KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
M. Sc. Luca Haardt

WS 2023/2024
09.10.2023

Mathematischer Vorkurs

Lösungsvorschläge zum 1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 (a) Die Wahrheitstafeln sehen folgendermaßen aus.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	f	f	w

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$	$\neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$	$\neg\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{B}$	$\neg(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$	$\neg\mathcal{A}\vee\neg\mathcal{B}$
w	w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	f	f	f	w	w
f	w	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\vee\mathcal{C}$	$\mathcal{B}\vee\mathcal{C}$	$(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\vee\mathcal{C}$	$(\mathcal{A}\vee\mathcal{C})\wedge(\mathcal{B}\vee\mathcal{C})$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
f	w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f	f
f	w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	f	w	w	w	w
f	f	f	f	f	f	f	f

(b) Die Wahrheitstafeln sehen folgendermaßen aus.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$
w	w	w
f	f	w

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C}$	$\mathcal{C}\Rightarrow\mathcal{B}$	$(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C})\wedge(\mathcal{C}\Rightarrow\mathcal{B})$	$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$	$\big[(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C})\wedge(\mathcal{C}\Rightarrow\mathcal{B})\big]\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	w	w	w
w	f	w	w	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	f	f	f	w
f	w	f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	f	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Aufgabe 2
Wir können folgende Verknüpfungen bilden.

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{C}, \quad \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D}, \quad \mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{E}, \quad \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{A}.$$

Achtung: $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ ist richtig aber $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist falsch.

Aufgabe 3
Die Frage ist unter den angegebenen Umständen nicht beantwortbar. Es handelt sich hierbei um das bekannte „Russellsche Paradoxon“, welches von Russell um 1900 entdeckt und publiziert wurde. Warum es sich um ein Paradoxon handelt, sieht man folgendermaßen ein:
Geht man davon aus, dass der Barbier sich selbst rasiert, dann wird er von dem Barbier rasiert und rasiert sich per Definition nicht selbst.
Geht man davon aus, dass der Barbier sich nicht selbst rasiert, wird er vom Barbier rasiert und rasiert sich somit selbst.

In dem in der Vorlesung präsentierten logischen Kalkül haben wir es mit folgender Situation zu tun:

$$(\mathcal{A} \;\Rightarrow\; \neg\mathcal{A}) \;\wedge\; (\neg\mathcal{A} \;\Rightarrow\; \mathcal{A})$$

wobei $\mathcal{A}$ als die Aussage „Der Barbier rasiert sich selbst“ aufzufassen ist.

Aufgabe 4
(a)

(i) $(b-3)(b+3)\,,$ (ii) $(x-4)^2\,,$

(iii) $(5a+2b^2)^2\,,$ (iv) $(a^4-b^2)^2\,.$

(b)

(i) $(x-2)(x+1)\,,$ (ii) $3(u-2)(u+2)\,,$

(iii) $2a(3a+7b)^2\,,$ (iv) $-4ab\,.$

Aufgabe 5
(a)

(i) $A = [1,\infty)\,.$ (ii) $B = (2,\infty)\,.$

(iii) $C = \emptyset\,.$ (iv) $D = (-\infty, \frac{3}{17}]\,.$

(b)

(i) $A \cap B = (2,\infty)\,.$ (ii) $D \setminus B = (-\infty, \frac{3}{17}]\,.$

(iii) $(A \setminus C) \cup D = \mathbb{R} \setminus (\frac{3}{17}, 1)\,.$ (iv) $\mathbb{R} \setminus (A \cup B) = (-\infty, 1)\,.$

Aufgabe 6

(a) *Voraussetzung:* Es sei $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade.

Behauptung: n ist gerade.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung durch Kontraposition, also

$$n \text{ ungerade} \quad \Rightarrow \quad n^2 \text{ ungerade.}$$

Sei also n ungerade und

$$U := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{es existiert ein } k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n = 2k+1\}$$

die Menge der ungeraden Zahlen. Da $n \in U$ existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k+1$. Dann folgt

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1\,.$$

Wegen $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$ ist $n^2 \in U$ und die Behauptung gezeigt. $\square$

(b) *Behauptung:* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: Wir gehen davon aus, dass $\sqrt{2} > 0$ gilt und führen einen Widerspruchsbeweis.
Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dann existieren $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ und p und q teilerfremd. Dann folgt

$$2 = \sqrt{2}^2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2\,,$$

also ist p^2 eine gerade Zahl und wegen (a) auch p gerade. Daher existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $p = 2k$. Dann folgt

$$2q^2 = p^2 \iff 2q^2 = 4k^2 \iff q^2 = 2k^2$$

und damit ist auch q eine gerade Zahl. Insgesamt haben p und q den Teiler 2 und dies ist ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q. $\square$