KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

SS 2014
11. Juni 2014

Stochastische Differentialgleichungen
9. Übungsblatt

Aufgabe 25 (Ruinwahrscheinlichkeiten der Brown'schen Bewegung)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}$.

a) Seien $A, B > 0$ und $\tau := \min\{t \geq 0 \colon B_t = A \text{ oder } B_t = -B\}$. Zeigen Sie:

   i) $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$;
   ii) $\mathbb{P}(B_\tau = A) = \frac{B}{A+B}$;
   iii) $\mathbb{E}\tau = AB$.

b) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\tau_a := \min\{t \geq 0 \colon B_t = a\}$. Zeigen Sie:

   i) $\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = 1$;
   ii) $\mathbb{E}\exp(-\lambda\tau_a) = \exp\bigl(-|a|\sqrt{2\lambda}\bigr)$ für $\lambda \geq 0$;
   iii) $\mathbb{E}\tau_a = \infty$;
   iv) $\mathbb{E}\tau_a^{-1} = \frac{1}{a^2}$.

Aufgabe 26 (Bedingte Itô-Isometrie)

Sei $b \in \mathcal{H}^2[0,T]$ und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die Brown'sche Filtration.

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^t b(u)\,\mathrm{d}B_u\Big)^2 \,\Big|\, \mathcal{F}_s\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_s^t |b(u)|^2\,\mathrm{d}u \,\Big|\, \mathcal{F}_s\Big].$$

für $0 \leq s < t \leq T$.

b) Folgern Sie, dass

$$M_t := \Big(\int_0^t b(u)\,\mathrm{d}B_u\Big)^2 - \int_0^t |b(u)|^2\,\mathrm{d}u, \quad t \geq 0,$$

ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist.

Aufgabe 27 (ein lokales Martingal, das kein Martingal ist)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine 3-dimensionale Brown'sche Bewegung, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die zugehörige Brown'sche Filtration und $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{|x|}$.

a) Zeigen Sie, dass $M_t := f(B_t)$, $t \geq 1$, ein lokales $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 1}$-Martingal ist.

b) Berechnen Sie $\mathbb{E}M_t^2$ für $t \geq 1$.

c) Folgern Sie, dass $(M_t)_{t\geq 1}$ kein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 1}$-Martingal ist.