

## Mathematischer Vorkurs

### 2. Aufgabenblatt

#### Aufgabe 7

(a) Berechnen Sie:

- (i)  $2^{-4}$ , (ii)  $(3^6)^{\frac{1}{12}}$ ,  
(iii)  $3^{10} \cdot 3^{-8}$ , (iv)  $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^2$ ,  
(v)  $(-\frac{1}{3})^3$ , (vi)  $\sqrt[5]{-32}$ .

(b) Formen Sie jeweils den angegebenen Ausdruck in einen Term mit rationalem Nenner um und vereinfachen Sie dann die Ausdrücke so weit wie möglich.

- (i)  $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}$ , (ii)  $\frac{3\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}$ ,  
(iii)  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ , (iv)  $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$ ,  
(v)  $\frac{60}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}$ , (vi)  $\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{2} + \sqrt{6}}$ .

#### Aufgabe 8

Bestimmen Sie jeweils das  $x \in \mathbb{R}$ , welches die angegebene Gleichung erfüllt.

- (1)  $2^x = 64$ ,  $64^x = 64$ ,  $3^x = 81$ ,  $2^x = \frac{1}{8}$ ,  
(2)  $3^x = \frac{1}{3}$ ,  $10^x = 0,01$ ,  $5^x = 0,008$ ,  $8^x = 4$ ,  
(3)  $\log_x(9) = 2$ ,  $\log_x(243) = 5$ ,  $\log_x(1024) = 10$ ,  $\log_x\left(\frac{1}{16}\right) = 4$ ,  
(4)  $\log_x(4) = \frac{1}{2}$ ,  $\log_x \frac{1}{32} = -5$ ,  $\log_x \frac{1}{5} = -1$ ,  $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ ,  
(5)  $\log_7(49) = x$ ,  $\log_5(1) = x$ ,  $\log_7(\sqrt[6]{49}) = x$ ,  $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = x$ ,  
(6)  $\log_{10}(10^6) = x$ ,  $\log_{10}(1) = x$ ,  $\log_{10}(\sqrt[3]{100}) = x$ ,  $\log_{10}\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right) = x$ ,  
(7)  $\log_3(x) = 4$ ,  $\log_{10}(x) = -3$ .

## Aufgabe 9

Es sei  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Geben Sie jeweils die angegebene Menge als Intervall oder als Vereinigung von Intervallen an.

(a)  $A := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < \varepsilon\}$ ,

(b)  $B := \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 3| > \varepsilon\}$ ,

(c)  $C := \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 1| \leq \varepsilon\}$ ,

(d)  $D := \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 2| \geq \varepsilon\}$ .

## Aufgabe 10

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Für  $r, s \in \mathbb{Q}$  und  $a, b \in (0, \infty)$  gilt

$$a^s \cdot a^r = a^{s+r}, \quad a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r \quad \text{und} \quad (a^r)^s = a^{r \cdot s}.$$

(b) Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

(c) Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

(d) Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$a^2 - ab + b^2 \geq 0$$

und es gilt “>” wenn  $a \neq 0$  oder  $b \neq 0$ .