KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
M. Sc. Luca Haardt

WS 2023/2024
11.10.2023

Mathematischer Vorkurs

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 11

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und die Gleichung

(1) $$ax^2 + bx + c = d\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,,$$

gegeben. Stellen Sie eine quadratische Gleichung der Form

(2) $$x^2 + px + q = 0\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,,$$

mit $p, q \in \mathbb{R}$ so auf, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x \text{ ist eine Lösung von (1)} \iff x \text{ ist eine Lösung von (2)}\,.$$

Aufgabe 12

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der angegebenen quadratischen Gleichung bzw. Ungleichung. In jedem Aufgabenteil ist der Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

(a) $x^2 - x - 2 = 0\,,$

(b) $x^2 - 7x + 12 = 0\,,$

(c) $4x^2 - 8x + 3 = 0\,,$

(d) $-x^2 - 4x + 5 = 0\,,$

(e) $x^2 + 6x + 9 \geq 0\,,$

(f) $-2x^2 + 16x - 32 \geq 0\,,$

(g) $-x^2 - 14x - 49 < 0\,,$

(h) $x^2 + 2x + 10 \leq 0\,,$

(i) $-3x^2 + 18x - 36 < 0\,,$

(j) $-x^2 + 4x + 21 > 0\,.$

Hinweis: Verwenden Sie zum Faktorisieren gegebenenfalls die Technik des quadratischen Ergänzens anstelle der „p,q-“ oder „Mitternachtsformel“.

Aufgabe 13

Es seien $p, q \in \mathbb{R}$ und die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,,$$

gegeben. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\mathbb{L} = \emptyset$ genau dann, wenn $\dfrac{p^2}{4} - q < 0\,,$

(b) $\mathbb{L}$ hat genau dann ein Element, wenn $\dfrac{p^2}{4} - q = 0\,,$

(c) $\mathbb{L}$ hat genau dann zwei Elemente, wenn $\dfrac{p^2}{4} - q > 0\,.$

Aufgabe 14

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichungen.

(i) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x} + 1 = 0\,, \qquad \mathbb{D} = [0, \infty)\,,$

(ii) $x + \sqrt{x^2 - 25} = 25\,, \qquad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geqslant 5\}\,,$

(iii) $9\sqrt{5x+2} = 25 + 4\sqrt{5x+2}\,, \qquad \mathbb{D} = [-\frac{2}{5}, \infty)\,,$

(iv) $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x+8}\,, \qquad \mathbb{D} = [0, \infty)\,.$

(b) Gegeben sei der mathematische Ausdruck

$$\sqrt{x + 2 + \sqrt{2x+7}} = 4\,.$$

Bestimmen Sie die Menge $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass dieser Ausdruck genau dann nach Vorlesung definiert ist, wenn $x \in \mathbb{D}$ gilt. Bestimmen Sie danach die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung.

Aufgabe 15

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Bruchungleichungen:

(i) $\dfrac{1}{x-3} \leq 1, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}\,,$

(ii) $\dfrac{3}{2x-4} \leq 2, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}\,,$

(iii) $\dfrac{x-1}{x+1} < 1, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,,$

(iv) $\dfrac{x-3}{x+1} > \dfrac{x+2}{x-1}, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\,.$

(b) Bestimmen Sie jeweils für den angebenen mathematischen Ausdruck die Menge $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass der Ausdruck genau dann nach Vorlesung definiert ist, wenn $x \in \mathbb{D}$ gilt. Bestimmen Sie danach jeweils die Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

(i) $\dfrac{2x+1}{2x-2} + \dfrac{2x-3}{3x-3} \geq 1\,,$

(ii) $\dfrac{3(4x-1)}{x-1} \geq 12 - \dfrac{2(4x-3)}{x-1}\,.$

Aufgabe 16

(a) Bestimmen Sie die Lösungesmengen der folgenden Betragsungleichungen.

(i) $|2x-3| < x, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,,$

(ii) $|x-2| < 3, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,,$

(iii) $|2x-3| < x+3, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,,$

(iv) $|x^2 - 4x| > 0, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,,$

(v) $|2x-1| > |x-1|, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,,$

(vi) $\dfrac{|x-1|}{2x+2} \geq 1\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

(b) Bestimmen Sie jeweils für den angebenen mathematischen Ausdruck die Menge $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass der Ausdruck genau dann nach Vorlesung definiert ist, wenn $x \in \mathbb{D}$ gilt. Bestimmen Sie danach jeweils die Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

(i) $|x+2| > |x-5|\,,$

(ii) $\dfrac{2x+3}{|x+4|} \leq 1\,.$