Mathematischer Vorkurs

Lösungsvorschläge zum 5. Aufgabenblatt

Aufgabe 22

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion.

Behauptung: Es existiert genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = bx$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt aufgrund der Linearität von f, dass

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1).$$

Setzen wir $b = f(1)$ ist die Existenz gezeigt. Wenden wir uns der Eindeutigkeit zu. Sei $\tilde{b} \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \tilde{b}x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt insbesondere

$$\tilde{b} = \tilde{b} \cdot 1 = f(1) = b$$

und damit haben wir die Eindeutigkeit gezeigt. □

Aufgabe 23

(a)

(i) *Behauptung:* Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.

Anschauliche Erläuterung: Graph(cos) entsteht aus Graph(sin) durch eine Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links.

Beweis: Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \cos(x) \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = \cos(x)\,.$$

□

(ii) *Behauptung:* Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$.

Anschauliche Erläuterung: Verschiebt man Graph(cos) um $\frac{\pi}{2}$ nach links und spiegelt das an der x-Achse, so erhält man Graph(sin).

Beweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)\,.$$

□

(iii) *Behauptung:* Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$.

Anschauliche Erläuterung: Verschieben von Graph(sin) um π nach links ergibt Graph($-$ sin).

Beweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x+\pi) = \sin(x)\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \cos(x)\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = -\sin(x)\,.$$

$\square$

(iv) *Behauptung:* Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$.

Beweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x+\pi) = \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x).$$

$\square$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$.

(i) $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ durch Additionstheorem.

(ii) Durch Additiontheorem und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ gilt

$$\frac{1}{2}(1+\cos(2x)) = \frac{1}{2}(1+\cos^2(x) - \sin^2(x)) = \frac{1}{2}(1+\cos^2(x) - (1-\cos^2(x)) = \cos^2(x).$$

(iii) Mit Additionstheorem gilt

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

(iv) Durch Additionstheorem und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ gilt

$$\frac{1}{2}(1-\cos(2x)) = \frac{1}{2}(1-\cos^2(x) + \sin^2(x)) = \frac{1}{2}(\sin^2(x) + \sin^2(x)) = \sin^2(x).$$

Aufgabe 24

x in °	x im Bm	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0

— bitte wenden —

Aufgabe 25

Voraussetzung: Es seien

$$X = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\}$$

und $x, y \in X$ mit $x + y \in X$ und $\tan(x)\tan(y) \neq 1$.

Behauptung: Für $x \in X$ ist der mathematische Ausdruck $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und daher der Tangens definiert. Es gilt

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}\,.$$

Beweis: Da $x, y \in X$, gilt $\cos(x), \cos(y) \neq 0$. Dann folgt mit Additionstheoremen für Sinus und Cosinus

$$\begin{aligned}\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} &= \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} \\ &= \frac{1}{\cos(x)\cos(y)} \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\frac{\sin(y)}{\cos(y)}} \\ &= \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \tan(x)\tan(y)} = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: An der Rechnung sieht man, dass $x + y \in X$ schon aus den anderen Annahmen folgt. □

Aufgabe 26

(i) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)\,,$

(ii) $(x^3 - 10x^2 + 29x - 20) = (x-5)(x^2 - 5x + 4)\,,$

(iii) $(x^3 - x^2 - 7x + 5) = (x+3)(x^2 - 4x + 5) - 10\,,$

(iv) $(3x^4 + x^3 - 13x^2 + x + 5) = (x^2 + 2x - 1)(3x^2 - 5x) - 4x + 5\,.$

Aufgabe 27

(i) $\{-1, 1\}$ durch z.B. binomische Formel.

(ii) $\{-3, 2, 2\}$ durch z.B. "erraten" der NS $x = 2$ und dann Polynomdivision, sodass

$$p(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x^2 + x - 6)$$

und dann NS von $(x^2 + x - 6)$ noch bestimmen durch z.B. p, q-Formel.

(iii) $\{-1, -5, 4\}$ durch z.B. "erraten" der NS $x = -1$ und dann Polynomdivision, sodass

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 19x - 20 = (x+1)(x^2 + x - 20)$$

und dann NS von $(x^2 + x - 20)$ noch bestimmen durch z.B. p, q-Formel.

(iv) $\{\frac{1}{2}, -2, 2\}$ durch z.B. "erraten" der NS $x = 2$ und dann Polynomdivision, sodass

$$p(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4 = (x-2)(2x^2 + 3x - 2)$$

und dann NS von $(2x^2 + 3x - 2)$ noch bestimmen durch z.B. p, q-Formel.

(v) $\{0, 0, 1\}$ durch zuerst ausklammern von x^2, sodass

$$p(x) = x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 9x^2 = x^2(x^3 - 6x^2 + 14x - 9x).$$

Dann "erraten" der NS $x = 1$ von $(x^3 - 6x^2 + 14x - 9x)$, sodass mit Polynomdivision

$$(x^3 - 6x^2 + 14x - 9x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 9)$$

ist. Und zum Schluss erkennen, dass $(x^2 - 5x + 9)$ keine reellen NS hat, z.B. durch p, q-Formel.

(vi) $\{-4, -1, 1, 2\}$ durch z.B. "erraten" der NS $x = 1$ und dann Polynomdivision, sodass

$$p(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8 = (x - 1)(x^3 + 3x^2 - 6x - 8).$$

Dann "erraten" der NS $x = -1$ von $(x^3 + 3x^2 - 6x - 8)$, sodass mit Polynomdivision

$$(x^3 + 3x^2 - 6x - 8) = (x + 1)(x^2 + 2x - 8)$$

folgt. Zum Schluss dann noch die NS von $(x^2 + 2x - 8)$ bestimmen durch z.B. p, q-Formel.