KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
M. Sc. Luca Haardt

WS 2023/2024
10.10.2023

Mathematischer Vorkurs

Lösungsvorschläge zum 2. Aufgabenblatt

Aufgabe 7

(a)

(i) $\frac{1}{16}$ (ii) $\sqrt{3}$

(iii) 9 (iv) $2^{11/4}$

(v) $-1/27$ (vi) -2

(b)

(i) $17 + 12\sqrt{2}$ (ii) $\dfrac{18 + 5\sqrt{10}}{2}$

(iii) $2 - \sqrt{3}$ (iv) $5 + 2\sqrt{6}$

(v) $5(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{30})$ (vi) $\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 8

(1)	$x = 6\,,$	$x = 1\,,$	$x = 4\,,$	$x = -3\,,$
(2)	$x = -1\,,$	$x = -2\,,$	$x = -3\,,$	$x = \dfrac{2}{3}\,,$
(3)	$x = 3\,,$	$x = 3\,,$	$x = 2\,,$	$x = \dfrac{1}{2}\,,$
(4)	$x = 16\,,$	$x = 2\,,$	$x = 5\,,$	$x = 10\,,$
(5)	$x = 2\,,$	$x = 0\,,$	$x = \dfrac{1}{3}\,,$	$x = 2\,,$
(6)	$x = 6\,,$	$x = 0\,,$	$x = \dfrac{2}{3}\,,$	$x = -\dfrac{1}{2}\,,$
(7)	$x = 81\,,$	$x = \dfrac{1}{1000}\,.$		

Aufgabe 9

(a) $A = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)\,,$ (b) $B = (-\infty, -3 - \varepsilon) \;\cup\; (-3 + \varepsilon, \infty)\,,$

(c) Es sei $C := \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 1| \leqslant \varepsilon\}$. Wir wollen dies als Vereinigung von Intervallen schreiben. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| \leqslant \varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad -\varepsilon \leqslant x^2 - 1 \leqslant \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \varepsilon \leqslant x^2 \leqslant 1 + \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{1 - \varepsilon} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{1 + \varepsilon} \\ &\Longleftrightarrow \quad (-\sqrt{1 + \varepsilon} \leqslant x \leqslant -\sqrt{1 - \varepsilon}) \;\vee\; (\sqrt{1 - \varepsilon} \leqslant x \leqslant \sqrt{1 + \varepsilon}) \end{aligned}$$

also

$$C = [-\sqrt{1 + \varepsilon}, -\sqrt{1 - \varepsilon}] \;\cup\; [\sqrt{1 - \varepsilon}, \sqrt{1 + \varepsilon}]\,.$$

(d) Wie in (c) erhält man

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{R} \setminus \Big(\mathbb{R} \setminus D\Big) \\ &= \mathbb{R} \setminus \Big(\{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 2| < \varepsilon\}\Big) \\ &= \mathbb{R} \setminus \Big((-\sqrt{2+\varepsilon}, -\sqrt{2-\varepsilon}) \cup (\sqrt{2-\varepsilon}, \sqrt{2+\varepsilon})\Big) \\ &= (-\infty, -\sqrt{2+\varepsilon}] \ \cup \ [-\sqrt{2-\varepsilon}, \sqrt{2-\varepsilon}] \ \cup \ [\sqrt{2+\varepsilon}, \infty)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 10

(a) *Voraussetzung:* Es seien $a, b \in (0,\infty)$ und $r, s \in \mathbb{Q}$, wobei $r = \frac{p_1}{q_1}$ und $s = \frac{p_2}{q_2}$ mit $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ und $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$.

Behauptung (1): $a^s \cdot a^r = a^{s+r}$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} a^s \cdot a^r &= (a^{\frac{1}{q_1}})^{p_1}(a^{\frac{1}{q_2}})^{p_2} = (a^{\frac{q_2}{q_1 q_2}})^{p_1}(a^{\frac{q_1}{q_1 q_2}})^{p_2} = (a^{\frac{1}{q_1 q_2}})^{p_1 q_2}(a^{\frac{1}{q_1 q_2}})^{q_1 p_2} \\ &= (a^{\frac{1}{q_1 q_2}})^{p_1 q_2 + q_1 p_2} = a^{\frac{p_1 q_2 + q_1 p_2}{q_1 q_2}} = a^{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}} = a^{r+s}. \end{aligned}$$

□

Behauptung (2): $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$.

Beweis: Es gilt

$$a^r \cdot b^r = (a^{\frac{1}{q_1}})^{p_1}(b^{\frac{1}{q_1}})^{p_1} = (a^{\frac{1}{q_1}} \cdot b^{\frac{1}{q_1}})^{p_1} = \Big((a\cdot b)^{\frac{1}{q_1}}\Big)^{p_1} = (a \cdot b)^r.$$

□

Behauptung (3): $(a^r)^s = a^{r\cdot s}$.

Beweis: Es gilt

$$(a^r)^s = \Big(\Big((a^{\frac{1}{q_1}})^{p_1}\Big)^{\frac{1}{q_2}}\Big)^{p_2} = \Big((a^{\frac{1}{q_1}})^{\frac{1}{q_2}}\Big)^{p_1 p_2} = (a^{\frac{1}{q_1 q_2}})^{p_1 p_2} = a^{rs}.$$

□

(b) *Behauptung:* Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

Beweis: Es gilt

$$|a+b| = \begin{cases} a+b, & a \geqslant -b \\ -a-b, & a < -b \end{cases},$$

was die folgende Fallunterscheidung suggeriert:

1.Fall: Sei $a \geqslant -b$. Dann gilt $|a+b| = a+b \leqslant |a| + |b|$.

2.Fall: Sei $a < -b$. Dann gilt $|a+b| = -a-b \leqslant |a| - b \leqslant |a| + |b|$. □

(c) *Behauptung:* Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

Beweis: Es gilt

$$|a| = |a - b + b| \leqslant |a-b| + |b| \ \text{ und } \ |b| = |b - a + a| \leqslant |b-a| + |a| = |a-b| + |a|\,.$$

Daraus folgt

$$|a| - |b| \leqslant |a - b| \quad \text{und} \quad |b| - |a| \leqslant |a - b|$$

und damit

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|.$$

$\square$

(d) *Behauptung:* Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$$

und es gilt “$>$” wenn $a, b \neq 0$.

Beweis: Es gilt

$$a^2 - ab + b^2 = \frac{a^2}{2} - ab + \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \geqslant 0\,,$$

denn Quadrate sind immer nicht-negativ. Offensichtlich gilt auch “$>$” wenn $a \neq 0$ oder $b \neq 0$. $\square$