

Mathematischer Vorkurs

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 17

Schreiben Sie jeweils f als Verkettung von zwei Funktionen und bestimmen Sie das Bild von f .

(a) $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{\log(x)},$ (b) $f : \mathbb{R} \setminus \{7^{\frac{1}{3}}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{7}{x^3 - 7},$

(c) $f : [-3, 22] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{5 - \sqrt{x + 3}},$ (d) $f : (-\infty, 4) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(16 - 2^x).$

Aufgabe 18

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des \mathbb{R}^2 :

(a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\},$

(b) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 5\},$

(c) $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, x = 5\},$

(d) $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq |x|\},$

(e) $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq |y|\},$

(f) $F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq 4\},$

(g) $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, |x - y| < 1\},$ (h) $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < y < 1, |x + y| \leq 1\},$

(i) $I := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y^2\},$

(j) $J := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y^2 < 4\}.$

Aufgabe 19

Untersuchen Sie jeweils f auf Monotonie und Symmetrieeigenschaften. Skizzieren Sie den Kurvenverlauf.

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1},$

(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x^2,$

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x - 5,$

(d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -x^3,$

(e) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x - 1},$

(f) $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x + 1),$

(g) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{-x^2}.$

Aufgabe 20

Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv sind, bestimmen Sie ggf. die Umkehrfunktion und skizzieren Sie ihren Graphen.

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2 - 3x,$
- (b) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x+1}{x-1},$
- (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$
- (d) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + \log(x),$
- (e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3,$
- (f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3x^6 + 9x^4 - e^{x^2}.$

Aufgabe 21

Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und $f : X \rightarrow Y$ eine reelle, strikt wachsende Funktion. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

Bemerkung: Die gleiche Aussage gilt natürlich für strikt fallende Funktionen.