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t)\big)_{t\geq 0}$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$;

b) $(B_t^3 - 3tB_t)_{t\geq 0}$;

c) $\big(\cos(\alpha B_t)\exp(\frac{\alpha^2}{2} t)\big)_{t\geq 0}$ und $\big(\sin(\alpha B_t)\exp(\frac{\alpha^2}{2} t)\big)_{t\geq 0}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.