

## Mathematischer Vorkurs

### 5. Aufgabenblatt

#### Aufgabe 22

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine lineare Funktion. Zeigen Sie:  
 Es existiert genau ein  $b \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) = bx$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Aufgabe 23

(a) Machen Sie sich die folgenden Gleichungen, gültig für alle  $x \in \mathbb{R}$ , anschaulich klar und beweisen Sie diese unter Verwendung der Additionstheoreme.

- |  |  |
|--|--|
| (i) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x),$ | (ii) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x),$ |
| (iii) $\sin(x + \pi) = -\sin(x),$        | (iv) $\cos(x + \pi) = -\cos(x).$           |

(b) Beweisen Sie unter Verwendung der Identität  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  und der Additionstheoreme die folgenden Gleichungen, gültig für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

- |   |   |
|---|---|
| (i) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x),$ | (ii) $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)),$ |
| (iii) $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x),$   | (iv) $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$ |

#### Aufgabe 24

Vervollständigen Sie die Tabelle. Hierbei steht Bm für Bogenmaß.

$x$ in $^\circ$	$x$ im Bm	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$0^\circ$				
$30^\circ$				
	$\frac{\pi}{4}$			
	$\frac{\pi}{3}$			
$90^\circ$				
$120^\circ$				
$135^\circ$				
$150^\circ$				
	$\pi$			

## Aufgabe 25

Es seien

$$X = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\}$$

der Definitionsbereich des Tangens aus der Vorlesung und  $x, y \in X$  mit

$$x + y \in X \quad \text{und} \quad \tan(x) \cdot \tan(y) \neq 1.$$

Zeigen Sie

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}.$$

## Aufgabe 26

Führen Sie jeweils eine Polynomdivision für die folgenden Paare an Polynomfunktionen aus.

- (i)  $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1),$
- (ii)  $(x^3 - 10x^2 + 29x - 20) : (x - 5),$
- (iii)  $(x^3 - x^2 - 7x + 5) : (x + 3),$
- (iv)  $(3x^4 + x^3 - 13x^2 + x + 5) : (x^2 + 2x - 1).$

## Aufgabe 27

Bestimmen Sie jeweils alle reellen Nullstellen der folgenden Polynomfunktion  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (i)  $p(x) = x^2 - 1,$
- (ii)  $p(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12,$
- (iii)  $p(x) = x^3 + 2x^2 - 19x - 20,$
- (iv)  $p(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4,$
- (v)  $p(x) = x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 9x^2,$
- (vi)  $p(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8.$