Vorkurs Mathematik

Vorbereitung auf das Studium der Mathematik

Übungsheft

Dr. Johanna Dettweiler
Institut für Analysis

20. Oktober 2009

Aufgaben zu Kapitel 1

Die Nummerierung der Aufgaben bezieht sich auf die entsprechenden Kapitel, zu denen die Aufgaben gestellt sind.

Aufgabe 1.1

Finden Sie Beispiele für die Verknüpfung von Aussagen ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$), indem Sie die Aussage $\mathcal{A}$:=„Heute ist Montag.“ mit Aussagen aus der folgenden Liste so verknüpfen, dass Sie mindestens vier weitere wahre Aussagen erhalten:

$\mathcal{B}$:=„Heute ist Dienstag.“

$\mathcal{C}$:=„Heute ist kein Montag.“

$\mathcal{D}$:=„Gestern war kein Montag.“

$\mathcal{E}$:=„Gestern war Sonntag.“

$\mathcal{F}$:=„Heute ist Werktag.“

$\mathcal{G}$:=„Gestern war Wochenende.

Beispiel: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{F}$.

Können Sie aus den Aussagen $\mathcal{B}$–$\mathcal{G}$ durch Verknüpfung weitere wahre Aussagen erzeugen?

Aufgabe 1.2

a) Schreiben Sie die folgende Mengen in der beschreibenden Darstellung:

$$A := \{ \text{ Nord, West, Süd, Ost } \} \qquad B := \{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$$

b) Schreiben Sie die folgenden Mengen in der aufzählenden Darstellung:

$$C := \{k^2 | k \in \mathbb{Z} \text{ und } -7 \leq k \leq 7\}$$

$$D := \{\tfrac{1}{3k} | k \in \mathbb{Z} \text{ und } \tfrac{2}{k} \in \mathbb{Z}\}$$

Aufgabe 1.3

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie die Lösungsmenge an

a) $4x + 3 \leq 2(x - 6)$

b) $\frac{x-1}{2} \geq \frac{1-x}{3}$

c) $4(1 - x) + 3(x + 2) < 8$

d) $3x - 1 \leq 2(x - 3) - (2 - x)$

e) $9x \geq \frac{3(6x-1)}{2}$

f) $-7x \geq \frac{3(x-1)}{2}$

Aufgabe 1.4

Welche Ungleichungen sind richtig, falsch bzw. für welche Werte a sind sie erfüllt?

a) $3^{-\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

b) $(1 + a)^2 \leq 1 + 2a, \quad a \in \mathbb{R}$

c) $a^2 > 2, \quad a \in \mathbb{N}$

d) $\left(\frac{1 + a}{a}\right) > \left(\frac{a}{a - 1}\right), \quad a \in \mathbb{R},\ a > 1$

Aufgabe 1.5

a) Faktorisieren Sie durch Ausklammern.

(i) $5b - 2ab - 20 + 8a$

(ii) $2p^3 - 3p^2q + 6pq - 9q^2$

b) Faktorisieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln.

(i) $b^2 - 9$

(ii) $x^2 - 8x + 16$

(iii) $25a^2 + 20ab^2 + 4b^4$

(iv) $a^8 - 2a^4b^2 + b^4$

c) Faktorisieren Sie.

(i) $x^2 - x - 2$

(ii) $x^2 - 5x + 6$

(iii) $2x^2 + 6x + 4$

(iv) $3u^2 - 12$

(v) $18a^3 + 84a^2b + 98ab^2$

(vi) $(a + b)^2 - a^2$

(vii) $r^2 - (r - s)^2$

(viii) $(a - b)^2 - (a + b)^2$

Aufgabe 1.6

Seien A, B, C Teilmengen von $\mathbb{R}$ und als reelle Intervalle folgendermaßen definiert:

$$A := (-\infty, 1]; \quad B := [-4, 3]; \quad C := (1, \infty)$$

Geben Sie bitte die Mengen

$$A \cap B, \quad A \cup B \cup C, \quad A \cup C, \quad (A \cup B) \cap C, \quad A \cup (B \cap C)$$

sowohl in der Intervallschreibweise, als auch in der beschreibenden Darstellung

$$\{x \in \mathbb{R} | ...\}$$

an.

Aufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 2.1

Seien X, Y Mengen und F eine Eigenschaft auf $X \times Y$, welche für $(x, y) \in X \times Y$ eine Aussage $F(x, y)$ definiert (vgl. den entsprechenden Abschnitt der Vorlesung).

a) Formulieren Sie die folgenden Aussagen in Worten:

$$\begin{aligned} &\exists x \in X : (\forall y \in Y : F(x, y)) \\ &\exists x \in X : (\exists y \in Y : F(x, y)) \\ &\forall x \in X : (\exists y \in Y : F(x, y)) \\ &\forall x \in X : (\forall y \in Y : F(x, y)) \end{aligned}$$

b) Sei nun X die Menge der Teilnehmer des Vorkurses und Y die Menge der Aufgaben und $F(x, y)$ die Aussage: „Der Teilnehmer x hat die Aufgabe y eigenständig gelöst.“

Formulieren Sie damit die Aussagen aus a).

Aufgabe 2.2

Betrachten Sie die Aussagen

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0 \\ &\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 0 \end{aligned}$$

Was bedeuten sie und welche dieser Aussagen ist wahr?

Aufgabe 2.3

Negieren Sie die vier Aussagen aus **Aufgabe 2.1.b)**.

Aufgaben zu Kapitel 3

Aufgabe 3.1

Berechnen Sie:

a) 2^{-4} b) $(3^2)^{\frac{1}{4}}$ c) $3^4 \cdot 3^{-2}$ d) $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^2$ e) $(-\frac{1}{3})^3$ f) $(-32)^{\frac{1}{5}}$

Aufgabe 3.2

Machen Sie die Nenner der folgenden Brüche rational. Geben Sie Bedingungen an die Parameter an, damit die Ausdrücke definiert sind.

a) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^7}}, \quad a \neq 0$ b) $\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$ c) $\frac{ab}{c\sqrt{b}}$

d) $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ e) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ f) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

g) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ h) $\frac{60}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ i) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

Aufgabe 3.3

Wenden Sie die Definition des Logarithmus an und ermitteln Sie x.

a) $2^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $3^x = 81$ d) $2^x = \frac{1}{8}$

e) $3^x = \frac{1}{3}$ f) $10^x = 0{,}01$ g) $5^x = 0{,}008$ h) $8^x = 4$

i) $\log_x 9 = 2$ j) $\log_x 243 = 5$ k) $\log_x 1024 = 10$ l) $\log_x \frac{1}{16} = 4$

m) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ n) $\log_x \frac{1}{32} = -5$ o) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ p) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$

q) $\log_7 49 = x$ r) $\log_5 1 = x$ s) $\log_7 \sqrt[6]{49} = x$ t) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = x$

u) $\log_{10} 10^6 = x$ v) $\log_{10} 1 = x$ w) $\log_{10} \sqrt[3]{100} = x$ x) $\log_{10} \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

y) $\log_3 x = 4$ z) $\log_{10} x = -3$

Und noch ein paar!

a) $\log_{10} x = 0$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$ c) $\log_e x = \frac{1}{3}$ d) $\log_5 x = -2$

Aufgabe 3.4

Wenden Sie die Logarithmengesetze an und legen Sie den Gültigkeitsbereich von $a, b, c, \ldots$ fest.

a) $\ln \dfrac{a^2b^3}{c}$ b) $\ln(a^2 - b^2)$ c) $\ln(a^2 + b^2)$

d) $\ln(a+b)^2$ e) $\ln(a^2b^2)$ f) $\ln \dfrac{ab}{a+b}$

g) $\ln \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ h) $\ln \dfrac{a^2b^2}{(a-b)^2}$ i) $\ln \dfrac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5b^3}}$

j) $\ln \left(\dfrac{a^3}{b}\right)^{\frac{5}{4}}$ k) $\ln \dfrac{b}{a} - \ln \dfrac{a}{b}$

l) $\ln 2a + 2\ln b + 2\ln 2c$ m) $2\ln a - 4\ln b$

n) $\dfrac{1}{2}\ln a + 2\ln c - \dfrac{1}{3}(\ln b^3 + \ln a^{\frac{3}{2}})$ o) $\dfrac{1}{3}(\ln a + 3\ln b) - \dfrac{1}{2}(4\ln c - 2\ln d)$

p) $\dfrac{1}{2}\ln(a^2 - ab + b^2) + \dfrac{1}{2}\ln(a+b)$ q) $-3\ln a - \dfrac{1}{3}\ln b$

r) $\ln \dfrac{a}{b} + \ln(ab) - 2\ln(a-b)$

Aufgabe 3.5

(Vergleiche **Aufgabe 3.4** p)) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 - ab + b^2 \geq 0$$

gilt, mit $>$, falls a und b nicht beide Null sind.

Aufgabe 3.6

Sei $0 < \varepsilon < 1$. Ermitteln Sie die Lösungsmengen der der folgenden Ungleichungen. Geben Sie diese in der Intervallschreibweise an.

a) $|x-1| < \varepsilon$ b) $|x+3| > \varepsilon$ c) $|x^2-1| \leq \varepsilon$ d) $|x^2-2| \geq \varepsilon$

Aufgabe 3.7

Zeigen Sie: $|a-b| = |b-a|$.

Aufgaben zu Kapitel 4

Aufgabe 4.1

Lösen Sie die quadratischen Ungleichungen und geben Sie die Lösungsmenge an.

a) $x^2 - x - 2 < 0$

b) $x^2 - 7x + 12 \geq 0$

c) $4x^2 - 8x + 3 > 0$

d) $-x^2 - 4x + 5 \geq 0$

e) $x^2 + 6x + 9 \geq 0$

f) $-2x^2 + 16x - 32 \geq 0$

g) $-x^2 - 14x - 49 < 0$

h) $x^2 + 2x + 10 \leq 0$

i) $-3x^2 + 18x - 36 < 0$

j) $-x^2 + 4x + 21 > 0$

Hinweis: Verwenden Sie zum Faktorisieren gegebenenfalls die Technik des quadratischen Ergänzens anstelle der „p,q-“ oder „Mitternachtsformel“. So bekommen Sie mehr Informationen über die Lage der Parabel und müssen sich keine Formel einprägen.

Aufgabe 4.2

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $x + x^{-1} \geq 10$?

Aufgabe 4.3

Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen

a) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x} + 1 = 0$

b) $x + \sqrt{x^2 - 25} = 25$

c) $9\sqrt{5x+2} = 25 + 4\sqrt{5x+2}$

d) $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x+8}$

e) $\sqrt{x + 2 + \sqrt{2x+7}} = 4$

Aufgabe 4.4

Lösen Sie die folgenden Bruchungleichungen. Bestimmen Sie zunächst die Definitionsmenge der Ungleichung.

a) $\dfrac{1}{x-3} \leq 1$

b) $\dfrac{3}{2x-4} \leq 2$

c) $\dfrac{x-1}{x+1} < 1$

d) $\dfrac{x-3}{x+1} > \dfrac{x+2}{x-1}$

e) $\dfrac{2x+1}{2x-2} + \dfrac{2x-3}{3x-3} \geq 1$

f) $\dfrac{3(4x-1)}{x-1} \geq 12 - \dfrac{2(4x-3)}{x-1}$

Aufgabe 4.5

Lösen Sie die Betragsungleichungen, und geben Sie die Lösungsmenge an. Bestimmen Sie, wo relevant, zunächst die Definitionsmenge der Ungleichung.

a) $|2x-3| < x$

b) $|x-2| < 3$

c) $|2x-3| < x+3$

d) $|x^2-4x| > 0$

e) $\dfrac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$

f) $\dfrac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

g) $|2x-1| > |x-1|$

h) $|x+2| > |x-5|$

Aufgabe 4.6

Skizzieren Sie die folgenden Mengen als Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

a) $\{(x,y)|\ 0 \leq y \leq 1\}$

b) $\{(x,y)|\ x = 5\}$

c) $\{(x,y)|\ 0 \leq y \leq 1, x = 5\}$

d) $\{(x,y)|\ 0 \leq y \leq |x|\}$

e) $\{(x,y)|\ 0 \leq x \leq |y|\}$

f) $\{(x,y)|\ y^2 \leq 4\}$

g) $\{(x,y)|\ 0 \leq y \leq 1, |x-y| < 1\}$

h) $\{(x,y)|\ -1 < y < 1, |x+y| \leq 1\}$

i) $\{(x,y)|\ x^2 \leq y^2\}$

j) $\{(x,y)|\ x^2 \leq y^2 < 4\}$

Aufgabe 4.7

Lösen Sie die folgenden Gleichungen und Ungleichungen und skizzieren Sie die Lösungsmenge.

a) $y = |2x+1| - x$

b) $x + y + |2x+1| = 0$

c) $|3x+2| = 2x - y$

d) $|2x+y-3| = 2y - 3x + 4$

e) $x + y < |3x+2|$

f) $y + |x-2| \leq 4$

g) $x + |y-2| < 3$

h) $|x+3| + |y-5| \leq 3$

Aufgaben zu Kapitel 5

Aufgabe 5.1

Die elementare Funktion $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f$ sei durch $y = f(x)$ definiert. Vervollständigen Sie die Tabelle. Das gesuchte $\mathbb{D}_f$ bzw. $\mathbb{W}_f$ soll für alle in der jeweiligen Zeile zugelassenen Parameter n bzw. a gültig sein. Schränken Sie die Mengen also entsprechend ein.

$f(x)$	$\mathbb{D}_f$	$\mathbb{W}_f$
$x^n, \quad n = 2, 4, 6, ...$		
$x^n, \quad n = 1, 3, 5, ...$		
$\sqrt[n]{x}, \quad n = 2, 3, 4, ...$		
$a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$		
$\log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$		
$x^a, \quad a > 0, \quad a \notin \mathbb{N}$		
$x^a, \quad a < 0, \; -a \notin \mathbb{N}$		

Aufgabe 5.2

Die Funktion f sei durch eine der folgenden Vorschriften gegeben. Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ und geben Sie die Wertemenge $\mathbb{W}_f$ an.

a) $y = \ln x^2$ b) $y = \ln x^3$ c) $y = \ln x$

d) $y = \sqrt{1 - x^2}$ e) $y = \sqrt[3]{x - 2}$ f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

g) $y = 1 + e^x$ h) $y = \sqrt{1 - e^{2x}}$ i) $y = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{1-x}}}$

j) $y = xe^{\sqrt{x}}$ k) $y = \dfrac{1}{1 - e^{\sqrt{x}}}$ l) $y = \dfrac{1}{1 - \ln x}$

m) $y = \ln(x - 1)$

Aufgabe 5.3

Untersuchen Sie die zu den folgenden Vorschriften gehörenden Funktionen auf Monotonie und Symmetrieeigenschaften. Skizzieren Sie den Kurvenverlauf.

a) $y = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$

b) $y = \ln x^2, \quad x \neq 0$

c) $y = x - 5, \quad x \in \mathbb{R}$

d) $y = -x^3, \quad x \in \mathbb{R}$

e) $y = \dfrac{1}{x-1}, \quad x \neq 1$

f) $y = \ln(x-1), \quad x \in (\,1, \infty)$

g) $y = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5.4

Die Funktion f sei durch eine der folgenden Vorschriften definiert. Bilden Sie jeweils die Umkehrfunktion f^{-1} und zeichnen Sie deren Bild.

a) $6y + 18x - 12 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

b) $y = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

c) $y = x^3, \quad x \in \mathbb{R}$

d) $y = 1 + \ln x, \quad x \in (0, \infty)$

Aufgabe 5.5

Bilden Sie $x = f^{-1}(y)$ der zu den folgenden Vorschriften gehörenden Funktion f. Welche Voraussetzungen müssen a und x erfüllen?

a) $y = \dfrac{x+a}{x-a}$

b) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}$

d) $y = \dfrac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{1+x}}$

Aufgabe 5.6

Zeichnen Sie die Bilder der durch folgende Vorschriften definierten Funktionen auf möglichst zweckmäßige Weise, indem Sie Bilder möglichst elementarer Funktionen verwenden.

a) $y = 2|x+2| - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

b) $y = \big||x-1| - 2\big|, \quad x \in \mathbb{R}$

c) $y = 4(x+1)^2, \quad x \in \mathbb{R}$

d) $y = 2^{-(x+3)}, \quad x \in \mathbb{R}$

e) $y_1 = \sqrt{25-(x-3)^2}, \quad x \in [\,-2, 8]; \quad y_2 = -\sqrt{25-(x-3)^2}, \quad x \in [\,-2, 8]$

f) $y_1 = \sqrt{4-(\frac{1}{2}x+1)^2}, \quad x \in [\,-6, 2]; \quad y_2 = -\sqrt{4-(\frac{1}{2}x+1)^2}, \quad x \in [\,-6, 2]$

Aufgaben zu Kapitel 6

Aufgabe 6.1

Bearbeiten Sie diese Aufgabe ohne Zuhilfenahme eines Mitschriebes:
Zeichnen Sie den Einheitskreis in ein Koordinatensystem und markieren Sinus und Cosinus für einen Punkt auf der Kreislinie (wie in der Vorlesung: durch den Punkt ist das Bogenmaß des entsprechenden Winkels gegeben). Veranschaulichen Sie sich die Sinus- und Cosinuswerte an den Stellen 0, $\frac{\pi}{2}$ und π und leiten Sie daraus die Schaubilder des Sinus und Cosinus ab.

Aufgabe 6.2

Vervollständigen Sie die Tabelle.

x in °	x im Bogenmaß	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0°				
30°				
	$\frac{\pi}{4}$			
	$\frac{\pi}{3}$			
90°				
120°				
135°				
150°				
	π			

x in °	x im Bogenmaß	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
210°				
225°				
240°				
270°				
300°				
315°				
330°				
360°				

Aufgabe 6.3

Machen Sie sich die folgenden Gleichungen anschaulich klar und beweisen Sie sie unter Verwendung der Additionstheoreme.

a) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

b) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

c) $\sin(x + \pi) = -\sin x$

d) $\cos(x + \pi) = -\cos x$

e) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

f) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

Aufgabe 6.4

Beweisen Sie das folgende Additionstheorem für den Tangens.

$$\tan(u \pm v) = \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \cdot \tan v}$$

Lösungen

Lösung 1.1

$\mathcal{A} = \neg\mathcal{C},\ \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D},\ \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{E},\ \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{F},\ \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{A}.$

Achtung: Das ist falsch: $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. Warum? Richtig hingegen ist $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$.

Lösung 1.2

a) (i) $A = \{x|x \text{ ist eine Himmelsrichtung}\}$

(ii) $B = \{x|x \text{ ist eine ungerade Zahl}\}$

b) (i) $C = \{x|0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

(ii) Definiere $E := \left\{k|k \in \mathbb{Z} \text{ und } \frac{2}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

. Dann gilt $E = \{-2, -1, 1, 2\}$ und somit $D = \{\frac{1}{3k}|k \in E\} = \left\{-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\}$.

Lösung 1.3

a)
$$\begin{array}{rrcl} & 4x+3 & \leq & 2(x-6) \\ \Leftrightarrow & 4x+3 & \leq & 2x-12 \\ \Leftrightarrow & 2x & \leq & -12-3 \\ \Leftrightarrow & x & \leq & -\frac{15}{2} \end{array}$$
Also ist $\mathbb{L} = \left(-\infty, -\frac{15}{2}\right]$.

b)
$$\begin{array}{rrcl} & \frac{x-1}{2} & \geq & \frac{1-x}{3} \\ \Leftrightarrow & x-1 & \geq & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x \\ \Leftrightarrow & \frac{5}{3}x & \geq & \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow & x & \geq & 1 \end{array}$$
Also ist $\mathbb{L} = [1, \infty)$

c)
$$\begin{array}{rrl} & 4(1-x)+3(x+2) & < 8 \\ \Leftrightarrow & -4x+3x & < 8-4-6 \\ \Leftrightarrow & -x & < -2 \\ \Leftrightarrow & x & > 2 \end{array}$$
Also ist $\mathbb{L} = (2, \infty)$.

d)
$$\begin{array}{rrl} & 3x-1 & \leq 2(x-3)-(2-x) \\ \Leftrightarrow & 3x-2x-x & \leq 1-6-2 \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq -7 \end{array}$$
Also ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

e)
$$\begin{array}{rrl} & 9x & \geq \frac{3(6x-1)}{2} \\ \Leftrightarrow & 9x-9x & \geq -3/2 \\ \Leftrightarrow & 0 & \geq -3/2 \end{array}$$
Das ist für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, also ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

f)
$$\begin{array}{rrl} & -7x & \geq \frac{3(x-1)}{2} \\ \Leftrightarrow & -14x-3x & \geq -3 \\ \Leftrightarrow & -17x & \geq -3 \\ \Leftrightarrow & x & \leq \frac{3}{17} \end{array}$$
Also ist $\mathbb{L} = \left(-\infty, \frac{3}{17}\right]$.

Lösung 1.4

a)
$$\begin{array}{rrl} & 3^{-\frac{1}{2}} & < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow & 1 & < (1/2)^{1/2} \cdot 3^{1/2} \\ \Leftrightarrow & 1 & < (3/2)^{1/2} \end{array}$$

Die Ungleichung ist erfüllt, da $3/2 > 1$ und damit auch $(3/2)^{1/2} > 1$ gilt.

b)
$$\begin{array}{rrl} & (1+a)^2 & \leq 1+2a \\ \Leftrightarrow & 1+2a+a^2 & \leq 1+2a \\ \Leftrightarrow & a^2 & \leq 0 \end{array}$$

ist erfüllt, gdw. $a = 0$.

c)
$$\begin{array}{rrll} & a^2 & > 2, & a \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow & |a| & > \sqrt{2} & a \in \mathbb{N} \\ \overset{a\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} & a & > \sqrt{2}, & a \in \mathbb{N} \end{array}$$

ist erfüllt für alle $a \in \mathbb{N}$ mit $a \geq 2$.

d)
$$\begin{array}{rrll} & \left(\frac{1+a}{a}\right) & > \left(\frac{a}{a-1}\right) & \text{beide Nenner positiv!} \\ \Leftrightarrow & (1+a)(a-1) & > a^2 & \\ \Leftrightarrow & a^2-1 & > a^2 & \\ \Leftrightarrow & -1 & > 0 & \end{array}$$

ist für kein $a \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Lösung 1.5

a) (i) $(b-4)(5-2a)$ (ii) $(2p-3q)(p^2+3q)$

b) Faktorisieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln.

(i) $(b-3)(b+3)$ (ii) $(x-4)^2$

(iii) $(5a+2b^2)^2$ (iv) $(a^2-b)^2(a^2+b)^2$

c) Faktorisieren Sie.

(i) $(x+1)(x-2)$ (ii) $(x-2)(x-3)$ (iii) $2(x+2)(x+1)$

(iv) $3(u-2)(u+2)$ (v) $2a(3a+7b)^2$ (vi) $b(2a+b)$

(vii) $s(2r-s)$ (viii) $-4ba$

Lösung 1.6

$A \cap B = [-4, 1] = \{x \in \mathbb{R} | -4 \leq x \leq 1\}$
$A \cup B \cup C = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
$A \cup C = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
$(A \cup B) \cap C = (-\infty, 3] \cap (1, \infty) = (1, 3] = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 3\}$
$A \cup (B \cap C) = (-\infty, 1] \cup (1, 3] = (-\infty, 3] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$
Man beachte: die zwei letzten Beispiele zeigen: Klammerung ist wichtig.

Lösung 2.1

a) Bitte beachten Sie, dass es bei der Übertragung mathematischer Sachverhalte auf die sprachliche Ebene niemals nur eine Möglichkeit gibt. Diskutieren Sie weitere, aber achten Sie bei diesen auf eine korrekte Sprache.
„Es existiert (mindestens) ein x aus X, so dass für alle y aus Y die Aussage $F(x, y)$ wahr ist."
„Für (mindestens) ein x aus X existiert ein y aus Y mit $F(x, y)$."
„Für alle x aus X existiert ein y aus Y (welches in der Regel von x abhängt), so dass $F(x, y)$ gilt."
„Für alle x aus X gilt, dass für alle y aus Y $F(x, y)$ gilt."

b) „Es gibt einen Teilnehmer diese Vorkurses, der alle Aufgaben eigenständig gelöst hat."
„Mindestens ein Teilnehmer hat eine Aufgabe eigenständig gelöst."
„Alle Teilnehmer haben mindestens eine Aufgabe (welche vom Teilnehmer abhängt) eigenständig gelöst."
„Alle Teilnehmer haben alle Aufgaben eigenständig gelöst."

Lösung 2.2

Diese Aufgabe soll deutlich machen, dass die Reihenfolge der Quantoren wichtig ist und durch das Vertauschen i.A. eine andere Aussage entsteht.

Zunächst zur Aussage $\big(\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0\big)$: Wählen Sie $y = -x$, dann ist y das additive *inverse Element zu* x, dessen Existenz die Lösbarkeit von Gleichungen der Form $a + x = b$ in $\mathbb{Z}$ garantiert (Näheres im Studium). Insbesondere ist diese Aussage wahr!

Die Aussage $\big(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 0\big)$ ist falsch. Das sieht man, in dem man zeigt, dass ihre Negation wahr ist. Es gilt $\neg\big(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 0\big) = \big(\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 0\big)$. Wir müssen also für alle x aus $\mathbb{Z}$ ein y aus $\mathbb{Z}$ finden, so dass $x + y \neq 0$ ist.

Fall 1: $x \neq 0$. Wähle $y = x$, dann ist $x + y = 2x \neq 0$.

Fall 2: $x = 0$. Wähle $y = 1$, dann ist $x + y = 0 + 1 \neq 0$.

Lösung 2.3

Aussage	Verneinung der Aussage
„Es gibt einen Teilnehmer diese Vorkurses, der alle Aufgaben eigenständig gelöst hat.“	„Alle Teilnehmer haben mindestens eine Aufgabe nicht selbständig gelöst.“
„Mindestens ein Teilnehmer hat eine Aufgabe eigenständig gelöst.“	„Kein Teilnehmer hat irgendeine Aufgabe selbständig gelöst.“
„Alle Teilnehmer haben mindestens eine Aufgabe eigenständig gelöst.“	„Es gibt einen Teilnehmer, der keine Aufgabe selbständig gelöst hat.“
„Alle Teilnehmer haben alle Aufgaben eigenständig gelöst.“	„Es gibt einen Teilnehmer, der mindestens eine Aufgabe nicht eigenständig gelöst hat.“

Lösung 3.1

a) 2^{-4} $= \frac{1}{16}$ b) $(3^2)^{\frac{1}{4}}$ $= \sqrt{3}$ c) $3^4 \cdot 3^{-2}$ $= 3^2 = 9$ d) $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^2$ $= 2^{11/4}$ e) $(-\frac{1}{3})^3$ $= -1/27$ f) $(-32)^{\frac{1}{5}}$ $= -2$

Lösung 3.2

a) Vor.: $a > 0$: $\frac{\sqrt[5]{a^3}}{a^2}$ b) Vor.: $a > 0$: $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$ c) Vor.: $b > 0$, $c \neq 0$: $\frac{a\sqrt{b}}{c}$

d) $17 + 12\sqrt{2}$ e) $\frac{18 + 5\sqrt{10}}{2}$ f) $2 - \sqrt{3}$

g) $5 + 2\sqrt{6}$ h) $5(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{30})$ i) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

Lösung 3.3

Wenden Sie die Definition des Logarithmus an und ermitteln Sie x.

a) $x = 6$ b) $x = 1$ c) $x = 4$ d) $x = -3$

e) $x = -1$ f) $x = -2$ g) $x = -3$ h) $x = 2/3$

i) $x = 3$ j) $x = 3$ k) $x = 2$ l) $x = 1/2$

m) $x = 16$ n) $x = 2$ o) $x = 5$ p) $x = 10$

q) $x = 2$ r) $x = 0$ s) $x = 1/3$ t) $x = 2$

u) $x = 6$ v) $x = 0$ w) $x = 2/3$ x) $x = -1/2$

y) $x = 81$ z) $x = 0,001$

Und noch ein paar!

a) $x = 1$ b) $x = 32$ c) $x = \sqrt[3]{e}$ d) $x = 1/25$

Lösung 3.4

a) $a > 0, b > 0, c > 0$
$2\ln a + 3\ln b - \ln c$

b) $a > |b|$
$\ln(a + b) + \ln(a - b)$

c) a, b nicht beide 0,
also $(a, b) \neq (0, 0)$
Logarithmengesetze
nicht anwendbar

d) $a > -b$
$2\ln(a + b)$

e) $a > 0, b > 0$
$2(\ln a + \ln b)$

f) $a > 0, b > 0$
$\ln a + \ln b - \ln(a + b)$

g) $a > |b|$
$\ln(a^2 + b^2) - \ln(a + b) - \ln(a - b)$

h) $a > b > 0$
$2(\ln a + \ln b - \ln(a - b))$

i) $a, b > 0$
$-(\frac{1}{2} \ln a + \ln b)$

j) $a, b > 0$
$\frac{5}{4}(3 \ln a - \ln b)$

k) $a, b > 0$
$2(\ln b - \ln a)$

l) $a, b, c > 0$
$\ln 8ab^2c^2$

m) $a, b > 0$
$\ln \frac{a^2}{b^4}$

n) $a, b, c > 0$
$\ln \frac{c^2}{b}$

o) $a, b, c, d > 0$
$\ln \frac{\sqrt[3]{a}\, bd}{c^2}$

p) $a + b > 0$
$\ln \sqrt{a^3 + b^3}$

q) $a, b > 0$
$\ln \frac{1}{a^3 \sqrt[3]{b}}$

r) $a > b, a \neq 0, b \neq 0,\quad a, b,$ haben gleiches Vorzeichen
$\ln \left(\frac{a}{a-b}\right)^2$

Lösung 3.5

Wir schreiben $a^2 - ab + b^2 = \frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$. Man sieht sofort, dass alle Summanden größer oder gleich Null sind. Betrachtet man die rechte Seite, so gilt $a^2 - ab + b^2 > 0$ offensichtlich genau dann, wenn $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ gilt. (Danke für diesen Lösungsansatz aus den Reihen der TeilnehmerInnen!)

Alternative Lösung: Folgende Lösung ist da schon etwas umständlicher:

Wir verwenden die zwei binomischen Formeln und die Tatsache, dass $(a \pm b)^2 \geq 0$ gilt. Daraus erhalten wir, dass sowohl $a^2 + b^2 \geq 2ab$ $(*)$als auch $a^2 + b^2 \geq -2ab$ $(**)$gilt. Im Falle $ab \geq 0$ verwenden wir $(*)$, andernfalls $(**)$ und erhalten:

$$a^2 + b^2 \geq |2ab| \geq |ab| \geq ab\,.$$

Weitere Überlegungen zeigen:

Sind a, b beide ungleich Null so gilt $>$ anstelle des zweiten $\geq$. Ist entweder a oder b gleich Null, aber nicht beide, so gilt $>$ anstelle des ersten $\geq$.

Zusammengefasst gilt also, falls a, b nicht beide Null sind: $a^2 - ab + b^2 > 0$, sonst trivialerweise $a^2 - ab + b^2 = 0$.

Lösung 3.6

a) $|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$

b) Hier betrachten wir die Menge aller x, welche $|x+3| \leq \varepsilon$ erfüllen. Die gesuchte Menge ist dann gerade das Komplement dieser Menge in $\mathbb{R}$.

Analog zu a) haben wir also $|x+3| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$, gdw. $x \in [-3-\varepsilon, -3+\varepsilon]$. Die gesuchte Menge ist also $\mathbb{R} \setminus [-3-\varepsilon, -3+\varepsilon] = (-\infty, -3-\varepsilon) \cup (-3+\varepsilon, \infty)$.

c) $|x^2 - 1| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x^2 - 1 \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon \leq x^2 \leq 1+\varepsilon \overset{\text{warum?}}{\Leftrightarrow} \sqrt{1-\varepsilon} \leq |x| \leq \sqrt{1+\varepsilon} \Leftrightarrow$
1. Fall $\underline{x \geq 0}$: $x \in [\sqrt{1-\varepsilon}, \sqrt{1+\varepsilon}]$
2. Fall $\underline{x < 0}$: $x \in [-\sqrt{1+\varepsilon}, -\sqrt{1-\varepsilon}]$
Also ist die Lösungsmenge $x \in [\sqrt{1-\varepsilon}, \sqrt{1+\varepsilon}] \cup [-\sqrt{1+\varepsilon}, -\sqrt{1-\varepsilon}]$.

d) Wir lösen diese Aufgabe wieder über das Komplement und verfahren analog zu c). Die gesuchte Lösungsmenge ist dann $(-\infty, -\sqrt{2+\varepsilon}] \cup [-\sqrt{2-\varepsilon}, \sqrt{2-\varepsilon}] \cup [\sqrt{2+\varepsilon}, \infty)$

Lösung 3.7

Zeigen Sie $|a-b| = |b-a|$:

1. Fall: ist $a = b$, so ist $a - b = b - a = 0$ und die Gleichung ist erfüllt.

2. Fall: ist $a \neq b$. Sei o. B. d. A. [1] $a < b$. Dann ist $a - b = -(b-a)$ und somit

$$|a-b| = |\overbrace{-\underbrace{(b-a)}_{>0}}^{<0}| \overset{\text{Def}}{=} \underbrace{(b-a)}_{>0} = |b-a|\,.$$

[1] nach Wikipedia: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, abgekürzt o. B. d. A., ist eine in mathematischen Beweisen vorkommende Formulierung.

Mit dieser Formulierung wird zum Ausdruck gebracht, dass eine Einschränkung (z. B. des Wertebereichs einer Variablen) nur zur Vereinfachung der Beweisführung vorausgesetzt wird (insbesondere zur Verringerung der Schreibarbeit), ohne dass die Gültigkeit der im Anschluss getroffenen Aussagen in Bezug auf die Allgemeinheit darunter leidet. Der Beweis wird nur für einen von mehreren möglichen Fällen geführt. Dies geschieht unter der Bedingung, dass die anderen Fälle in analoger Weise bewiesen werden können (z. B. bei Symmetrie).Durch o. B. d. A. können auch triviale Sonderfälle ausgeschlossen werden.

Lösung 4.1

a) Wir lösen zunächst die zugehörige Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} x^2 - x - 2 & = & 0 \\ \overset{-1 \text{ ist Nullst.}}{\Leftrightarrow} \quad (x+1)(x-2) & = & 0 \\ \Leftrightarrow \quad (x=-1) & \vee & (x=2) \end{array}$$

Da das Vorzeichen von x^2 positiv ist, ist die zug. Parabel nach oben geöffnet und es gilt $x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$, also $\mathbb{L} = (-1, 2)$. (Wer mag, kann z.B. bei $x = 0$ überprüfen: $0^2 - 0 - 2 < 0 \ \surd$.)

b) Quadratisches Ergänzen: $x^2 - 7x + 12 = (x - \frac{7}{2})^2 - (\frac{7}{2})^2 + 12 = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{1}{4}$

Also erhalten wir für die zugehörige Gleichung

$$\begin{array}{rrcl} & x^2 - 7x + 12 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (x - \frac{7}{2})^2 & = & \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow & x - \frac{7}{2} & = & \pm\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & x & = & \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & (x = 4) & \vee & (x = 3) \end{array}.$$

Die zug: Parabel ist nach oben geöffnet und wir erhalten $\mathbb{L} = (-\infty, 3] \cup [4, \infty) = \mathbb{R} \setminus (3, 4)$.

c) $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

d) $\mathbb{L} = [-5, 1]$

e) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$

f) $\mathbb{L} = \{4\}$

g) $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$

h) $\mathbb{L} = \emptyset$

i) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$

j) $\mathbb{L} = (-3, 7)$

Lösung 4.2

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $x + x^{-1} \geq 10$?

Für $x = 0$ ist die Ungleichung nicht definiert und für $x < 0$ offensichtlich nicht erfüllt. Sei also $x > 0$. Dann gilt:

$$x + \frac{1}{x} \geq 10 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 10x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 \geq 0$$

Dem entspricht eine nach oben geöffnete Parabel. Quadratisches Ergänzen liefert die Nullstellen $5 + 2\sqrt{6}$ und $5 - 2\sqrt{6}$. Die Ungleichung ist also (Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$!) für alle $x \in (0, 5 - 2\sqrt{6}] \cup [5 + 2\sqrt{6}, \infty)$ erfüllt.

Lösung 4.3

Machen Sie sich klar, wann Ihre Umformungen lediglich eine Implikation, aber keine Äquivalenzumformung sind ($\Rightarrow$). Da Sie bei diesem Typ Aufgabe sowieso eine Probe machen müssen, können Sie auch jede Umformung mit $\Rightarrow$ verbinden (wieso?).

a) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x}+1=0$

Man sieht entweder sofort, dass diese Gleichung keine Lösung hat (Wurzeln sind nicht-negativ!), oder man formt um:

$$\begin{array}{lrcl} \Leftrightarrow & \sqrt{x+6} & = & -(\sqrt{x}+1) \\ \Rightarrow & x+6 & = & x+2\sqrt{x}+1 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{x} & = & -5 \\ \Rightarrow & x & = & \frac{25}{4} \end{array}$$

Probe: $\frac{25}{4}$ ist keine Lösung!

b)

$$\begin{array}{lrcl} & x+\sqrt{x^2-25} & = & 25 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2-25} & = & 25-x \\ \Rightarrow & x^2-25 & = & (x-25)^2 \\ & & \cdots & \\ \Leftrightarrow & x & = & 13 \end{array}$$

Probe: $x = 13$ ist Lösung.

c)

$$\begin{array}{lrcl} & 9\sqrt{5x+2} & = & 25+4\sqrt{5x+2} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{5x+2} & = & 5 \\ \Rightarrow & 5x+2 & = & 25 \\ \Leftrightarrow & x & = & \frac{23}{5} \end{array}$$

Probe: $x = \frac{23}{5}$ ist Lösung.

d)

$$\begin{array}{lrcl} & \sqrt{x}+\sqrt{x+3} & = & \sqrt{x+8} \\ \Rightarrow & x+x+3+2\sqrt{x(x+3)} & = & x+8 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{x(x+3)} & = & -x+5 \\ \Rightarrow & 4(x^2+3x) & = & x^2-10x+25 \\ \Leftrightarrow & 3x^2+22x-25 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x^2+\frac{22}{3}x-\frac{25}{3} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (x+\frac{11}{3})^2-((\frac{11}{3})^2+\frac{25}{3}) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (x+\frac{11}{3})^2 & = & \frac{196}{9} \\ \Leftrightarrow & x & = & \pm\frac{14}{3}-\frac{11}{3} \end{array}$$

Probe: $x_1 = 1$ ist eine Lösung, $x_2 = \frac{-25}{3}$ ist keine Lösung.

e)

$$\begin{array}{lrcl} & \sqrt{x+2+\sqrt{2x+7}} & = & 4 \\ \Rightarrow & x+2+\sqrt{2x+7} & = & 16 \\ \Rightarrow & 2x+7 & = & (14-x)^2 \\ & & \cdots & \\ \Rightarrow & x^2-30x+189=0 & & \\ \Leftrightarrow & (x-15)^2-15^2+189 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (x-15)^2 & = & 36 \\ \Leftrightarrow & x & = & \pm 6+15 \end{array}$$

Probe: $x_1 = 21$ ist keine Lösung, $x_2 = 9$ ist eine Lösung.

Lösung 4.4

a) $x \neq 3$
1. Fall: $x - 3 > 0$, bzw. $x > 3$. Dann gilt
$\frac{1}{x-3} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4$
Also ist die Teillösung $\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x \geq 4\} = [4, \infty)$.
2. Fall: $x < 3$. Dann gilt
$\frac{1}{x-3} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 4$.
Also ist die Teillösung $\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} | x < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x \leq 4\} = (-\infty, 3)$.
Insgesamt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$.

b) $\mathbb{L} = (-\infty, 2) \cup [\frac{11}{4}, \infty)$

c) $\mathbb{L} = (-1, \infty)$

d) $\mathbb{L} = (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{7}, 1)$

e) $\mathbb{L} = (-\infty, -\frac{3}{4}] \cup (1, \infty)$

f) $\mathbb{L} = (-\infty, -\frac{3}{8}] \cup (1, \infty)$

Lösung 4.5

a) *1. Fall:* $2x - 3 \geq 0$ bzw. $x \geq \frac{3}{2}$. Dann gilt
$|2x - 3| < x \;\Leftrightarrow\; 2x - 3 < x \;\Leftrightarrow\; x < 3\,.$
Wir erhalten die Teillösung $\mathbb{L}_1 = [\frac{3}{2}, \infty) \cap (-\infty, 3) = [\frac{3}{2}, 3)$.
2. Fall: $x < \frac{3}{2}$. Dann gilt
$|2x - 3| < x \;\Leftrightarrow\; 3 - 2x < x \;\Leftrightarrow\; -3x < -3 \;\Leftrightarrow\; x > 1\,.$
Wir erhalten die Teillösung $\mathbb{L}_2 = [-\infty, \frac{3}{2}) \cap (1, \infty) = (1, \frac{3}{2})$.
Insgesamt ist $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (1, 3)$.

b) $\mathbb{L} = (-1, 5)$

c) $\mathbb{L} = (0, 6)$

d) Hinschauen! Der Term im Betrag darf nicht Null sein: $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$

e) $x \leq 1$, aber $x \neq -4$:
$\mathbb{L} = (-\infty, 1] \setminus \{-4\}$

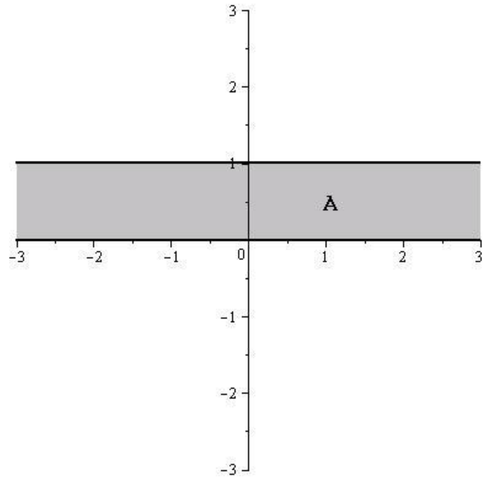
f) $\mathbb{L} = (-1, -1/3]$

g) Bei $\frac{1}{2}$ und 1 kommt es zu Vorzeichenwechsel innerhalb der Beträge. Das führt zu folgender Fallunterscheidung:
1. Fall: $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$
$|2x - 1| > |x - 1| \;\Leftrightarrow\; -(2x - 1) > -(x - 1) \;\Leftrightarrow\; 2x - 1 < x - 1 \;\Leftrightarrow\; x < 0$
Also ist $\mathbb{L}_1 = (-\infty, 0)$
2. Fall: $x \in [\frac{1}{2}, 1)$
$|2x - 1| > |x - 1| \;\Leftrightarrow\; (2x - 1) > -(x - 1) \;\Leftrightarrow\; 3x > 2 \;\Leftrightarrow\; x > \frac{2}{3}$
Also ist $\mathbb{L}_2 = (\frac{2}{3}, 1)$
3. Fall: $x \in [1, \infty)$ $|2x - 1| > |x - 1| \;\Leftrightarrow\; (2x - 1) > (x - 1) \;\Leftrightarrow\; x > 0$
Also ist $\mathbb{L}_3 = [1, \infty)$
Insgesamt ist $\mathbb{L} = (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$

h) $\mathbb{L} = (\frac{3}{2}, \infty)$

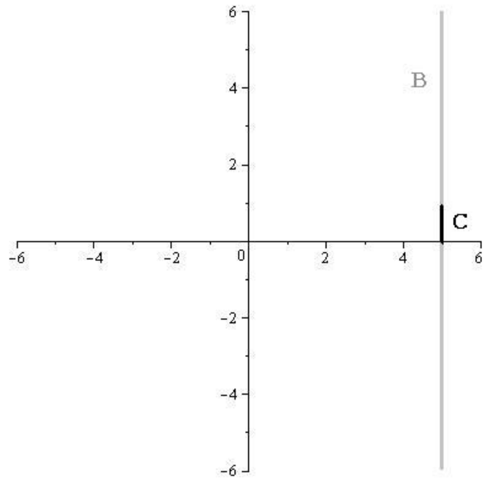
Lösung 4.6

a) $\{(x,y) |\ 0 \le y \le 1\}$:

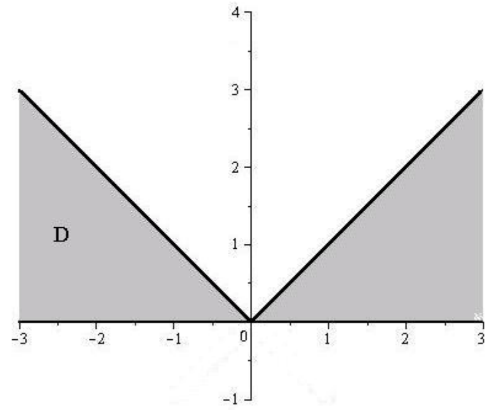


b) siehe bei c)

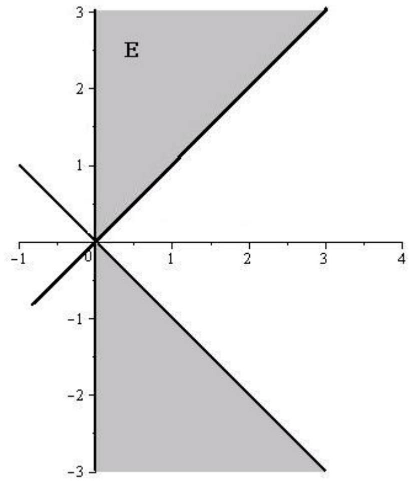
c) $\{(x,y) |\ x = 5\}$:



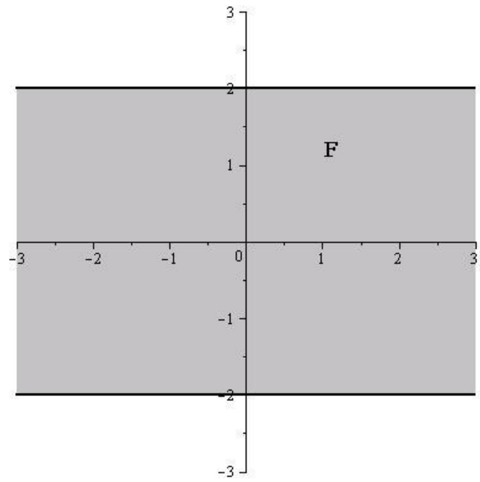
d) $\{(x,y) |\ 0 \le y \le |x|\}$:



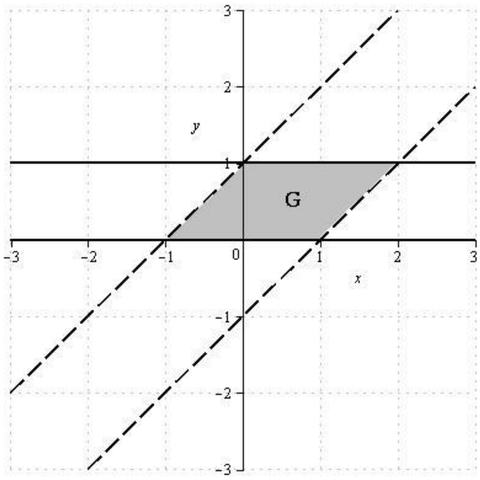
e) $\{(x,y) |\, 0 \leq x \leq |y|\}$:



f) $\{(x,y) |\, y^2 \leq 4\}$:

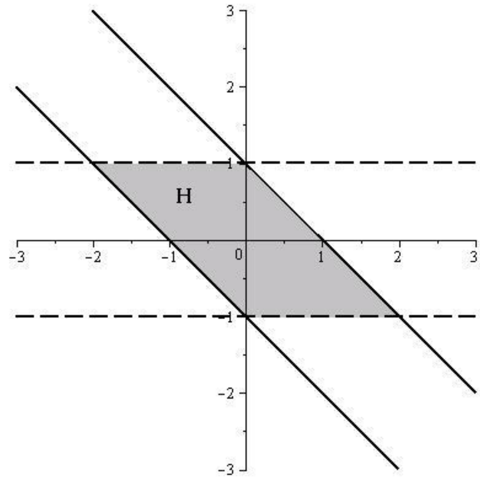


g) $\{(x,y) |\, 0 \leq y \leq 1, |x-y| < 1\}$

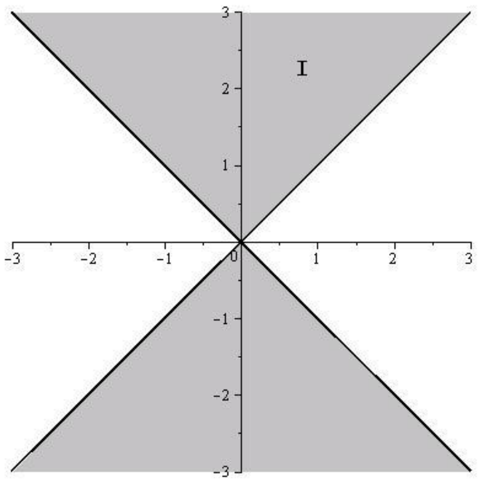


$$\begin{array}{rrcl} & |x-y| & \leq & 1 \\ \Leftrightarrow & -1 \leq x-y & \leq & 1 \\ \Leftrightarrow & (-1 \leq x-y) & \wedge & (x-y \leq 1) \\ \Leftrightarrow & (y \leq x+1) & \wedge & (y \geq x-1) \end{array}$$

h) $\{(x,y) |\, -1 < y < 1, |x+y| \leq 1\}$:

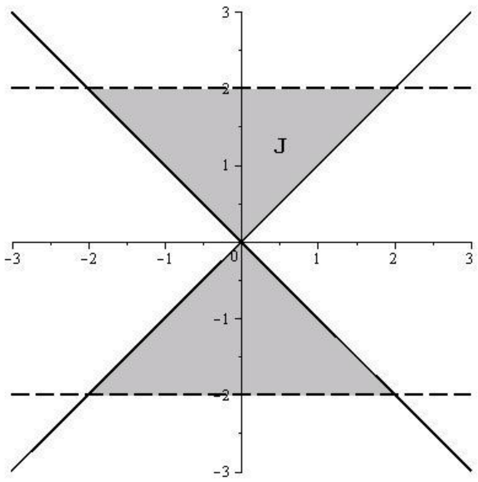


i) $\{(x,y)|\, x^2 \leq y^2\}$:



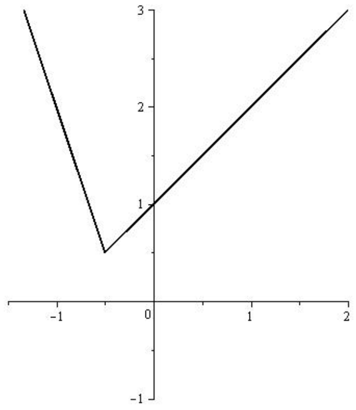
$$\begin{array}{lccc} & x^2 & \leq & y^2 \\ \Leftrightarrow & |x| & \leq & |y| \\ \Leftrightarrow & \multicolumn{3}{l}{\begin{cases} |x| \leq y & y \geq 0 \\ |x| \leq -y & y < 0 \end{cases}} \\ \Leftrightarrow & \multicolumn{3}{l}{\begin{cases} |x| \leq y & y \geq 0 \\ -|x| \geq y & y < 0 \end{cases}} \end{array}$$

j) $\{(x,y)|\, x^2 \leq y^2 < 4\}$:



Lösung 4.7

a) $y = \begin{cases} x+1 & x \geq -\frac{1}{2} \\ -3x-1 & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$



b) $y = \begin{cases} -3x-1 & x \geq -\frac{1}{2} \\ x+1 & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -x-2 & x \geq -\frac{2}{3} \\ 5x+2 & x < -\frac{2}{3} \end{cases}$

d) $|2x+y-3| = 2y-3x+4 \qquad (*)$
Der Vorzeichenwechsel innerhalb des Betrages führt zu folgender Fallunterscheidung:
1. Fall: $y \geq 3-2x \quad (**)$.

$$\begin{array}{rrcl} (*) \;\Leftrightarrow & 2x+y-3 & = & 2y-3x+4 \\ \Leftrightarrow & y & = & 5x-7 \end{array}$$

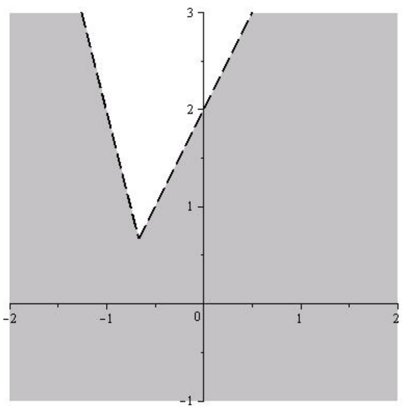
Diese Gleichung in die Bedingung $(**)$ eingesetzt liefert die Bedingung $x \geq \frac{10}{7}$.
2. Fall : $y < 3-2x$.

$$(*) \;\Leftrightarrow \quad y \;=\; \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}$$

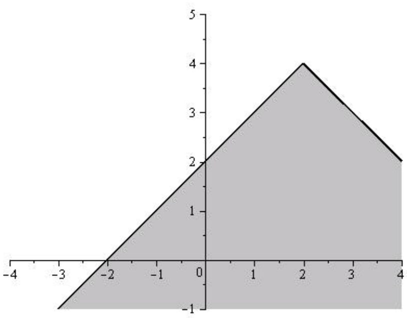
Entsprechen wie im obigen Fall erhalten wir die Bedingung $x < \frac{10}{7}$.
Insgesamt:

$$y = \begin{cases} 5x-7 & x \geq \frac{10}{7} \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} & x < \frac{10}{7} \end{cases}$$

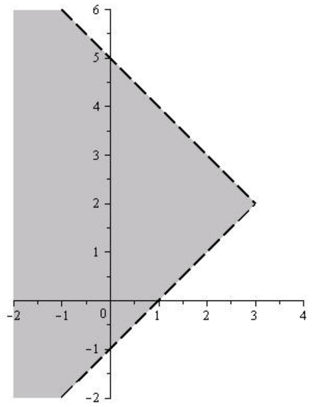
e) $y < \begin{cases} 2x+2 & x \geq -\frac{2}{3} \\ -4x-2 & x < -\frac{2}{3} \end{cases}$



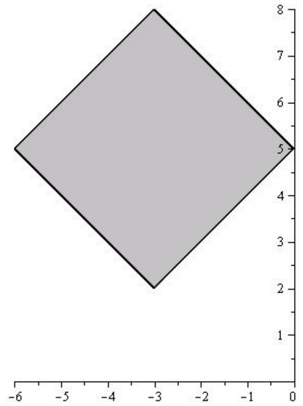
f) $y \leq \begin{cases} -x+6 & x \geq 2 \\ x+2 & x < 2 \end{cases}$



g) $\begin{cases} y < -x+5 & y \geq 2 \\ y > x-1 & y < 2 \end{cases}$



h) $\begin{cases} y \leq -x+5 & -3 \leq x \leq 0 \text{ und } 5 \leq y \leq 8 \\ y \geq x+5 & -3 \leq x \leq 0 \text{ und } 2 \leq y < 5 \\ y \leq x+11 & -6 \leq x < -3 \text{ und } 5 \leq y < 8 \\ y \geq -x-1 & -6 \leq x < -3 \text{ und } 2 \leq y < 5 \end{cases}$



Lösung 5.1

Die elementare Funktion $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f$ sei durch $y = f(x)$ definiert.

$f(x)$	$\mathbb{D}_f$	$\mathbb{W}_f$
$x^n, \quad n = 2, 4, 6, ...$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$x^n, \quad n = 1, 3, 5, ...$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
$\sqrt[n]{x}, \quad n = 2, 3, 4, ...$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \infty)$
$\log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
$x^a, \quad a > 0, \quad a \notin \mathbb{N}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$x^a, \quad a < 0, \ -a \notin \mathbb{N}$	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$

Lösung 5.2

Die Funktion f sei durch eine der folgenden Vorschriften gegeben. Dann bestimmen sich $\mathbb{D}_f$ und $\mathbb{W}_f$ folgendermaßen:

a) $y = \ln x^2$
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{W}_f = (-\infty, \infty)$

b) $y = \ln x^3$
$\mathbb{D}_f = (0, \infty)$
$\mathbb{W}_f = (-\infty, \infty)$

c) $y = \ln x$
$\mathbb{D}_f = (0, \infty)$
$\mathbb{W}_f = (-\infty, \infty)$

d) $y = \sqrt{1 - x^2}$
$\mathbb{D}_f = [-1, 1]$
$\mathbb{W}_f = [0, 1]$

e) $y = \sqrt[3]{x - 2}$
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
$\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$
Dabei sei für $a < 0$:
$\sqrt[3]{a} := -\sqrt[3]{-a}$.

f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\mathbb{D}_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$\mathbb{W}_f = (0, \infty)$

g) $y = 1 + e^x$
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
$\mathbb{W}_f = (1, \infty)$

h) $y = \sqrt{1 - e^{2x}}$
$\mathbb{D}_f = (-\infty, 0]$
$\mathbb{W}_f = [0, 1)$

i) $y = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{1-x}}}$
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$\mathbb{W}_f = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

j) $y = xe^{\sqrt{x}}$
$\mathbb{D}_f = [0, \infty)$
$\mathbb{W}_f = [0, \infty)$

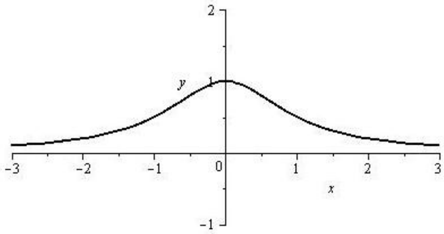
k) $y = \dfrac{1}{1 - e^{\sqrt{x}}}$
$\mathbb{D}_f = (0, \infty)$
$\mathbb{W}_f = (-\infty, 0)$

l) $y = \dfrac{1}{1 - \ln x}$
$\mathbb{D}_f = (0, \infty) \setminus \{e\}$
$\mathbb{W}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

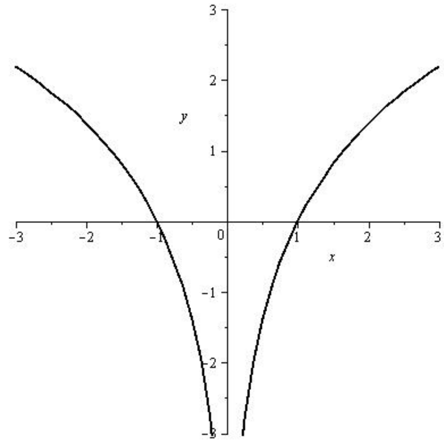
m) $y = \ln(x - 1)$
$\mathbb{D}_f = (1, \infty)$
$\mathbb{W}_f = (-\infty, \infty)$

Lösung 5.3

a) $y = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$
gerade Funktion; nicht monoton



b) $y = \ln x^2, \quad x \neq 0$
gerade Funktion; nicht monoton.



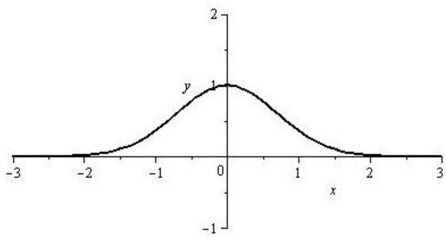
c) $y = x - 5, \quad x \in \mathbb{R}$
(streng) monoton wachsend; weder gerade noch ungerade;
Bild klar.

d) $y = -x^3, \quad x \in \mathbb{R}$
ungerade Funktion; (streng) monoton fallend;
Bild klar.

e) $y = \dfrac{1}{x-1}, \quad x \neq 1$
weder gerade noch ungerade;
Bild: „$y = \frac{1}{x}$ um 1 nach rechts verschoben“.

f) $y = \ln(x-1), \quad x \in (1, \infty)$
weder gerade noch ungerade; (streng) monoton wachsend.
Bild: „durch Verschieben von $y = \ln x$“ um 1 nach rechts.

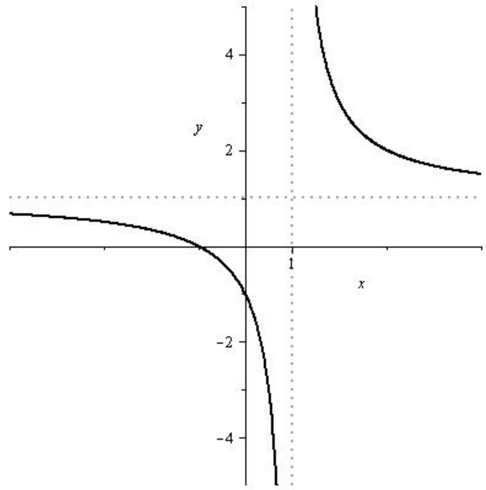
g) $y = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
gerade Funktion; nicht monoton.



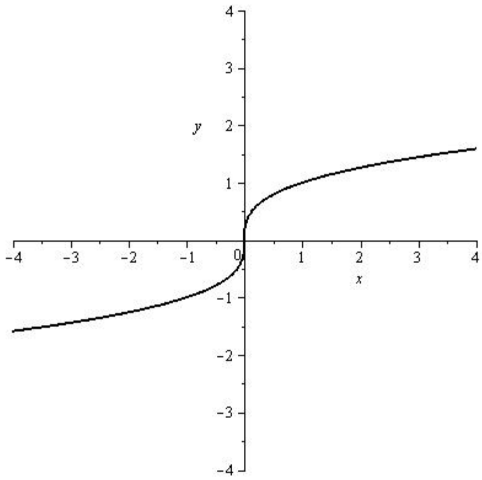
Lösung 5.4

a) $6y + 18x - 12 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$
Diese Gleichung lösen wir zunächst nach x auf und erhalten
$x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}y.$
Die Umkehrfunktion
$f^{-1} : \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{W}_f \to \mathbb{R},\ y = f^{-1}(x)$
erhalten wir durch Vertauschen von x und y:
$y = f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in \mathbb{D}_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$
Bild: klar

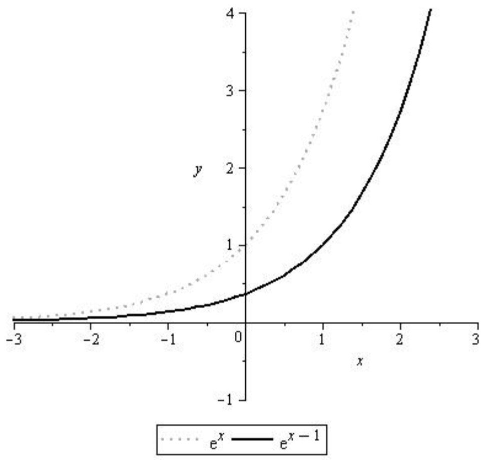
b) $y = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



c) $y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \in [0, \infty) \\ -\sqrt[3]{-x} & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$



d) $y = f^{-1}(x) = e^{x-1}, \quad x \in \mathbb{D}_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$



Lösung 5.5

$x = f^{-1}(y)$:

a) Vor.: $x \neq a$
$x = f^{-1}(y) = a \cdot \frac{y+1}{y-1} \quad y \neq 1$

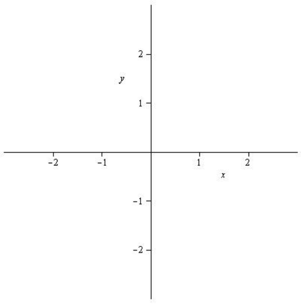
b) $x \geq 0,\ x \neq 1$
$x = f^{-1}(y) = \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2, \quad y \neq -1$

c) $x \geq 0,\ a \geq 0,\ \sqrt{a} + \sqrt{x} > 0$
$x = f^{-1}(y) = a \cdot \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2, \quad y \neq -1$

d) $x \geq -1,\ x \neq 0$
$x = f^{-1}(y) = \frac{-4y}{(y+1)^2} \quad y \neq -1$

Lösung 5.6

Bei den Angaben „nach links“ etc. gehen wir wie immer von unserem Koordinatensystem der Form



aus.

a) $y = 2|x+2| - 1, \quad x \in \mathbb{R}$:
Der Graph der Betragsfunktion wird um 2 nach links verschoben, dann um Faktor 2 in Richtung y-Achse gestreckt und dann um eins nach unten verschoben.

b) $y = \big||x-1| - 2\big|, \quad x \in \mathbb{R}$
Der Graph der Betragsfunktion wird um 1 nach rechts verschoben, dann um 2 nach unten, dann wird der negative Teil „nach oben geklappt“.

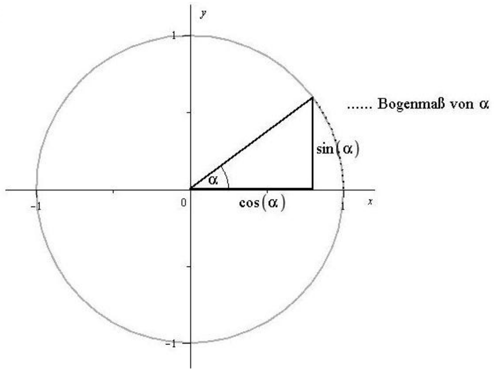
c) $y = 4(x+1)^2, \quad x \in \mathbb{R}$
Die Parabel $y = x^2$ wird um 1 nach links verschoben und dann um den Faktor 4 in Richtung y-Achse gestreckt.

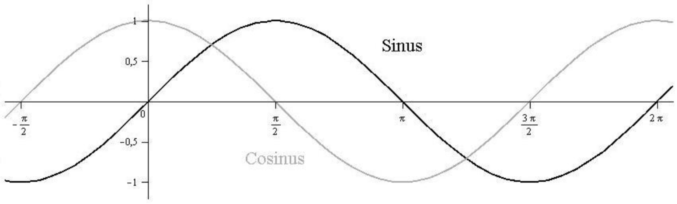
d) $y = 2^{-(x+3)}, \quad x \in \mathbb{R}$
Der Graph von 2^{-x} entsteht durch Spiegelung des Graphen von 2^x an der y-Achse. Das wird dann um 3 nach links verschoben, oder (was aufs Gleiche rauskommt!) man staucht den Graphen von 2^{-x} um den Faktor $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ in Richtung y-Achse.

e) $y_1 = \sqrt{25 - (x-3)^2}, \quad x \in [\,-2, 8]; \quad y_2 = -\sqrt{25 - (x-3)^2}, \quad x \in [\,-2, 8]$
Der gesuchte Kreis wird aus $x^2 + y^2 = 25$ (Kreis um Null mit Radius 5) durch eine Verschiebung um 3 nach rechts gewonnen.

f) $y_1 = \sqrt{4 - \left(\frac{1}{2}(x+2)\right)^2}, \quad x \in [\,-6, 2]; \quad y_2 = -\sqrt{4 - \left(\frac{1}{2}(x+2)\right)^2}, \quad x \in [\,-6, 2]$
Hierbei handelt es sich um einen Kreis um -2 mit Radius 2 der um den Faktor 2 in Richtung x-Achse gestreckt wird.

Lösung 6.1





Lösung 6.2

x in °	x im Bogenmaß	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	-
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
360°	2π	0	1	0

Lösung 6.3

Der Einfachheit halber wird in den folgenden Formulierungen an manchen Stellen der Graph einer Funktion mit der Funktion identifiziert.

a) Der Graph von cos entsteht also aus dem Graphen von sin durch Verschieben um $\frac{\pi}{2}$ nach links.
$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin x \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + \cos x \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = \cos x$

b) Verschiebt man den Graphen von cos um $\frac{\pi}{2}$ nach links und spiegelt das an der x-Achse, so erhält man den Graphen von sin.
$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \sin\frac{\pi}{2} = -\sin x$

c) Verschieben von sin um π nach links ergibt $-\sin$.
$\sin(x+\pi) = \sin x \underbrace{\cos\pi}_{=-1} + \cos x \underbrace{\sin\pi}_{=0} = -\sin x$

d) Hier analog.
$\cos(x+\pi) = \cos x \cos\pi - \sin x \sin\pi = -\cos x$

e) Verschieben von sin um 2π nach links ergibt wieder sin. Klar: sin ist ja 2π-periodisch.
$\sin(x+2\pi) =$
$\sin x \underbrace{\cos 2\pi}_{=1} + \cos x \underbrace{\sin 2\pi}_{=0} = \sin x$

f) Hier analog.
$\cos(x+2\pi) =$
$\cos x \cos 2\pi - \sin x \sin 2\pi = \cos x$

Lösung 6.4

$$\tan(u \pm v) = \frac{\sin(u \pm v)}{\cos(u \pm v)} = \frac{\sin u \cos v \pm \cos u \sin v}{\cos u \cos v \mp \sin u \sin v}$$

$$= \frac{\sin u \cos v \, \dfrac{\cos u}{\cos u} \pm \cos u \, \dfrac{\sin v}{\cos v} \cdot \cos v}{\cos u \cos v \mp \sin u \sin v}$$

$$= \frac{\tan u \, (\cos v \cos u) \pm \tan v \, (\cos u \cos v)}{\cos u \cos v \left(1 \mp \dfrac{\sin u \sin v}{\cos u \cos v}\right)} = \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \cdot \tan v}$$