KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
M. Sc. Luca Haardt

WS 2023/2024
12.10.2023

Mathematischer Vorkurs

Lösungsvorschläge zum 4. Aufgabenblatt

Aufgabe 17

(a) Die Funktion $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{\log(x)}$ kann man als Verkettung $g \circ h$ von

$$h : [1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \log(x) \;\text{ und }\; g : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

geschrieben werden. Außerdem

$$f([1,\infty)) = g(h([1,\infty))) = g([0,\infty)) = [0,\infty).$$

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{7^{\frac{1}{3}}\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{7}{x^3-7}$ kann man als Verkettung $g \circ h$ von

$$h : \mathbb{R} \setminus \{7^{\frac{1}{3}}\} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^3 - 7 \;\text{ und }\; g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{7}{x}$$

schreiben. Außerdem

$$f(\mathbb{R} \setminus \{7^{\frac{1}{3}}\}) = g(h(\mathbb{R} \setminus \{7^{\frac{1}{3}}\})) = g(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) Die Funktion $f : [-3,22] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{5 - \sqrt{x+3}}$ kann man als Verkettung $g \circ h$ von

$$h : [-3,22] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \sqrt{x+3} \;\text{ und }\; g : [0,5] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{5-x}.$$

Außerdem

$$f([-3,22]) = g(h([-3,22])) = g([0,5]) = [0,\sqrt{5}].$$

(d) Die Funktion $f : (-\infty,4) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \log(16 - 2^x)$ kann man als Verkettung $g \circ h$ von

$$h : (-\infty,4) \to \mathbb{R}, \quad h(x) = 2^x \;\text{ und }\; g : (0,16) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \log(16-x)$$

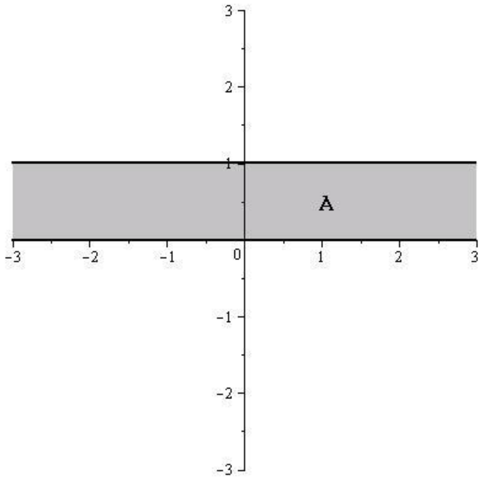
schreiben. Außerdem

$$f((-\infty,4)) = g(h(-\infty,4)) = g((0,16)) = (-\infty,\log(16)).$$

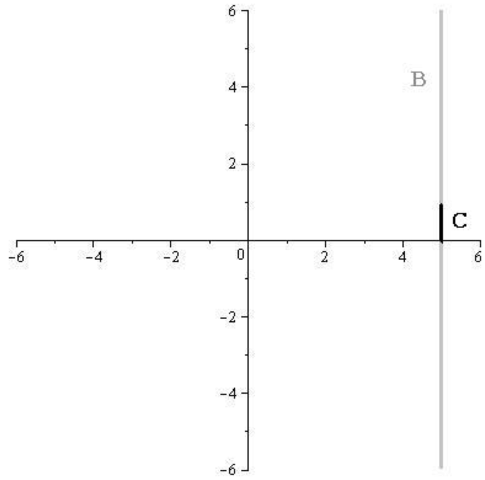
— bitte wenden —

Aufgabe 18

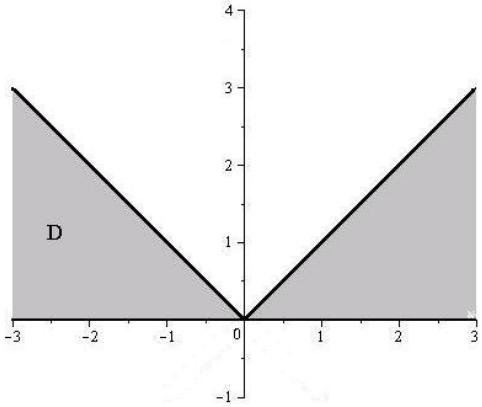
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}$:



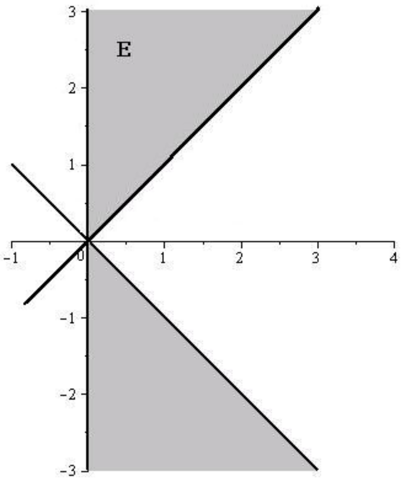
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 5\}$ und
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, x = 5\}$:



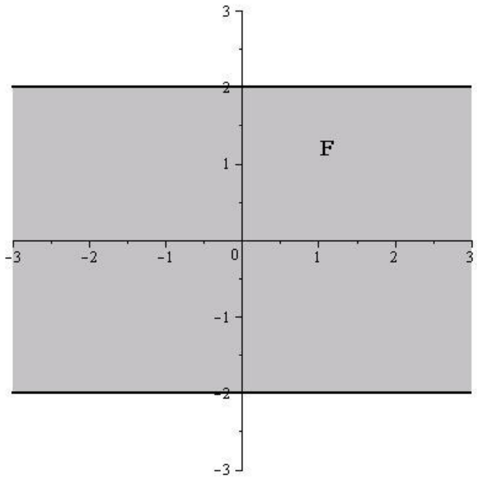
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq |x|\}$:



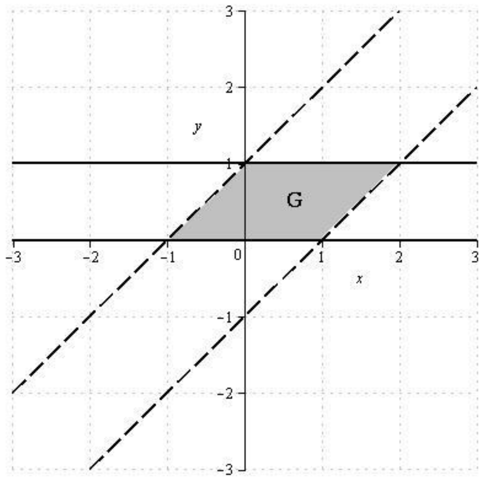
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq |y|\}$:



$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq 4\}$:

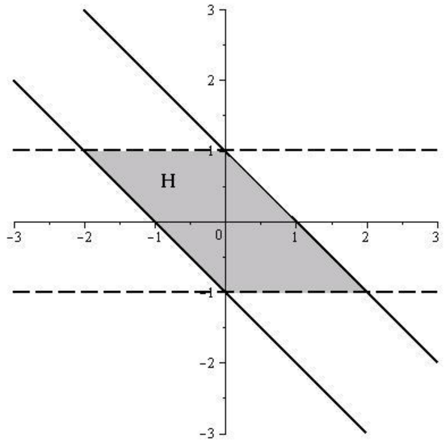


$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, |x - y| < 1\}$

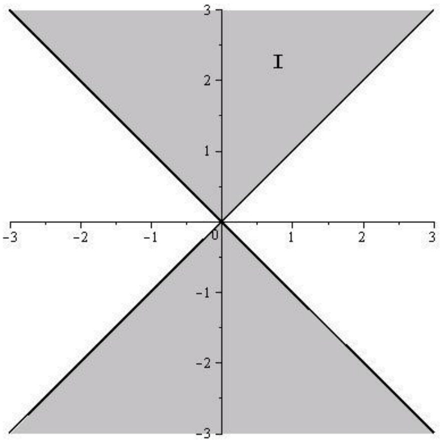


— bitte wenden —

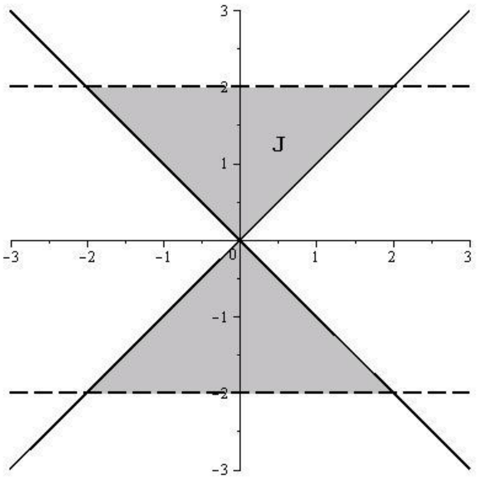
$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < y < 1, |x+y| \leq 1\}$:



$I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y^2\}$:



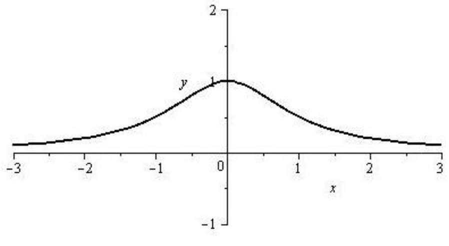
$J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y^2 < 4\}$:



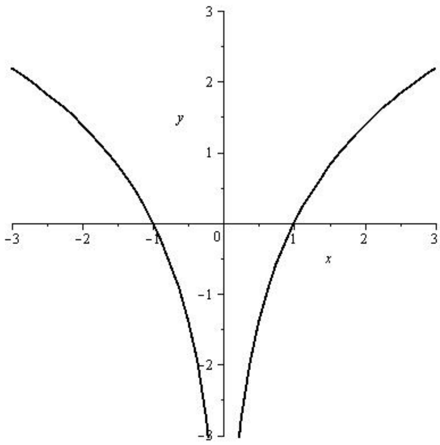
Aufgabe 19

Falls bei einer Teilaufgabe keine Skizze angegeben sein sollte, wird davon ausgegangen, dass der Leser das selbst ohne Mühe erledigen kann.

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ ist gerade und nicht monoton.



(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \ln x^2$ ist gerade und nicht monoton.



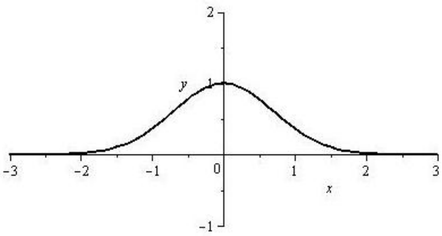
(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x-5$ ist weder gerade noch ungerade und streng monoton wachsend.

(d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto -x^3$ ist ungerade und streng monoton fallend.

(e) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ ist weder gerade noch ungerade und nicht monoton. Das Schaubild erhält man durch Verschiebung des Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{1}{x}$ um 1 nach rechts.

(f) Die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \ln(x+1)$ ist weder gerade noch ungerade und streng monoton wachsend. Das Schaubild erhält man durch Verschiebung von Graph(log) um 1 nach links.

(g) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto e^{-x^2}$ ist gerade und nicht monoton.



Aufgabe 20

Wir werden den Beweis für Injektivität und die Berechnung der Umkehrfunktion nur zweimal exemplarisch vorführen. Die Vorgehensweise sollte dann mit Erfolg auf die restlichen Aufgaben angewendet werden können.

(a) *Behauptung:* Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 2-3x$ ist injektiv und besitzt die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{2}{3} - \frac{x}{3}$.

Beweis: Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann folgt

$$f(x_1) = f(x_2) \iff 2 - 3x_1 = 2 - 3x_2 \iff x_1 = x_2$$

— bitte wenden —

und damit ist f injektiv. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$y = 2 - 3x \iff x = \frac{2}{3} - \frac{y}{3}.$$

Einerseits haben wir soeben gezeigt, dass $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und anderseits können wir die Umkehrfunktion nun einfach ablesen, nämlich

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2}{3} - \frac{x}{3}.$$

$\square$

(b) *Behauptung:* Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ ist injektiv und besitzt die Umkehrfunktion f (also sich selbst!).

Beweis: Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $x_1 \neq x_2$. Dann gilt

$$f(x_1) = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{x_1 - 1 + 2}{x_1 - 1} = 1 + \frac{2}{x_1 - 1} \neq 1 + \frac{2}{x_2 - 1} = f(x_2)$$

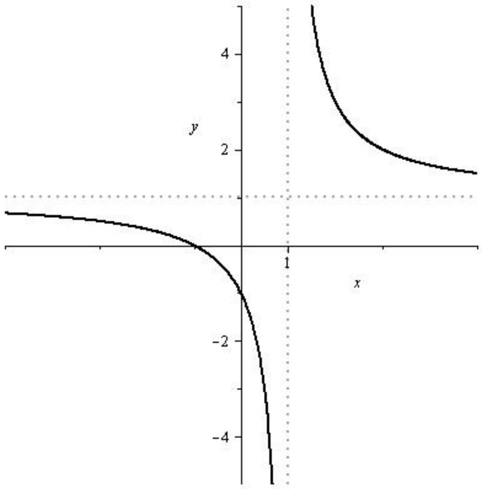
und somit ist f injektiv.
Da für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x + 1 \neq x - 1$ folgt $1 \notin f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$. Für $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$y = \frac{x+1}{x-1} \iff y - 1 = \frac{2}{x-1} \iff x = 1 + \frac{2}{y-1} = \frac{y+1}{y-1}.$$

Also gilt $f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad x \mapsto \frac{x+1}{x-1}.$$

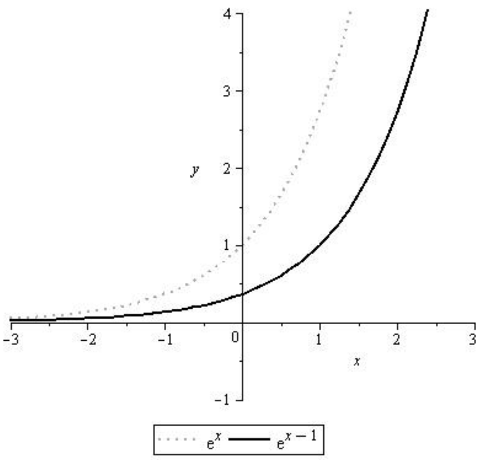
$\square$



(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$ ist nicht injektiv, denn $1 \neq -1$ und $f(1) = 0 = f(-1)$.

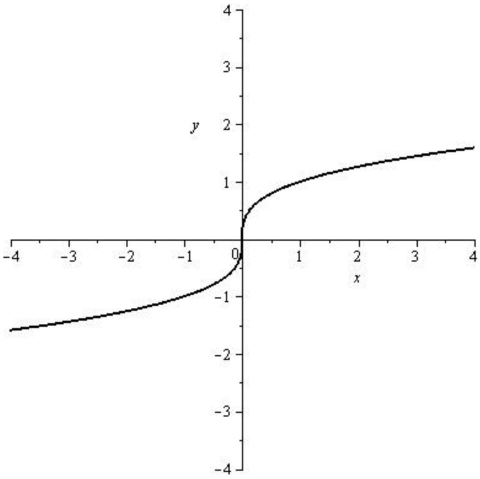
(d) Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 1 + \log(x)$ ist injektiv und besitzt die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty), \quad x \mapsto e^{x-1}.$$



(e) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$ ist injektiv und besitzt die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \in [0, \infty), \\ -\sqrt[3]{-x}, & x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$



(f) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 3x^6 + 9x^4 - \mathrm{e}^{x^2}$ ist nicht injektiv, denn $1 \neq -1$ und $f(1) = 12 - \mathrm{e} = f(-1)$.

— bitte wenden —

Aufgabe 21

Voraussetzung: Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und $f : X \to Y$ eine reelle, strikt wachsende Funktion.

Behauptung: f ist injektiv.

Beweis: Es seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Da $X \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$x < y \ \vee \ x > y$$

Im Fall $x < y$ folgt mit der strikten Monotonie $f(x) < f(y)$ und daher $f(x) \neq f(y)$. Im Fall $x > y$ folgt $f(x) > f(y)$ und daher $f(x) \neq f(y)$. Insgesamt gilt also

$$x \neq y \iff x < y \ \vee \ x > y \ \Rightarrow \ f(x) \neq f(y)$$

und damit ist f injektiv. $\square$