

Stochastische Differentialgleichungen 8. Übungsblatt

Aufgabe 22 (Stoppzeiten)

- a) Seien τ_1, τ_2 zwei Stoppzeiten bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Zeigen Sie, dass $\min(\tau_1, \tau_2)$, $\max(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 + \tau_2$ und $\alpha\tau_1$ für $\alpha \geq 1$ ebenfalls Stoppzeiten bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sind.
- b) Geben Sie ein Beispiel an für Stoppzeiten τ_1, τ_2 , sodass $\tau_1 \leq \tau_2$ ist, aber $\tau_2 - \tau_1$ keine Stoppzeit ist.

Aufgabe 23 (Eintrittszeiten der Brown'schen Bewegung)

Sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung in \mathbb{R} und $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die vervollständigte Brown'sche Filtration, d.h. für jedes $t \geq 0$ ist \mathcal{F}_t die um die \mathbb{P} -Nullmengen vervollständigte σ -Algebra $\sigma(B_s, s \leq t)$. Dann definieren wir für $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\tau_B(\omega) := \inf\{t \geq 0: B_t(\omega) \in U\}, \quad \omega \in \Omega.$$

Zeigen Sie:

- a) Ist U offen, so gilt

$$\{\tau_B < t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{für jedes } t > 0.$$

- b) Ist U abgeschlossen, so gilt

$$\{\tau_B \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{für jedes } t > 0.$$

Aufgabe 24 (Progressive Messbarkeit)

Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess und $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine Filtration auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt $(X_t)_{t \geq 0}$ *progressiv messbar* bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, falls für jedes $t \geq 0$ die Abbildung

$$X : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X(s, \omega) := X_s(\omega),$$

$(\mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}_t)$ -messbar ist. Zeigen Sie:

- a) Ist $(X_t)_{t \geq 0}$ progressiv messbar bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, so ist $(X_t)_{t \geq 0}$ auch adaptiert bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.
- b) Ist $(X_t)_{t \geq 0}$ adaptiert bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ und besitzt $(X_t)_{t \geq 0}$ einseitig stetige Pfade, so ist $(X_t)_{t \geq 0}$ progressiv messbar bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.