Vorkurs Mathematik

Vorbereitung auf das Studium der Mathematik

Herbst 2023

Skript

Institut für Analysis

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dieser Vorkurs soll dazu dienen, den Start in das Mathematikstudium zu erleichtern durch Wiederholung wichtiger Grundlagen aus dem Schulstoff. Neben Rechentechniken soll dabei auch das Formulieren mathematischer Sachverhalte geübt werden. Hier spielt insbesondere die korrekte Durchführung mathematischer Beweise eine für das Studium zentrale Rolle.

Begleitend zum Kurs werden Übungsaufgaben angeboten, da für das Verständnis eine eigenständige Beschäftigung mit dem Stoff unumgänglich ist.

Eine erste Version dieses Skriptums wurde im Jahr 2009 von Johanna Dettweiler für das Institut für Analysis erstellt und später von Alexander Ullmann und Andreas Bolleyer erweitert. Im Jahr 2016 wurde es von Andreas Hirsch überarbeitet und erweitert und im Jahr 2020 wurde das letzte Kapitel von Sebastian Ohrem ergänzt. Für die vorliegende Version wurden einige kleine Änderungen vorgenommen.

Karlsruhe, 9. Oktober 2023 — Luca Haardt

1 Grundlagen

1.1 Aussagen und logische Verknüpfungen

Wenn man sich über Mathematik verständigen will, ist es unumgänglich zu verstehen, was eine mathematische Aussage ist und wie sie verknüpft werden kann. Erst dann kann man verstehen, was zum Beispiel ein mathematischer Beweis ist.

Definition 1.1.1 (*Mathematische Aussage*)
Eine **Aussage** *ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.*

Beispiele:

(1) Mathematische Aussagen sind

- Dienstag ist ein Wochentag.
- Dienstag ist Montag.
- 2=1.
- Wenn $1 < 0$ gilt, dann ist $2 = 3$.

(2) **Keine** mathematischen Aussagen sind

- Äpfel und Birnen
- $x^2 - 1$.
- Regnet es?

Wir benötigen natürlich die Möglichkeit mathematische Aussagen in eine Relation zueinander zu stellen oder zu verknüpfen. Wir werden daher folgende **logische Operationen** für Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ verwenden:

Bezeichnung	Symbol	Bedeutung der Verknüpfung
1. Negation	$\neg\mathcal{A}$	nicht $\mathcal{A}$
2. Konjunktion (und)	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$
3. Disjunktion (oder)	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$
4. Implikation (Folgerung)	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$
5. Äquivalenz (genau dann, wenn)	$\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind äquivalent, d.h. es gelten $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$

Sie werden definiert über Wahrheitstafeln (dabei steht „w“ für wahr und „f“ für falsch):

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Bemerkung:

(1) Das logische „oder“ ist nicht-ausschließend, also nicht zu verwechseln mit „entweder ... oder“.

(2) Ist $\mathcal{A}$ falsch, so ist die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ stets wahr („ex falso quodlibet“)! Zum Beispiel gilt $1 < 0 \Rightarrow 2 = 3$.

(3) Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei mathematische Aussagen und es gelte $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Dann heißt $\mathcal{A}$ **hinreichende Bedingung für** $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}$ **notwendige Bedingung für** $\mathcal{A}$.

Definition 1.1.2 (Tautologisch Äquivalent)
Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Aussagen, die die gleichen Wahrheitstafeln erzeugen, so heißen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ tautologisch äquivalent und schreiben $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Beispiele:

(1) $\neg\neg\mathcal{A} := \neg(\neg\mathcal{A}) \equiv \mathcal{A}$,

(2) $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \big(\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}\big)$,

(3) $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \big(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}\big)$, (4) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \equiv (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$,

(5) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \equiv (\neg A \vee \mathcal{B})$, (6) $(\mathcal{A} \iff \mathcal{B}) \equiv \big((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})\big)$.

(7) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \equiv (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$, (8) $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$.

Für Objekte a und b bedeutet dabei $a := b$, dass a durch b definiert wird, d. h. a ist ein neuer Name für b. Die Schreibweise $a = b$ bedeutet, dass die Objekte gleich sind, d. h. a und b verschiedene Darstellungen desselben Objekts sind.

1.2 Mengen

Definition 1.2.1 (*„Naiver“ Mengenbegriff nach Cantor*)
Eine **Menge** *ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Für jedes Objekt muss eindeutig feststellbar sein, ob es zu der Menge gehört oder nicht.*

Mengen werden oft mit Großbuchstaben $A, B, C, \ldots$ und Objekte mit kleinen Buchstaben $a, b, c, \ldots$ bezeichnet.

Bemerkung: Der Zusatz „naiv“ kommt daher, dass nicht alle Zusammenfassungen sinnvoll möglich sind. Zum Beispiel führen Konstruktionen wie „die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“ auf Widersprüche. Eine Präzisierung des Mengenbegriffs würde den Rahmen des Vorkurses sprengen und für unsere Zwecke ist die obige Definition ausreichend. Insbesondere treten für alle im Folgenden verwendeten Mengen keine Widersprüche auf.

Definition 1.2.2 (*Element, Teil- und Obermenge*)
Es seien A und B Mengen.

(a) Es sei a ein Objekt. Ist a in A enthalten, nennen wir a ein **Element** *von A.*

$$\textit{Notation:} \quad a \in A.$$

Ist a nicht in A enthalten, schreiben wir $a \notin A$.

(b) Gilt für jedes $a \in A$, dass $a \in B$, sagen wir „A ist **Teilmenge** *von B“ und „B ist* **Obermenge** *von A“.*

$$\textit{Notation:} \quad A \subseteq B.$$

Ist A keine Teilmenge von B, schreiben wir $A \nsubseteq B$.

(c) *Sei $A \subseteq B$. Gibt es ein $b \in B$, welches nicht in A enthalten ist, sagen wir „A ist eine* **echte Teilmenge** *von B“ und „B ist eine* **echte Obermenge** *von A“.*

$$\textit{Notation:}\quad A \subsetneq B.$$

(d) *Wir sagen, dass A und B gleich sind, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gelten.*

$$\textit{Notation:}\quad A = B.$$

Bemerkung: Oft wird auch die Schreibweise $A \subset B$ statt $A \subseteq B$ verwendet.

Beispiele zur Darstellung von Mengen:

Die Elemente von Mengen werden durch geschweifte Klammern $\{\dots\}$ zusammengefasst. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten.

(1) **Aufzählende Darstellung:** Die Menge A der Buchstaben des Namens „Paula“, mit Unterscheidung großer und kleiner Buchstaben, ist

$$A = \{P, a, u, l, a\} = \{P, a, u, l\} = \{l, P, u, a\}.$$

(2) **Beschreibende Darstellung:** Es seien X eine Menge und $\mathcal{E}(x)$ ein Ausdruck, der für jedes $x \in X$ eine Aussage darstellt. Dann ist

$$E = \{x \in X \mid \mathcal{E}(x) \text{ ist wahr }\} = \{x \in X \mid \mathcal{E}(x)\} = \{x \in X : \mathcal{E}(x)\}$$

die Menge aller $x \in X$, welche die **Eigenschaft** $\mathcal{E}$ besitzen.

Beispiel: Es sei A wie im Beispiel aus (1).

$$B = \{x \in A \mid x \text{ ist ein Großbuchstabe}\} = \{P\}.$$

Dabei ist zu beachten, dass P und $\{P\}$ sehr verschiedene Objekte sind. Bei P handelt es sich um einen Buchstaben und bei $\{P\}$ um die Menge, die nur den Buchstaben P als Element enthält.

Die **leere Menge** $\emptyset$ ist die Menge, die keine Elemente enthält.

Vorsicht: Die Menge, die die leere Menge als Element enthält, ist selbst nicht leer, d. h. es gilt $\{\emptyset\} \neq \emptyset$.

Definition 1.2.3 (*geordnetes Paar, Tripel*)
Das **geordnete Paar** (a, b) *ist eine Zusammenfassung zweier Objekte a, b zu einer Einheit. Zwei geordnete Paare (a, b) und (c, d) sind genau dann gleich, wenn sowohl ihre ersten als auch ihre zweiten Komponenten gleich sind, d.h. wenn $a = c$ und $b = d$ gelten. Ähnlich ist ein* **Tripel** (a, b, c) *eine Zusammenfassung von drei Objekten a, b, c. Zwei Tripel (a, b, c) und (d, e, f) sind genau dann gleich, wenn $a = d$, $b = e$ sowie $c = f$ sind.*

Definition 1.2.4 (*Vereinigung, Schnitt, Komplement und kartesisches Produkt*)
Es seien A und B Mengen. Wir definieren

(a) *die* **Vereinigung** *von A und B durch*

$$A \cup B \coloneqq \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\},$$

(b) *den* **Schnitt** *von A und B durch*

$$A \cap B \coloneqq \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\},$$

(c) *das* **relative Komplement** *von B in A durch*

$$A \setminus B \coloneqq \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\},$$

(d) *das* **kartesisches Produkt** *von A und B durch*

$$A \times B \coloneqq \{(a,b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Bemerkung:

(1) Beim relativen Komplement muss die Menge B keine Teilmenge von A sein.

(2) Falls $A \cap B = \emptyset$ gilt, heißen A und B **disjunkt**.

Beispiel: Es seien a, b, c, d paarweise verschiedene Objekte und $A = \{a, b, c\}$ sowie $B = \{a, c, d\}$. Dann gelten:

(1) $A \nsubseteq B, \qquad B \setminus \{d\} \subsetneq A.$

(2) $A \cup B = \{a, b, c, d\}, \qquad A \cap B = \{a, c\}, \qquad A \setminus B = \{b\}, \qquad B \setminus A = \{d\}.$

1.3 Quantoren

Definition 1.3.1 (*Existenz- und Allquantor*)
Seien X eine Menge und $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft so, dass $\mathcal{E}(x)$ eine Aussage ist für jedes $x \in X$. Wir definieren

(a) *den* **Existenzquantor** *durch*

$$\exists x \in X : \mathcal{E}(x) \quad \textit{bedeutet: Es existiert ein } x \in X \textit{ so, dass } \mathcal{E}(x) \textit{ wahr ist},$$

(b) *den* **Allquantor** *durch*

$$\forall x \in X : \mathcal{E}(x) \quad \textit{bedeutet: Für alle } x \in X \textit{ gilt } \mathcal{E}(x)\,.$$

Beim Existenzquantor ist es zugelassen, dass es mehr als ein solches Element gibt. Für die Angabe, dass es genau ein Element mit der genannten Eigenschaft gibt schreiben wir $\exists!$ statt $\exists$.

Quantoren können „gestapelt“ werden, wobei von links nach rechts gelesen wird und es wichtig ist, die Reihenfolge zu beachten. Seien hierzu X, Y Mengen und $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft auf $X \times Y$, d. h. für jedes geordnete Paar $(x, y) \in X \times Y$ ist $\mathcal{E}(x, y)$ eine Aussage. Dann bedeutet $\forall x \in X \exists\, y \in Y : \mathcal{E}(x, y)$, dass es für jedes $x \in X$ ein $y \in Y$ gibt mit der Eigenschaft $\mathcal{E}(x, y)$. Dabei hängt im Allgemeinen y von x ab, d. h. für verschiedene $x \in X$ müssen verschiedene $y \in Y$ gewählt werden, damit $\mathcal{E}(x, y)$ gilt. Dagegen bedeutet $\exists y \in Y\ \forall x \in X : \mathcal{E}(x, y)$, dass es ein festes $y \in Y$ so gibt, dass $\mathcal{E}(x, y)$ für alle $x \in X$ gilt.

Beispiel: Seien X die Menge der Studierenden, die am Mathe-Vorkurs 2021 des KIT teilnehmen und Y die Menge der Themen des Vorkurses, sowie $\mathcal{E}(x, y)$ die Aussage „der Studierende x findet das Thema y einfach“. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\forall x \in X\ \exists\ y \in Y : \mathcal{E}(x, y) \\
&\qquad\qquad = \text{„Jeder Studierende findet mindestens ein Thema einfach“.} \\
&\exists y \in Y\ \forall x \in X : \mathcal{E}(x, y) \\
&\qquad\qquad = \text{„Es gibt ein Thema, das jeder Studierende einfach findet“.}
\end{aligned}$$

Für das Verneinen von Aussagen mit Quantoren gibt es eine einfache Regel: Die Existenzquantoren werden durch Allquantoren ersetzt und umgekehrt, ohne die Reihenfolge zu ändern, und die am Schluss stehende Aussage wird negiert. Zum Beispiel gilt

$$\neg\left(\forall x \in X\ \exists y \in Y\ \forall z \in Z : \mathcal{E}(x, y, z)\right) \equiv \exists x \in X\ \forall y \in Y\ \exists z \in Z : \neg\mathcal{E}(x, y, z)\,.$$

1.4 Die Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Wir gehen an dieser Stelle davon aus, dass die grundlegenden Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bekannt sind und werden daher nur informal an die wesentlichen Eigenschaften erinnern. Im Rahmen von fortführenden Vorlesungen werden zumindest teilweise auch eine stringente Konstruktion dieser Zahlenbereiche und die Herleitung der charakterisierenden Eigenschaften behandelt.

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$: Es gibt eine kleinste natürliche Zahl, und jede Zahl n hat einen Nachfolger $n + 1$; es gibt also keine größte natürliche Zahl. In $\mathbb{N}$ sind die Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ uneingeschränkt ausführbar, d.h. für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $a + b, a \cdot b \in \mathbb{N}$.
Außerdem setzen wir $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$: In $\mathbb{Z}$ besitzt die Gleichung $x + b = a$ ($a, b \in \mathbb{N}$, x unbekannt, a, b bekannt) in $\mathbb{Z}$ stets eine Lösung. In $\mathbb{Z}$ gibt es im Gegensatz zu $\mathbb{N}$ keine kleinste Zahl. In $\mathbb{Z}$ sind die Rechenoperationen $+, -$ und $\cdot$ uneingeschränkt ausführbar.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b} \text{ für ein } a \in \mathbb{Z} \text{ und ein } b \in \mathbb{N}\right\}$: Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegen stets noch unendlich viele andere rationale Zahlen. Jede rationale Zahl lässt sich als endliche oder periodische Dezimalzahl schreiben und umgekehrt stellt jede endliche oder periodische Dezimalzahl eine rationale Zahl dar. In $\mathbb{Q}$ sind die Rechenoperationen $+, -$ und $\cdot$ sowie teilen durch Elemente $q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ uneingeschränkt ausführbar.

Beispiel: $\frac{1}{3} = 0,3333.... \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$: In diesem Kontext soll es genügen, sich unter der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen alle möglichen Dezimalzahlen vorzustellen, also endliche, periodische und nicht endliche, nicht periodische Dezimalzahlen. Auch in $\mathbb{R}$ sind die Rechenoperationen $+, -, \cdot$ sowie Division durch Elemente $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uneingeschränkt ausführbar.

Bemerkung: Es besteht folgender Zusammenhang zwischen den angegebenen Zahlenbereichen:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Da wir nicht wirklich definiert haben, was reelle Zahlen sind (und dies in diesem Kurs nicht sinnvoll wäre), ist die letzte Inklusion mit Vorsicht zu genießen. Zur Veranschaulichung dieser Inklusion kann man folgenden Sachverhalt heranziehen. Man kann zeigen, dass keine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$ existiert. Diese Gleichung wird allerdings von $\sqrt{2}$ gelöst und daher ist $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Auch die Eulersche Zahl e und π sind Elemente von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Diese reellen Zahlen werden in der Vorlesung Analysis I sauber definiert.

1.5 Rechenregeln für reelle Zahlen und Ordnungsrelationen

1.5.1 Rechenregeln für reelle Zahlen

Für das Rechnen mit den reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln:

Kommutativgesetz der	Addition	$a+b=b+a$
	Multiplikation	$ab=ba$
Assoziativgesetz der	Addition	$(a+b)+c=a+(b+c)$
	Multiplikation	$(ab)c=a(bc)$
Distributivgesetz		$a(b+c)=ab+ac$
1. binomische Formel		$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2. binomische Formel		$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3. binomische Formel		$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
Vorzeichenregeln		$-(-a)=a$
		$-(a+b)=-a-b$
		$-(a-b)=-a+b$

Die Regeln der Bruchrechnung werden als bekannt vorausgesetzt.

1.5.2 Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$

Wir vereinbaren für $a, b \in \mathbb{R}$:

$a = b$ steht für „a ist gleich b“,

$a < b$ steht für „a ist echt kleiner als b“,

$a \leq b$ steht für „a ist kleiner oder gleich b“,

$a > b$ steht für „a ist echt größer als b“,

$a \geq b$ steht für „a ist größer oder gleich b“.

Beachte: Nach Definition impliziert $a < b$, dass $a \leq b$, aber im Allgemeinen impliziert $a \leq b$ nicht, dass $a < b$!

Die reellen Zahlen können auf der Zahlengeraden veranschaulicht werden. Jeder reellen Zahl entspricht genau ein Punkt auf der Zahlengeraden und umgekehrt. Für zwei beliebige reelle Zahlen x, y kann eindeutig entschieden werden, ob $x < y$, $x = y$ oder $x > y$ gilt. Auf der Menge der reellen Zahlen ist also eine Ordnungsstruktur gegeben. Für diese gelten folgende Regeln: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$

Aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $a \cdot c > b \cdot c$

Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$

$a \cdot b > 0$ gilt genau dann, wenn ($a > 0$ und $b > 0$) oder ($a < 0$ und $b < 0$)

$a \cdot b < 0$ gilt genau dann, wenn ($a > 0$ und $b < 0$) oder ($a < 0$ und $b > 0$)

$a \cdot b = 0$ gilt genau dann, wenn ($a = 0$ oder $b = 0$)

Entsprechende Aussagen gelten auch für $\leq$ und $\geq$ anstelle von $<$ bzw. $>$.

1.6 Intervalle

Definition 1.6.1 (*Intervall*)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Das **offene Intervall** (a, b) *ist die Menge*

$$(a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}\,.$$

Das **abgeschlossene Intervall** $[a, b]$ *ist die Menge*

$$[a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}\,.$$

Die **halboffenen Intervalle** *sind definiert als die Mengen*

$$(a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}\,, \quad [a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}\,.$$

Im Fall $a = b$ haben wir die **(entarteten) Intervalle**

$$[a, a] \coloneqq \{a\} \quad \text{und} \quad [a, a) = (a, a] = (a, a) \coloneqq \emptyset\,.$$

Weiter sind die **unendlichen Intervalle** *definiert als die Mengen*

$$\begin{aligned} (-\infty, a) &\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}\,, & (-\infty, a] &\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}\,, \\ (a, \infty) &\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}\,, & [a, \infty) &\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}\,, \\ (-\infty, \infty) &\coloneqq \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Der Schnitt zweier Intervalle ist stets ein Intervall (evtl. die leere Menge). Die Vereinigung zweier Intervalle kann ein Intervall sein, muss es aber nicht.

Beispiele:

(1) $[3, 4] \cap [1, \infty) = [3, 4]$,

(2) $[-2, 0) \cap (-1, 0] = (-1, 0)$,

(3) $[4, 7] \cap [8, 9) = \emptyset$,

(4) $[7, 8] \cap [8, 9) = [8, 8] = \{8\}$,

(5) $[4, 5) \cup (-3, 1]$ ist kein Intervall,

(6) $[4, 5] \cup (-3, 4) = (-3, 5]$.

1.7 Mathematische Beweise

In diesem Abschnitt lernen wir die grundlegenden logischen Beweisstrukturen kennen. Wir betrachten folgende Situation: Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen. Wir wollen unter der Voraussetzung $\mathcal{A}$ die Aussage $\mathcal{B}$ folgern. Wir finden daher die Struktur

$$\text{Voraussetzung: } \mathcal{A} \qquad\qquad \text{Behauptung: } \mathcal{B}.$$

und wollen $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ zeigen. Dazu haben wir ausschließlich die folgenden Mittel zur Verfügung:

(i) Die Aussage $\mathcal{A}$.

(ii) Axiome und bereits bewiesene Aussagen, insbesondere geltende Rechenregeln.

(iii) Die logischen Verknüpfungen aus Abschnitt 1.1.

Man unterscheidet die folgenden Beweistechniken:

(1) **Der direkte Beweis:** Wir setzen die Aussage $\mathcal{A}$ als wahr voraus und folgern unter Verwendung von (i)-(iii) auf direktem Wege (evtl. über Zwischenschritte) die Aussage $\mathcal{B}$. Schematisch könnte das zum Beispiel so aussehen:

$$\mathcal{A} \;\Rightarrow\; \mathcal{C} \;\Rightarrow\; \mathcal{B}\,,$$

mit einer weiteren Aussage $\mathcal{C}$.

(2) **Die Kontraposition:** Hier verwenden wir $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \equiv (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$. Also können wir auch so vorgehen: Wir setzen $\neg\mathcal{B}$ voraus und folgern unter Verwendung von (i)-(iii) die Aussage $\neg\mathcal{A}$. Zum Beispiel:

$$\neg\mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{D} \;\Rightarrow\; \neg\mathcal{A}\,,$$

mit einer weiteren Aussage $\mathcal{D}$.

(3) **Der Widerspruchsbeweis:** Wir setzen $\mathcal{A}$ voraus und nehmen an, dass $\neg\mathcal{B}$ gilt. Also gilt $\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{B}$. Daraus folgern wir nun eine stets falsche Aussage $\mathcal{C}\wedge\neg\mathcal{C}$ für eine weitere Aussage $\mathcal{C}$. Damit ist $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ gezeigt, denn es gilt

$$(\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{C}\wedge\neg\mathcal{C}) \;\equiv\; (\neg(\mathcal{C}\wedge\neg\mathcal{C}) \;\Rightarrow\; \neg\mathcal{A}\vee\mathcal{B})\,,$$

wobei die Aussage $\neg(\mathcal{C}\wedge\neg\mathcal{C})$ stets wahr ist und außerdem die Äquivalenz

$$(\neg\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) \equiv (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$$

vorliegt.

Eine alternative Begründung des Prinzips des Widerspruchsbeweises erhalten wir aus der Wahrheitstafel der Implikation: Wir folgern auf richtige Weise (d. h. die Implikation ist wahr) etwas falsches. Das ist nur möglich, wenn die Voraussetzung (in unserem Fall $\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{B}$) falsch ist. Da $\mathcal{A}$ nach Voraussetzung wahr ist, muss also $\neg\mathcal{B}$ falsch und damit $\mathcal{B}$ wahr sein.

(4) **Beweis durch Gegenbeispiel:** Seien X eine Menge und $\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)$ Aussagen für alle $x \in X$. Um die Aussage

$$\mathcal{C} := \big(\forall x \in X : \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)\big)$$

zu widerlegen, reicht es, ein $\tilde{x} \in X$ zu finden mit $\mathcal{A}(\tilde{x}) \wedge \neg\mathcal{B}(\tilde{x})$, da

$$\neg\mathcal{C} \equiv \big(\exists x \in X : \neg(\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x))\big) \text{ und}$$
$$\neg(\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)) \equiv (\mathcal{A}(x) \wedge \neg\mathcal{B}(x))$$

gelten.

(5) **Die vollständige Induktion:** Den natürlichen Zahlen liegt das Axiomensystem von Peano zugrunde. Dieses enthält das wichtige **Induktionsaxiom**: Enthält eine Teilmenge M von $\mathbb{N}$ die Zahl 1 und mit jedem Element $n \in M$ auch den „Nachfolger" $n + 1$, d.h. gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \in M \Rightarrow n + 1 \in M\,,$$

so folgt $M = \mathbb{N}$. Darauf beruht das Beweisprinzip der vollständigen Induktion: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ gegeben. Wir wollen beweisen, dass $\mathcal{A}(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist äquivalent zu

$$M := \{m \in \mathbb{N} \,|\, \mathcal{A}(m) \text{ ist wahr }\} = \mathbb{N}\,.$$

Wir gehen wie folgt vor.

(i) Wir zeigen den Induktionsanfang: $\mathcal{A}(1)$ ist wahr.

(ii) Wir machen die Induktionsvoraussetzung: Für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{A}(n)$ wahr.

(iii) Nun führen wir den Induktionsschluss durch: Wir zeigen, dass unter der Induktionsvoraussetzung folgt, dass auch $\mathcal{A}(n+1)$ wahr ist, d. h. wir zeigen $\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$.

Aus dem Induktionsaxiom folgt dann, dass $\mathcal{A}(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele:

zu (1) Man beweise, dass das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl gerade ist.
Wir werden dieser Aufforderung nachkommen, indem wir einen direkten Beweis führen.

Voraussetzung: $n \in \mathbb{N}$ ist gerade.

Behauptung: n^2 ist gerade.

Beweis: Die Menge der geraden natürlichen Zahlen ist gegeben durch

$$G := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2k\}.$$

Nach Voraussetzung ist $n \in G$. Also existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$. Dann folgt

$$n^2 = (2k)^2 = 2 \cdot 2k^2.$$

Da $k' = 2k^2 \in \mathbb{N}$, folgt, dass $n^2 \in G$ per Definition. □

zu (2) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Man beweise, dass n ungerade ist, falls n^2 ungerade ist.
Wir werden einen Beweis durch Kontraposition führen.

Voraussetzung: n^2 ist ungerade.

Behauptung: n ist ungerade.

Beweis: Wir sollen zeigen, dass n^2 ungerade impliziert, dass n ungerade ist. Per Kontraposition müssen wir also zeigen, dass n gerade, impliziert, dass n^2 gerade ist. Dies haben wir in (1) aber schon gezeigt. □

zu (3) Man beweise, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
Wir werden dies durch einen Widerspruchsbeweis zeigen.

Behauptung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Wir nehmen an es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, ..., p_n$, wobei p_n die größte Primzahl sei. Dann setzen wir

$$m := p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$$

Dann ist

$$m + 1 > m = p_1 \cdot ... \cdot p_n \geq p_n$$

und damit $m + 1$ keine Primzahl. Ist nun p ein Primteiler von $m + 1$, dann ist $p \in \{p_1, ..., p_n\}$ und es existiert ein $j \in \{1, ..., n\}$ mit $p = p_j$. Dann teilt p insbesondere m und $m + 1 - m$. Da nun $m + 1 - m = 1$ muss $p = 1$ gelten und da 1 keine Primzahl ist gilt insgesamt „p ist eine Primzahl“ und „p ist keine Primzahl“ und dies ist ein Widerspruch. □

zu (4) Man beweise für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Existenz eines $k \in \mathbb{N}$ mit $2^{n+1} + 3^{2n-1} = 7k$.

Wir setzen

$$\mathcal{A}(n) := \text{Es existiert ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } 2^{n+1} + 3^{2n-1} = 7k\,.$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung: $\mathcal{A}(n)$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Beweis: Wir beginnen mit dem Induktionsanfang. Für $n = 1$ gilt

$$2^{n+1} + 3^{2n-1} = 2^2 + 3^1 = 7.$$

Mit $k = 1$ ist daher $\mathcal{A}(1)$ wahr.
Wir machen die Induktionsvoraussetzung: Es sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{A}(n)$ wahr. Nun führen wir den Induktionsschluss durch. Nach der Induktionsvoraussetzung existiert ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$2^{n+1} + 3^{2n-1} = 7k_n$$

und damit

$$\begin{aligned} 2^{(n+1)+1} + 3^{2(n+1)-1} &= 2^{n+2} + 3^{2n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} + 9 \cdot 3^{2n-1} \\ &= 2(2^{n+1} + 3^{2n-1}) + 7 \cdot 3^{2n-1} = 7(2k_n + 3^{2n-1}). \end{aligned}$$

Wegen $3^{2n-1} \in \mathbb{N}$ gilt $2k_n + 3^{2n-1} \in \mathbb{N}$ und daher ist $\mathcal{A}(n+1)$ wahr. $\square$

2 Reelle Funktionen I

In diesem Kapitel wenden wir uns dem Begriff der *Funktion* zu. Wir werden damit beginnen, abstrakt zu formulieren, was wir unter einer Funktion verstehen, und danach verschiedene Beispiele für reellwertige Funktionen diskutieren, die aus der Schule geläufig sein sollten. Im Rahmen dieser Beispiele behandeln wir insbesondere elementare Rechenregeln für Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.
Bei dem Funktionsbegriff beschränken wir uns vorerst auf die nötigen Konzepte, die im nächsten Kapitel zum Verständnis von Gleichungen und Ungleichungen benötigt werden. In Kapitel 4 werden wir den Funktionsbegriff aufgreifen und weitere Konzepte und Beispiele kennenlernen.

2.1 Funktionsbegriff

Definition 2.1.1 (*Funktion, Definitions-, Wertebereich, Bild*)
Es seien X, Y Mengen und $x \mapsto f(x)$ eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet.

(a) Das Tripel $(X, x \mapsto f(x), Y)$ nennt man **Abbildung** *oder* **Funktion** *und bezeichnet dieses kurz mit $f : X \to Y$ oder f, falls keine Verwechslungen möglich sind.*

$$\textit{Notation:} \qquad f : X \to Y\,, \qquad x \mapsto f(x)\,.$$

Dabei bezeichnet man X als **Definitionsbereich** *und Y als* **Wertebereich** *von f.*

(b) Sind $f : X \to Y$ eine Funktion und $A \subseteq X$, so bezeichnet man

$$f(A) := \{y \in Y \mid \textit{es existiert ein } x \in A \textit{ mit } f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}$$

als **Bild von A unter f**. *Die Menge $f(X)$ heißt* **Bild von f**.

(c) Sind $f : X \to Y$ eine Funktion und $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ so nennen wir f eine **reelle Funktion**.

Anhand dieser Definition ist ersichtlich, dass es sich bei einer Funktion nicht nur um eine Zuordnungsvorschrift handelt. Der Definitions- und Wertebereich von f ist ebenfalls von Bedeutung, zum Beispiel wenn man sich genauer mit Eigenschaften von Funktionen auseinandersetzt. Insbesondere gilt nicht immer $f(X) = Y$ (siehe Bemerkung (2) auf der nächsten Seite).

Merke: Schreiben wir $f(x)$, so handelt es sich um einen konkreten (unter Umständen unbestimmten) Funktionswert, aber niemals um die Funktion selbst!

Bemerkung:

(1) Es gibt eine weitere sehr verbreitete Notation für die Definition einer Funktion. Die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (x+1)(x-2),$$
ließe sich auch völlig korrekt wie folgt definieren:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \coloneqq (x+1)(x-2).$$

(2) Wir betrachten die zwei Funktionen
$$f_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto n+1 \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n+1.$$
Die Zuordnungsvorschriften von f_1 und f_2 sind gleich, nämlich
$$f_1(n) = f_2(n) = n+1.$$
Aber die Funktion f_2 hat eine Eigenschaft, die f_1 nicht hat. Wir sehen ohne Mühe ein, dass $f_1(\mathbb{N}_0) = f_2(\mathbb{N}_0) = \mathbb{N}$. Das bedeutet, dass das Bild von f_2 mit dem Wertebereich der Funktion übereinstimmt. Bei f_1 ist das nicht der Fall, da $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{R}$. Wir haben also einen qualitativen Unterschied zwischen f_1 und f_2 festgestellt. Das lässt darauf schließen, dass diese beiden Funktionen nicht „gleich“ sind, obwohl sie die gleiche Zuordnungsvorschrift besitzen.

Ein kleiner philosophischer Ausflug: Man könnte bei dem definierten Funktionsbegriff aus Definition 2.1.1 (a) kritisieren, dass dies keine mathematisch präzise Definition ist, und dieser Kritik wäre nichts entgegenzusetzen. Für diesen Mangel an Präzision gibt es aber einen sehr guten Grund. Definitionen ermöglichen die Kommunikation über mathematische Themen, da man in ihnen Konzepte, Vorstellungen oder Eigenschaften von bestimmten Objekten in einem Begriff zusammenfasst. Zum Beispiel haben wir in Kapitel 1 mathematisch präzise den Begriff Teilmenge definiert, da alle auftretenden Begriffe in dieser Definition schon vorher definiert worden sind. Diese Objekte waren “Element” und “Menge” und genau hier ergibt sich ein Problem. Denn wir haben den Begriff “Menge” nicht mathematisch präzise sondern auf eine abstrakte und sehr unpräzise Art definiert. Das hat den Grund, dass wir bei dem Begriff “Menge” an einem der elementarsten mathematischen Objekte angelangt sind, der sich nicht als Kombination bisheriger Definitionen oder als Spezialfall einer solchen auffassen lässt. Vielmehr ist dieser Begriff unserer eigenen Denkweise geschuldet und etwas provokant formuliert,

einfach zu elementar um mathematisch präzise definiert zu werden.
Bei dem Begriff "Funktion", handelt es sich ebenfalls um einen sehr elementaren Begriff und wir belassen es daher bei dem oben eingeführten Funktionsbegriff, der zwar einerseits unpräzise, aber andererseits für die mathematische Praxis und die eigene Vorstellung mehr als ausreichend ist.

Ab sofort werden wir uns nur noch mit reellen Funktionen beschäftigen, d.h. von jetzt an betrachten wir ausschließlich Funktionen der Form $f : X \to Y$ mit $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.
In den folgenden Abschnitten werden wir diverse Rechenoperationen definieren, deren Handhabung absolutes Basiswissen darstellt. Trotzdem werden wir diese noch einmal definieren und die wichtigsten Rechenregeln aufführen. Dabei definieren wir zu jeder Operation eine Funktion, die wir mit einem geeigneten Definitionsbereich ausstatten.

2.2 Potenzen und Wurzeln

Definition 2.2.1 (*Ganzzahlige Potenz)*
*Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}$. Die m-***te Potenz** *definieren wir als*

$$
\begin{aligned}
a^m &= 1, && \text{falls } m = 0,\\
a^m &= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-mal}, && \text{falls } m > 0,\\
a^m &= \frac{1}{a^{-m}}, && \text{falls } a \neq 0 \text{ und } m < 0.
\end{aligned}
$$

Die Zahl a heißt **Basis**, *m heißt* **Exponent**.

Es gelten die folgenden *Potenzgesetze*: Für jedes $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt

(a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,

(b) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$,

(c) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$,

(d) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$,

(e) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Definition 2.2.2 (*n-te Wurzel)*
Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

*(a) Es sei $a \in [0, \infty)$. Die n-***te Wurzel** *aus a ist die reelle Zahl x mit $x \geq 0$, für die $x^n = a$ gilt.*

Notation: $a^{\frac{1}{n}}$ *oder* $\sqrt[n]{a}$.

(b) Ist n ungerade und $a \in (-\infty, 0)$, setzen wir

$$\sqrt[n]{a} := -\sqrt[n]{-a}.$$

Beispiele:

(1) Wir suchen jedes $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $x^2 = 4$. Jedem wird klar sein, dass diese Gleichung nur von $x = 2$ oder $x = -2$ gelöst wird. Bilden wir aber $\sqrt{4}$, so erhalten wir nach obiger Definition 2. Allgemein kann man sagen, dass für festes $a \in [0, \infty)$ die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$ ist.

(2) $x = -2 = -\sqrt[3]{8}$ ist die Lösung von $x^3 = -8$, also $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Es gelten die folgenden *Wurzelgesetze*: Es seien $a, b \in [0, \infty)$ und $n, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}\,,$

(b) $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ und $\sqrt[n]{a^n} = a\,,$

(c) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,,$ falls $b > 0\,,$

(d) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\,.$

Beispiele:

(1) $\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = \left(\sqrt[10]{2}\right)^{10} = 2\,,$

(2) $6 = \sqrt{4}\sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6\,,$

(3) $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4\,,$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2\,,$

(5) $\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \sqrt{\sqrt[3]{125}} = \sqrt{5}\,.$

Achtung: Der Ausdruck $\sqrt{5}$ im letzten Beispiel ist bereits als Endergebnis anzusehen. Die (zuweilen in der Schule verwendete) Notation $\sqrt{5} = 2,2361$ ist hingegen **nicht zulässig**! Gleichheit im mathematischen Sinn ist die (abstrakte) Gleichheit zweier Objekte (vgl. Kapitel 1) und kann nicht durch irgendwelche Konventionen (wie „Runden nach der vierten Nachkommastelle") relativiert werden. Die Schreibweise $\sqrt{5} \approx 2,2361$ bedeutet hingegen soviel wie $\sqrt{5}$ ist "ungefähr" $2,2361$ und ist unter Umständen vertretbar, wenn z.B. nach der ungefähren Größenordnung eines Ausdrucks gefragt wird. Dies wird aber in diesem Vorkurs gar nicht und im Studium wohl selten passieren.

Definition 2.2.3 (*Die Rationale Potenz*)
Es sei $a \in (0, \infty)$ und $r \in \mathbb{Q}$ mit $r = \frac{p}{q}$, wobei $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir die **rationale** *oder* **gebrochene Potenz** *a^r durch*

$$a^r := (\sqrt[q]{a})^p = (a^{\frac{1}{q}})^p$$

Um diese Definition von a^r mathematisch sauber zu rechtfertigen, muss man noch zeigen, dass die Potenz a^r *wohldefiniert* ist, also unabhängig von der konkreten Darstellung der rationalen Zahl r als Bruch $\frac{p}{q}$. Wie wir wissen, kann man dieselbe Zahl r auf verschiedene Arten als Bruch schreiben, zum Beispiel ist $\frac{3}{9} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Es ist also zu zeigen, dass durch die a priori verschiedenen Ausdrücke $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$, in diesem Beispiel $\left(a^{\frac{1}{9}}\right)^3, \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^2, \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^1$, jedes mal *dieselbe* Zahl definiert wird. Dies werden wir nun zeigen.

Voraussetzung: Es sei $a \in (0,\infty)$, $r \in \mathbb{Q}$ mit $r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ mit $p, m \in \mathbb{Z}$ und $q, n \in \mathbb{N}$.

Behauptung: $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Beweis: Zuerst gilt
$$\frac{p}{q} = \frac{m}{n} \iff np = mq.$$
Damit erhalten wir
$$(a^{\frac{1}{q}})^p \;=\; \left(((a^{\frac{1}{n}})^n)^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left((a^{\frac{1}{n}})^{np}\right)^{\frac{1}{q}} = \left((a^{\frac{1}{n}})^{mq}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(((a^{\frac{1}{n}})^m)^q\right)^{\frac{1}{q}} = (a^{\frac{1}{n}})^m.$$
□

Anhand der Rechnung im obigen Beweis wird es kaum überraschen, dass auch für gebrochene Potenzen entsprechende Potenzgesetze gelten: Seien $a, b \in (0,\infty)$ und $r, s \in \mathbb{Q}$. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

(a) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,

(b) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,

(c) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$,

(d) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$,

(e) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

Bisher haben wir für $a \in (0,\infty)$ den Ausdruck a^x nur für $x \in \mathbb{Q}$ definiert. Im Rahmen der Vorlesung Analysis 1 werden wir sehen, wie man die Definition auch auf beliebige $x \in \mathbb{R}$ ausdehnen kann.

Beispiel (Rationalmachen des Nenners):

(1) Es seien $b \in \mathbb{R}$, $a \in (0,\infty)$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Terme der Form $\frac{b}{a^{\frac{m}{n}}}$ kann man durch Erweitern mit $a^{1-\frac{m}{n}}$ in eine einfachere Form bringen. Zum Beispiel
$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{1/3}} \cdot \frac{2^{2/3}}{2^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\,.$$

(2) Es seien $c \in \mathbb{R}$ und $a, b \in [0,\infty)$ mit $a \neq b$. Terme der Form $\frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ lassen sich durch Erweitern mit $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ in eine einfachere Form bringen. Zum Beispiel
$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \sqrt{3}-\sqrt{2}\,.$$

Definition 2.2.4 (*Rationale Potenzfunktion*)
Es sei $r \in \mathbb{Q}$. Die Funktion
$$f : X \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto x^r\,,$$
heißt **rationale Potenzfunktion**, *wobei*

(a) $X = \mathbb{R}$ *, falls* $r \in \mathbb{N}_0$ *,*

(b) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *, falls* $r \in \mathbb{Z}$ *und* $r \in (-\infty, -1]$ *,*

(c) $X = [0, \infty)$ *, falls* $r \notin \mathbb{N}$ *und* $r \in (0, \infty)$ *,*

(d) $X = (0, \infty)$ *, falls* $r \notin \mathbb{Z}$ *und* $r \in (-\infty, 0)$ *.*

Wir wollen noch auf die wichtigsten Spezialfälle eingehen:

(1) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion

$$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^n,$$

nennt man die n-**te Potenzfunktion**. Aus diesen Funktionen lassen sich folgende grundlegende Funktionen generieren. Es seien $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Dann bezeichnet man eine Funktion der Form

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n,$$

als **Polynom** n-**ten Grades**.

(2) Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Die Funktion

$$w_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

nennt man n-**te Wurzelfunktion**.

2.3 Der Logarithmus

Definition 2.3.1 (*Der Logarithmus*)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a, b > 0$ *und* $b \neq 1$*. Unter dem* **Logarithmus von** a **zur Basis** b *versteht man diejenige reelle Zahl* $c \in \mathbb{R}$*, für die* $b^c = a$ *gilt.*

$$\textit{Notation:} \quad c := \log_b(a).$$

Die Funktion

$$\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log_b(x),$$

nennt man **Logarithmusfunktion zur Basis** b*. Die Funktion*

$$\exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto b^x$$

nennt man **Exponentialfunktion zur Basis** b*.*

Beachte: Es handelt sich hierbei um die *übliche* Definition für Logarithmen, die Ihnen auch aus der Schule geläufig sein sollte. Diese ist zum jetzigen Zeitpunkt in zweierlei Hinsicht problematisch:

1. Wir nehmen, ohne es wirklich zu wissen, an, dass genau ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, welches $b^c = a$ erfüllt. Dies wird in der Vorlesung Analysis I geklärt.
2. Der Ausdruck b^c ist für irrationales $c \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ noch gar nicht definiert. Daher beschränken wir uns bei konkreten Rechenbeispielen auf den Fall, dass c rational ist.

Die folgenden Tatsachen kann man leicht selbst überprüfen: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \in (0, \infty)$, $r \in \mathbb{R}$ und $b \neq 1$ gelten

(1) $a = b^{\log_b(a)}$, (2) $\log_b(1) = 0$,

(3) $\log_b(b) = 1$, (4) $a^r = b^{r \cdot \log_b(a)}$.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir noch auf einen wichtigen Spezialfall hinweisen. Hierfür benötigt man allerdings die Eulersche Zahl e, deren Definition wir hier nicht geben wollen (und können). Dies wird ebenfalls in der Vorlesung Analysis 1 geschehen.

Definition 2.3.2 (*Der natürliche Logarithmus)*
Es seien $a \in (0, \infty)$ und e *die Eulersche Zahl. Wählt man in der obigen Definition die Basis $b = \mathrm{e}$, so nennt man*

$$\ln(a) = \log(a) := \log_{\mathrm{e}}(a)$$

den **natürlichen Logarithmus**. *Die Funktion*

$$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log(x),$$

nennt man **natürliche Logarithmusfunktion**. *Die Funktion*

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty), \qquad x \mapsto \mathrm{e}^x,$$

heißt **Exponentialfunktion**.

2.3.1 Die Logarithmengesetze

Wir werden in diesem Abschnitt auf das Rechnen mit Logarithmen eingehen und hierfür die wichtigsten Regeln wiederholen. Besondere Beachtung verdienen dabei die folgenden *Logarithmengesetze* : Es seien $x, y, b \in (0, \infty)$ mit $b \neq 1$ und $z \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(a) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$,

(b) $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$,

(c) $\log_b(x^z) = z \cdot \log_b(x)$,

Beispiel: Es gilt

$$\begin{aligned}\log(32) + \log(18) + \log(81) &= \log(2^5) + \log(2 \cdot 3^2) + \log(3^4)\\ &= 5\log(2) + \log(2) + 2\log(3) + 4\log(3)\\ &= 6\log(2) + 6\log(3)\,.\end{aligned}$$

Ein weiteres praktisches Hilfsmittel für den Umgang mit dem Logarithmus ist die folgende *Umrechungsformel* : Für $a, b, d \in (0, \infty)$ und $b, d \neq 1$ gilt

$$\log_d a = \frac{\log_b a}{\log_b d}.$$

Es reicht also wenn man Logarithmen nur bezüglich einer bestimmten Basis b berechnen kann, um Logarithmen bezüglich beliebiger Basen auszurechnen.
Machen wir uns kurz klar, warum dies korrekt ist. Es gilt

$$\log_b a = \log_b\left(d^{\log_d a}\right) = (\log_d a)(\log_b d).$$

Bringt man $\log_b d$ auf die linke Seite, erhalten wir besagte Umrechnungsformel.

Beispiele:

(1) $2^x = 16 \iff x = 4$,

(2) $3^x = \frac{1}{9} \iff x = -2$,

(3) $\log_x 36 = 2 \iff x = 6$,

(4) $\log_x \frac{1}{64} = -6 \iff x = 2$,

(5) $\log_5 125 = x \iff x = 3$,

(6) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = x \iff x = 4$,

(7) $\log_3 x = 5 \iff x = 243$,

(8) $\log_2 x = -5 \iff x = \frac{1}{32}$.

2.4 Der Betrag

Definition 2.4.1 (*Der Betrag*)
Der **Betrag** *von* $a \in \mathbb{R}$ *ist definiert durch*

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}.$$

Außerdem nennen wir

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, \infty)\,, \qquad x \mapsto |x|\,,$$

die **Betragsfunktion**.

Beispiele:

(1) $|-3| = -(-3) = 3$ und $|3| = 3\,,$ (2) $|0| = 0.$

Man kann sich den Betrag einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ als den Abstand auf der Zahlengeraden zwischen a und 0 vorstellen. Sind nun $a, b \in \mathbb{R}$, so ist $|a - b|$ also der Abstand zwischen $a - b$ und 0, oder anders interpretiert der Abstand von a und b.
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten

(a) $|a| \geq 0\,,$ (b) $|a| = 0 \iff a = 0\,,$

(c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|\,,$ (d) $|a + b| \leq |a| + |b|\,,$

(e) $|a + b| \geq \big||a| - |b|\big|\,,$ (f) $|a| = \sqrt{a^2}\,.$

Die Abschätzung aus (d) nennt man die „Dreiecksungleichung“.

3 Lösungstechniken für Gleichungen und Ungleichungen

Ein zentrales Element des Mathematikstudiums ist das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen. Dieses Kapitel beschäftigt sich daher mit Lösungstechniken für bestimmte Gleichungs- und Ungleichungstypen.
Wir haben im vorigen Kapitel den Begriff des Definitionsbereiches für Funktionen kennengelernt. Dieses Konzept wird auch hier eine Rolle spielen. Wir betrachten folgende modellhafte Aufgabenstellung:

Beispiel: Bestimmen Sie jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, welches die Gleichung

$$\frac{1}{x-1} = 1 \tag{3.1}$$

erfüllt.

Diese Aufgabenstellung enthält zwei Elemente. Die Einschränkung der möglichen x-Werte $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und den mathematischen Ausdruck $\frac{1}{x-1} = 1$. Letzteres für sich genommen würde keinen Sinn ergeben, denn es ist dort nicht spezifiziert was x überhaupt sein darf. Die Einschränkung $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ geschieht, wie man vermutet, auch nicht grundlos. Schaut man sich die auftretenden Terme in dem Ausdruck $\frac{1}{x-1} = 1$ an, so stellt man fest, dass die rechte Seite für jedes $x \in \mathbb{R}$, die linke Seite aber nur für $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ definiert ist. Schneidet man die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, so erhält man die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die die linke und die rechte Seite definiert sind. Man könnte $\mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ daher als *Definitionsbereich* $\mathbb{D}$ der Gleichung (3.1) bezeichnen.
Konkret berechnet man die Lösungen der obigen Aufgabe durch die folgenden Umformungen. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$\frac{1}{x-1} = 1 \iff 1 = x - 1 \iff 2 = x.$$

Die Menge aller $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ welche (3.1) erfüllen ist also

$$\mathbb{L} := \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \;\middle|\; \frac{1}{x-1} = 1 \right\} = \{2\}\,,$$

wobei wir $\mathbb{L}$ als *Lösungsmenge* bezeichnen.

Merke: Eine Gleichung oder Ungleichung macht nur Sinn, wenn die möglichen x-Werte spezifiziert sind. Dies kann man als Analogie zu den Funktionen sehen, da auch diese ohne den Definitionsbereich X keinen Sinn ergeben!

Den obigen Aufgabentyp schreiben wir ab sofort auf folgende Weise:
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{1}{x-1} = 1\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}\,.$$

3.1 Quadratische Gleichungen

Es seien $p, q \in \mathbb{R}$. Unter einer *quadratischen Gleichung* verstehen wir eine Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,. \tag{3.2}$$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ kann man leicht durch *quadratische Ergänzung* bestimmen. Damit meint man die folgende Umformung der linken Seite von Gleichung (3.2)

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q\,,$$

wobei wir bei der letzten Gleichung die 1. binomische Formel verwendet haben.

Beispiel: Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$x^2 - x - 6 = 0\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 - x - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

und daher

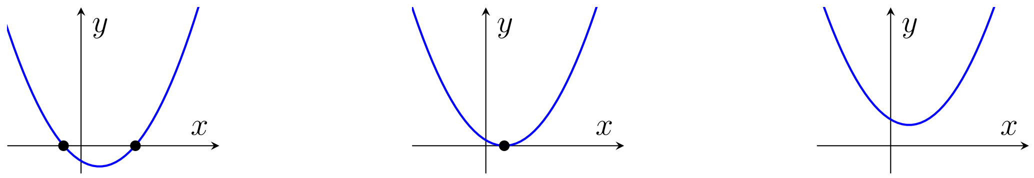
$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 = 0 &\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \iff x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} \\ &\iff x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \iff x = -2 \;\vee\; x = 3 \end{aligned}$$

Somit gilt $\mathbb{L} = \{-2, 3\}$.

Der soeben beschriebene Algorithmus liefert immer die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ einer quadratischen Gleichung der Form (3.2).
Aber auch ohne die Lösungsmenge explizit berechnet zu haben, hätten wir schon eine qualitative Aussage über die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ machen können. Definieren wir das Polynom 2-ten Grades

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto x^2 + px + q\,,$$

so kann man die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von (3.2) als die Nullstellenmenge von f auffassen. Das Schaubild von f liefert eine nach oben geöffnete Parabel und daher kann $\mathbb{L}$ allerhöchstens zwei Elemente besitzen. Dies verdeutlichen die folgenden Schaubilder. Diese 3 verschiedenen Fälle lassen sich charakterisieren durch



(a) Zwei Nullstellen. (b) Eine Nullstelle. (c) Keine Nullstelle.

Abbildung 3.1: Nach oben geöffnete Parabeln.

$$\begin{aligned}
\mathbb{L} = \emptyset &\iff \frac{p^2}{4} - q < 0\,,\\
\mathbb{L} \text{ hat genau ein Element} &\iff \frac{p^2}{4} - q = 0\,,\\
\mathbb{L} \text{ hat genau zwei Elemente} &\iff \frac{p^2}{4} - q > 0\,.
\end{aligned}$$

3.2 Quadratische Ungleichungen

Es seien $p, q \in \mathbb{R}$. Unter einer *quadratischen Ungleichung* verstehen wir eine Ungleichung der Form

$$x^2 + px + q \begin{Bmatrix} \geq \\ \leq \\ > \\ < \end{Bmatrix} 0\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,. \tag{3.3}$$

Genau wie bei den quadratischen Gleichungen gibt es auch für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von (3.3) nur drei Möglichkeiten. $\mathbb{L}$ kann die leere Menge, ein Intervall oder die Vereinigung von zwei disjunkten Intervallen sein. Das kann man sich wieder mit den obigen

Schaubildern klarmachen, wobei wir die linke Seite der Ungleichung wieder als Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2 + px + q$ interpretieren.

Beispiel: Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$x^2 - x - 6 > 0\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,.$$

Zuerst bestimmt man jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 - x - 6 = 0$. Aus dem Beispiel im vorigen Abschnitt haben wir bereits die Lösungsmenge dieser Gleichung, nämlich $\mathbb{L}_= := \{-2, 3\}$. Insbesondere gilt mittels Faktorisierung für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)\,.$$

Folglich gelten für alle $x \in \mathbb{R}$ die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 > 0 &\iff (x+2)(x-3) > 0 \\ &\iff (x+2 < 0 \ \wedge \ x-3 < 0) \ \vee \ (x+2 > 0 \ \wedge \ x-3 > 0) \\ &\iff (x < -2 \ \wedge \ x < 3) \ \vee \ (x > -2 \ \wedge \ x > 3) \\ &\iff (x < -2) \ \vee \ (x > 3). \end{aligned}$$

Also gilt $\mathbb{L} = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)\,.$

Dieses Ergebnis lässt sich auch anschaulich begründen. Wie in Abbildung 3.1 (a) schematisch dargestellt, ist das Schaubild der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto x^2 - x - 6\,,$$

eine nach oben geöffnete Parabel, welche die x-Achse in den Punkten -2 und 3 schneidet. Gesucht ist nun die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, an welchen die Parabel echt oberhalb der x-Achse liegt. Diese ist

$$\mathbb{L} = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)\,.$$

3.3 Wurzelgleichungen

Eine allgemeingültige Definition einer Wurzelgleichung wollen wir hier nicht geben. Stattdessen zeigen wir das allgemeine Vorgehen bei solchen Gleichungen anhand zweier Beispiele auf. Dabei ist besonders auf den Definitionsbereich zu achten, der hier im allgemeinen nicht mehr $\mathbb{R}$ ist. Vorsicht ist auch bei den folgenden Umformungen geboten, denn es handelt sich nun nicht mehr unbedingt um Äquivalenzumformungen. Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung, d. h. es gilt zwar $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, aber die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch, wie z. B. $x = -1, y = 1$ zeigt. Wissen wir allerdings, dass x und y nichtnegativ sind, so gilt auch die andere Implikation.

Beispiel:

(1) Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$7 + 3\sqrt{2x+4} = 16\,, \qquad \mathbb{D} = [-2, \infty)\,.$$

Für $x \in \mathbb{D}$ gilt

$$\begin{aligned} 7 + 3\sqrt{2x+4} = 16 \Longleftrightarrow 3\sqrt{2x+4} = 9 \iff \sqrt{2x+4} = 3 \\ \Rightarrow 2x+4 = 9 \iff x = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Von der ersten auf die zweite Zeile haben wir nur einen Implikationspfeil. Da aber $2x + 4 \geq 0$ (wegen $x \in [-2, \infty)$) gilt haben wir auch

$$2x + 4 = 9 \;\Rightarrow\; \sqrt{2x+4} = 3\,.$$

Insgesamt gilt daher

$$7 + 3\sqrt{2x+4} = 16 \iff x = \frac{5}{2}$$

und damit $\mathbb{L} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

(2) Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1} \;\text{ auf }\; \mathbb{D} = [1, \infty)\,.$$

(i) Bei diesem Beispiel lohnt es sich über die Wahl des Definitionsbereichs $\mathbb{D}$ nachzudenken. $\sqrt{x}$ ist nur für $x \in [0, \infty)$, $\sqrt{x-1}$ nur für $x \in [1, \infty)$ und $\sqrt{2x-1}$ nur für $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$ definiert. Es gilt

$$[0, \infty) \cap [1, \infty) \cap [\frac{1}{2}, \infty) = [1, \infty)\,,$$

und diese Menge wählen wir als $\mathbb{D}$. Für $x < 1$ ist $\sqrt{x-1}$ schon nicht mehr definiert und daher können wir hier $\mathbb{D}$ als maximalen Definitionsbereich der Gleichung interpretieren.

(ii) Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1} &\Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^2 = 2x - 1 \\ &\Longleftrightarrow x - 2\sqrt{x}\sqrt{x-1} + (x-1) = 2x - 1 \\ &\Longleftrightarrow 2\sqrt{x(x-1)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 1 \;\vee\; x = 0\,. \end{aligned}$$

Da wir im ersten Schritt nur eine Implikation und keine Äquivalenz haben, ist der Ausdruck $x = 1 \;\vee\; x = 0$ nur notwendige Bedingung an $x \in \mathbb{D}$ eine

Lösung der Gleichung zu sein. Diese beiden Möglichkeiten müssen wir nun noch überprüfen. $x = 0$ kann keine Lösung sein, da $0 \notin \mathbb{D}$. Eine Probe für $x = 1$ liefert

$$\sqrt{1} - \sqrt{1-1} = 1 = \sqrt{2 \cdot 1 - 1}.$$

Folglich ist $\mathbb{L} = \{1\}$.

3.4 Bruchungleichungen

Auch in diesem Abschnitt verzichten wir auf eine allgemeine Definition und lassen das Beispiel für sich sprechen. Wir werden nun die Technik der *Fallunterscheidung* kennenlernen. Diese treten auf, da für verschiedene Elemente des Definitionsbereichs der Ungleichung unter Umständen unterschiedliche Vorzeichen im Nenner auftreten. Beim Multiplizieren einer Ungleichung mit einer Zahl spielt das Vorzeichen aber eine entscheidende Rolle.

Beispiel: Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$\frac{2x+1}{x-3} < 1\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}\,.$$

Für $x \in (-\infty, 3)$ ist $x - 3 < 0$ und für $x \in (3, \infty)$ ist $x - 3 > 0$. Daher unterscheiden wir die folgenden Fälle:

Fall 1: $x \in (3, \infty)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x+1}{x-3} < 1\right) \;\wedge\; (x > 3) &\iff (2x+1 < x-3) \;\wedge\; (x > 3) \\ &\iff (x < -4) \;\wedge\; (x > 3)\,.\end{aligned}$$

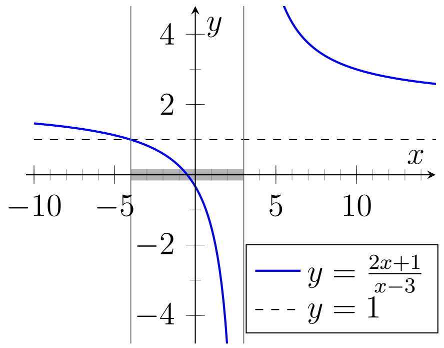
Die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, welche die letzte Aussage erfüllen ist offensichtlich $\mathbb{L}_1 = \emptyset$.

Fall 2: $x \in (-\infty, 3)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x+1}{x-3} < 1\right) \;\wedge\; (x < 3) &\iff (2x+1 > x-3) \;\wedge\; (x < 3) \\ &\iff (x > -4) \;\wedge\; (x < 3) \\ &\iff x \in (-4, 3) =: \mathbb{L}_2\,.\end{aligned}$$

Für die Gesamtlösungsmenge $\mathbb{L}$ gilt nun

$$\begin{aligned}\mathbb{L} &= \mathbb{L} \cap \mathbb{D} \\ &= (\mathbb{L} \cap (3,\infty)) \;\cup\; (\mathbb{L} \cap (-\infty, 3)) \\ &= \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-4, 3)\,.\end{aligned}$$



3.5 Betragsungleichungen

Wir haben im vorigen Abschnitt die Fallunterscheidung kennengelernt. Mit diesem Hilfsmittel lassen sich auch Ungleichungen behandeln, in denen Beträge vorkommen.

Beispiel: Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$\frac{|2x+1|}{x-3} \le 1\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}\,. \tag{3.4}$$

Da wir aber nun in Abhängigkeit von x im Zähler und Nenner variierende Vorzeichen haben, reichen 2 Fallunterscheidungen wie im vorigen Abschnitt nicht mehr aus. Es gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$2x + 1 \ge 0 \iff x \ge -\frac{1}{2}.$$

Daher bieten sich die folgenden Fallunterscheidungen an:

Fall 1: $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{|2x+1|}{x-3} \le 1\right) \;\wedge\; \left(x < -\frac{1}{2}\right) &\iff (-2x - 1 \ge x - 3) \;\wedge\; \left(x < -\frac{1}{2}\right) \\ &\iff \left(x \le \frac{2}{3}\right) \;\wedge \left(x < -\frac{1}{2}\right) \\ &\iff x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) =: \mathbb{L}_1\,.\end{aligned}$$

Fall 2: $x \in [-\frac{1}{2}, 3)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{|2x+1|}{x-3} \le 1\right) \;\wedge\; \left(x \in [-\frac{1}{2}, 3)\right) &\iff (2x + 1 \ge x - 3) \;\wedge\; \left(x \in [-\frac{1}{2}, 3)\right) \\ &\iff (x \ge -4) \;\wedge\; \left(x \in [-\frac{1}{2}, 3)\right) \\ &\iff x \in [-\frac{1}{2}, 3) =: \mathbb{L}_2\,.\end{aligned}$$

Fall 3: $x \in (3, \infty)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{|2x+1|}{x-3} \leq 1 \right) \ \wedge \ (x > 3) &\Longleftrightarrow (2x + 1 \leq x - 3) \ \wedge \ (x > 3) \\ &\Longleftrightarrow (x \leq -4) \ \wedge \ (x > 3)\,. \end{aligned}$$

Die letzte Aussage wird von keiner reellen Zahl erfüllt und damit $\mathbb{L}_3 = \emptyset$.

Insgesamt gilt

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = (-\infty, 3)\,.$$

4 Reelle Funktionen II

Wir haben am Anfang des zweiten Kapitels den Begriff der Funktion kennengelernt und erste grundlegende Konzepte und Definitionen eingeführt. Wir wollen dies hier fortführen, beschränken uns aber auch in diesem Kapitel auf die Behandlung von reellen Funktionen $f : X \to Y$, also $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

4.1 Verkettung von Funktionen

Definition 4.1.1 (*Verkettung von Funktionen*)
Es seien $g : X_1 \to Y_1$ und $f : X_2 \to Y_2$ Funktionen. Dann ist die **Verkettung** *(der* **Komposition** *oder* **Hintereinanderausführung***) von f und g definiert durch*

$$f \circ g : D \to Y_2 \,, \quad x \mapsto f(g(x)) \quad \textit{mit} \quad D = \{x \in X_1 \mid g(x) \in X_2\} \subseteq X_1 \,.$$

Als kurze Sprechweisen werden auch „f nach g" oder „f Kringel g" verwendet.

Im Fall, dass $g(X_1) \cap X_2 = \emptyset$ ist, wäre $D = \emptyset$. So eine Funktion $f \circ g : \emptyset \to Y_2$ nennt man **leere Funktion**, sie ist in der Mathematik meist von geringem Interesse.

Beispiel:

(1) Seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \quad x \mapsto 4 - x^2 \quad \text{und} \quad g : [0, \infty) \to \mathbb{R} \,, \quad x \mapsto \sqrt{x} \,.$$

Wir bestimmen die Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$ und ihre jeweiligen Definitionsbereiche.

(i) Wir behandeln zuerst $f \circ g$. Es gilt

$$D = \{x \in [0, \infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, \infty)$$

und für alle $x \in [0, \infty)$ gilt

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 4 - (\sqrt{x})^2 = 4 - x \,.$$

(ii) Für $g \circ f$ gilt
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 \geq 0\} = [-2, 2]$$
und für alle $x \in [-2, 2]$ gilt
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4 - x^2) = \sqrt{4 - x^2}\,.$$

(2) Es sei die Funktion
$$f : (-1, 2) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log(-x^2 + x + 2)$$
gegeben und wir wollen das Bild $f((-1, 2))$ bestimmen. Dazu ist es hilfreich die Funktion f als Verkettung von zwei einfacheren Funktionen g und h zu schreiben. Diese wählen wir als
$$g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, , \quad x \mapsto \log(x) \;\text{ und }\; h : (-1, 2) \to (0, \infty)\,, \quad x \mapsto -x^2 + x + 2\,.$$
Beachtung verdient hierbei, dass $(-1, 2)$ genau das Intervall ist, auf dem die Funktion h echt größer als 0 ist, d.h. $h((-1, 2)) \subseteq (0, \infty)$. Die Hintereinanderausführung ist also sinnvoll definiert mit $D = (-1, 2)$.
Per Definition gilt
$$f(D) = (g \circ h)(D) = g(h(D))\,.$$
Daher bestimmen wir zuerst $h(D)$. Mit quadratischer Ergänzung erhalten wir jedes $x \in \mathbb{R}$
$$h(x) = -x^2 + x + 2 = -(x^2 - x - 2) = -\left[(x - 1/2)^2 - \frac{1}{4} - 2\right] = \frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$
und hieraus können wir ablesen, dass
$$h(D) = \{h(x) \mid x \in D\} = \{h(x) \mid x \in (-1, 2)\} = (0, \frac{9}{4}]\,.$$
Wir erhalten ferner, dass
$$g(h(D)) = g\big((0, \frac{9}{4}]\big) = \big(-\infty, \log\left(\frac{9}{4}\right)\big]\,.$$
Um die letzte Gleichheit wirklich zu beweisen, fehlen uns momentan schlichtweg die Mittel, bzw. die richtigen Konzepte. Anschaulich wird man durch einen Blick auf das Schaubild des Logarithmus (siehe Seite 42) diese Gleichung allerdings sehr gut nachvollziehen können.

(3) Es sei $X \coloneqq (-\infty, -1] \,\cup\, (0, \infty)$ und die Funktion

$$f : X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

gegeben. Wie zuvor werden wir durch geeignete Aufspaltung der Funktion f das Bild $f(X)$ berechnen. Dazu seien

$$h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad x \mapsto 1 + \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Dann gilt

$$D \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid h(x) \in [0, \infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid \frac{1}{x} \geq -1\} = X$$

und für $x \in X$ gilt

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = f(x).$$

Also stimmt die Funktion $g \circ h : X \to \mathbb{R}$ mit f überein. Insbesondere gilt daher

$$f(X) = (g \circ h)(X) = g(h(X)).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} h(X) &= \{h(x) \mid x \in (-\infty, -1] \,\cup\, (0, \infty)\} \\ &= \{h(x) \mid x \in (-\infty, -1]\} \,\cup\, \{h(x) \mid x \in (0, \infty)\} = [0, 1) \,\cup\, (1, \infty) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} f(X) &= g([0, 1) \,\cup\, (1, \infty)) = g([0, 1)) \,\cup\, g((1, \infty)) \\ &= [0, 1) \,\cup\, (1, \infty) = [0, \infty) \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

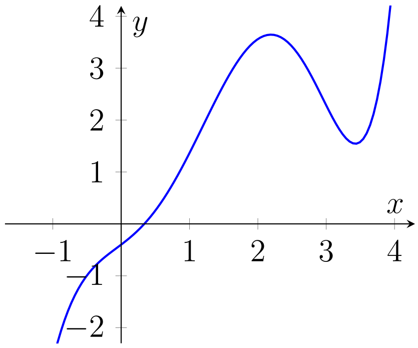
4.2 Der Graph einer reellen Funktion

Definition 4.2.1 (*Der Graph einer reellen Funktion*)
Es sei $f : X \to Y$ eine reelle Funktion. Dann nennt man die Menge

$$\mathit{Graph}(f) \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X,\ y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{4.1}$$

den **Graph von** *f.*

Graph(f) ist also eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (kurz $\mathbb{R}^2$), deren Namen wohlverdient ist. Skizziert man nämlich Graph(f), so könnte das zum Beispiel wie nebenstehend aussehen.



Nun ist es nicht nur der Graph selbst, den wir in diesem Abschnitt weiter behandeln wollen, sondern (unter anderem) bestimmte Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ die strukturell Definition (4.1) ähneln. Zum Beispiel könnte man in (4.1) die Bedingung $y = f(x)$ durch $y > f(x)$ ersetzen, also

$$G_> := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X,\ y > f(x)\}\,.$$

Anschaulich ist dies die Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die über dem Graph von f liegen. Aus Gründen, die wir hier nicht weiter erläutern können, sind Mengen von der Bauart $G_>$ besonders gut zu handhaben. Daher ist man bei einer beliebig gegebenen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ oft daran interessiert eine Definition dieser Art zu finden.
Wir werden nun unter anderem verschiedene Mengen untersuchen und diese in eine Form bringen, die in Relation zum Graph einer reellen Funktion steht.

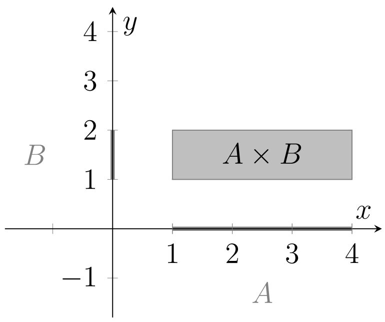
Beispiele:

(1) Wir haben in Kapitel 1 das kartesische Produkt zweier Mengen kennengelernt.

Bildet man das Kreuzprodukt von zwei Intervallen $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$, so ist

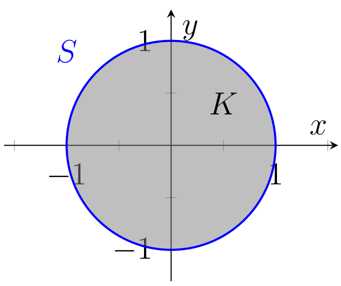
$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$$

unter der Voraussetzung, dass A und B nicht entartet sind, anschaulich gesprochen ein Quader. Skizziert man zum Beispiel $A \times B$ für $A = [1, 4]$ und $B = [1, 2]$, erhält man das nebenstehende Schaubild.



(2) Die Mengen

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{und} \quad K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$



bezeichnet man als *Kreislinie* bzw. *(offene) Kreisscheibe* mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0)$. Wir können natürlich auch Kreislinien bzw. Kreisscheiben mit beliebigem Mittelpunkt und Radius in dieser Form darstellen. Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $r > 0$. Dann lautet die allgemeine Kreisgleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung, also die Menge

$$S\big((x_0, y_0), r\big) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

beschreibt einen Kreis in $\mathbb{R}^2$ um (x_0, y_0) mit Radius r. Durch Umformung sieht man, dass der Kreis sich aus den Graphen der Funktionen

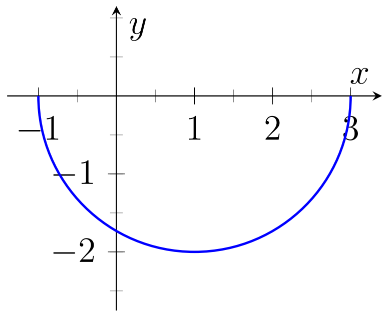
$$f_1 : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + y_0 \qquad \text{(oberer Halbkreis)}$$

und

$$f_2 : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto -\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + y_0 \qquad \text{(unterer Halbkreis)}$$

zusammensetzt. Mit den obigen Überlegungen erkennt man, dass der resultierende Kreis aus einer Verschiebung um x_0 „nach rechts“ (in positive x-Richtung) und y_0 „nach oben“ (in positive y-Richtung) aus dem Kreis um $(0, 0)$ mit Radius r hervorgegangen ist.
Rechts findet man eine Skizze der Funktion

$$f_2 : [-1, 3] \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto -\sqrt{4 - (x - 1)^2}\,.$$



(3) (a) Die Menge

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$$

soll skizziert werden. Dafür bemerken wir, dass $|x| = |-x|$ und $|y| = |-y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten und dass die Ersetzung von x durch $-x$ eine Spiegelung an der y-Achse und entsprechend die Ersetzung von y durch $-y$ eine Spiegelung an der x-Achse bedeutet. Da in der Definition von R die Variable x nur in der Form $|x|$ und y nur in der Form $|y|$ vorkommt, ist R also symmetrisch unter Spiegelungen an der y- und an der x-Achse. Anders ausgedrückt gilt

$$(x, y) \in R \iff (-x, y) \in R \iff (x, -y) \in R \iff (-x, -y) \in R$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Somit genügt es, den ersten Quadranten zu betrachten. Hier gilt

$$|x| + |y| \leq 1 \iff y \leq 1 - x$$

für alle $(x, y) \in [0, \infty)^2$. Im ersten Quadranten besteht die Menge R also genau aus den Punkten, die unterhalb oder auf der durch $y = 1 - x$ beschriebenen Geraden liegen. Das führt zu untenstehender Skizze.

(b) Nun soll die Menge

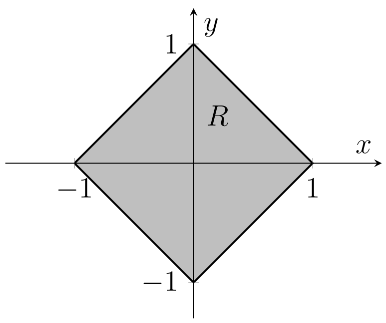
$$T \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 - y^2 > 0\}$$

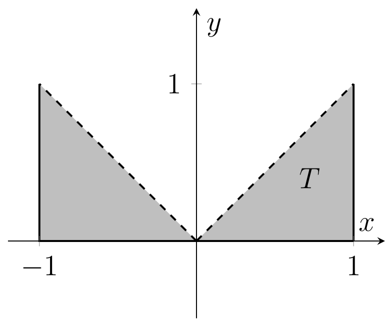
skizziert werden. Wie in oben sehen wir, dass T symmetrisch zur y-Achse ist und verwenden, dass

$$x^2 - y^2 > 0 \iff y < x$$

für alle $(x, y) \in [0, \infty)^2$ gilt. Insgesamt besteht T also aus genau den Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $x \in [-1, 1]$ und $0 \leq y < x$ gelten.

Bei den folgenden Abbildungen ist durch eine durchgezogene bzw. gestrichelte Linie angedeutet, ob der entsprechende Rand zur Menge gehört oder nicht (die genaue Definition des „Randes“ einer Menge erfolgt in den Grundvorlesungen).





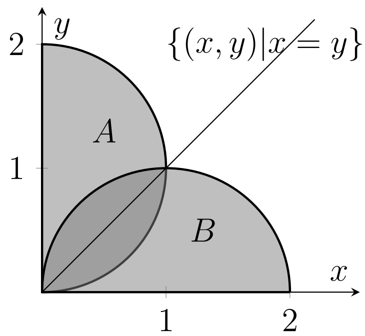
(4) Skizziert man die Mengen

$$A \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y-1)^2 + x^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$$

und

$$B \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\},$$

so erhält man das Schaubild rechts. Wie man sieht entsteht B, wenn die Menge A an der Achse $x = y$ gespiegelt wird. Treten in der Definition einer Menge zwei Variablen auf, so würde sich dieser Effekt immer einstellen, wenn man in der Definition die beiden Variablen vertauscht, wie wir es bei A und B getan haben.



(5) Es sei $M \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y - |x - 1| < 1\}$ und wir sind an einer einfacheren Darstellung von M interessiert. Dazu müssen wir die Bedingung $2y - |x - 1| < 1$ genauer untersuchen. Diese lässt sich wie in Kapitel 3 durch Auflösen des Betrags mittels einer Fallunterscheidung behandeln.

Fall 1: Es sei $x \in [1, \infty)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(2y - |x-1| < 1) \ \wedge \ (x \geq 1) &\iff (2y - (x-1) < 1) \ \wedge \ (x \geq 1) \\ &\iff (y < \frac{x}{2}) \ \wedge \ (x \geq 1)\end{aligned}$$

und wir definieren $\mathbb{L}_1 \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, \ y < \frac{x}{2}\}$.

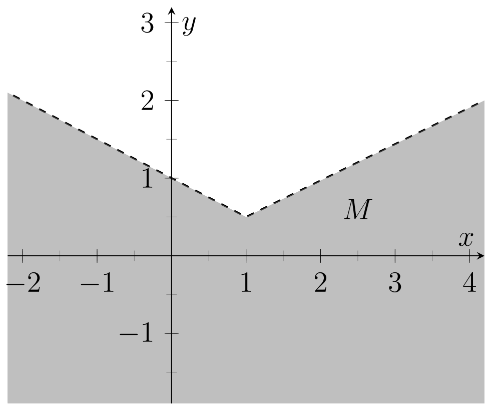
Fall 2: Es sei $x \in (-\infty, 1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(2y - |x-1| < 1) \ \wedge \ (x < 1) &\iff (2y + (x-1) < 1) \ \wedge (x < 1) \\ &\iff (y < 1 - \frac{x}{2}) \ \wedge \ (x < 1)\end{aligned}$$

und wir definieren $\mathbb{L}_2 \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1, \ y < 1 - \frac{x}{2}\}$.

Insgesamt ist dann

$$M = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \, .$$



Wir wollen uns nun verschiedenen Manipulationen von Graphen widmen, wie Verschieben, Spiegeln, Strecken oder Stauchen. Dieses wird durch besonders einfache Verkettungen bewirkt, auch wenn diese der Einfachheit halber nicht mehr explizit aufgeschrieben werden. Die Betrachtung dieser Verkettungen erlaubt einem häufig, auf einfache Weise den Graphen der resultierenden Funktion f zu zeichnen oder die Bildmenge zu bestimmen.

Beispiel: Es sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, , \qquad x \mapsto -x^2 + x + 2 \, ,$$

gegeben. Es gilt

$$f(x) = -x^2 + x + 2 = -(x^2 - x - 2) = -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2\right] = -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right]$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph von f entsteht nun aus dem Graphen der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto x^2$$

durch Verschieben um $1/2$ nach rechts, Verschieben um $9/4$ nach unten und Spiegelung an der x-Achse. Genauer gilt $f = f_3 \circ f_2 \circ g \circ f_1$ mit den Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x - \frac{1}{2}\,, \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x - \frac{9}{4}\,, \qquad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto -x\,.$$

Dann gilt

$$f(\mathbb{R}) = f_3(f_2(g(f_1(\mathbb{R})))) = f_3(f_2(g(\mathbb{R}))) = f_3(f_2([0,\infty))) = f_3([-\frac{9}{4},\infty)) = (-\infty,\frac{9}{4}]\,.$$

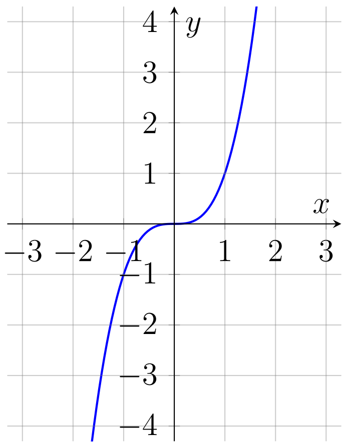
Wir betrachten nun eine allgemeinere Situation: Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Funktion. Wir definieren die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto c \cdot g\big(b(x+a)\big) + d\,.$$

Im Folgenden werden wir alle Schritte anhand der rechts skizzierten Funktion

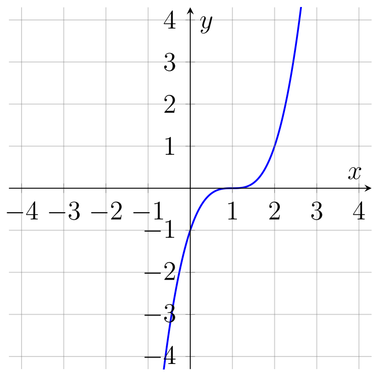
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto x^3$$

illustrieren.

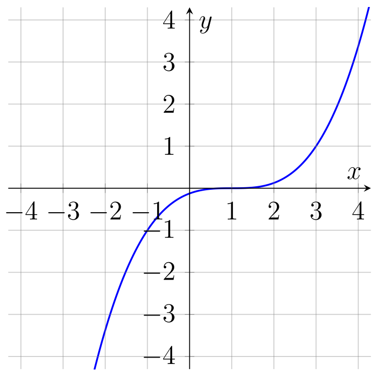


In Bezug auf den Graphen von f bewirkt

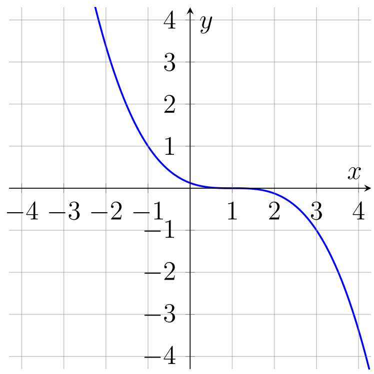
- a eine Verschiebung des Graphen von g um $-a$ entlang der x-Achse,
- für $b > 0$ eine $1/b$-fache Streckung in Richtung der x-Achse (für $b > 1$ wird der Graph also gestaucht),
- ein Vorzeichenwechsel bei b eine Spiegelung an der Achse $x = -a$,
- c für $c > 0$ eine c-fache Streckung in Richtung der y-Achse,
- ein Vorzeichenwechsel bei c eine Spiegelung an der x-Achse,
- d eine Verschiebung des Graphen um d in Richtung der y-Achse.



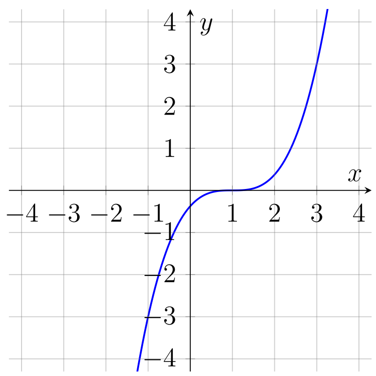
(a) $a = -1,\ b = c = 1,$ $d = 0.$



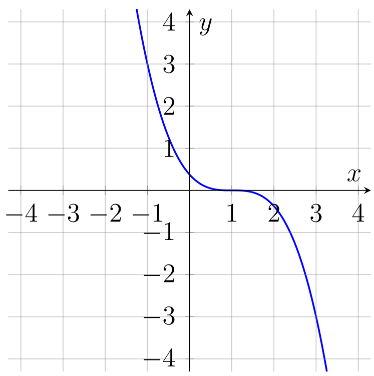
(b) $a = -1,\ b = \frac{1}{2},$ $c = 1,\ d = 0.$



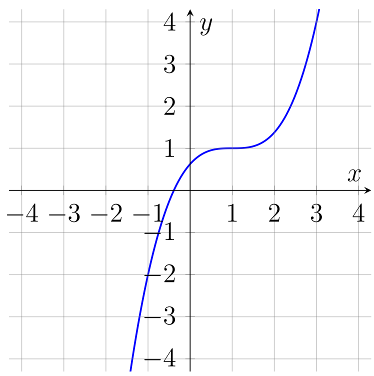
(c) $a = -1,\ b = -\frac{1}{2},$ $c = 1,\ d = 0.$



(a) $a = -1,\ b = \frac{1}{2},$ $c = 3,\ d = 0.$



(b) $a = -1,\ b = \frac{1}{2},$ $c = -3,\ d = 0.$



(c) $a = -1,\ b = \frac{1}{2},$ $c = 3,\ d = 1.$

4.3 Eigenschaften von reellen Funktionen

4.3.1 Monotonie

Definition 4.3.1 (*Monotonie*)
Es sei $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt **wachsend** *bzw.* **fallend**, *wenn*

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$ gilt. Sie heißt **strikt wachsend** *bzw.* **strikt fallend**, *wenn*

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$ gilt. Weiter heißt f **(strikt) monoton**, *wenn f (strikt) wächst oder (strikt) fällt.*

Beispiele:

(1) Es sei die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto x^2\,,$$

gegeben.

Behauptung: f ist strikt wachsend.

Beweis: Es seien $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ mit $x_1 < x_2$. Dann gilt $x_2 - x_1 > 0$ und $0 < x_2 \le x_2 + x_1$. Folglich gilt

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}\underbrace{(x_2 + x_1)}_{>0} > 0 \iff f(x_1) < f(x_2)\,.$$

$\square$

(2) Es sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto x^2\,,$$

gegeben.

Behauptung: f ist weder wachsend noch fallend.

Beweis: Es gilt $-1 < 0$ und $f(-1) = 1 > 0 = f(0)$, also ist f nicht monoton wachsend. Außerdem ist $0 < 1$ und $f(0) = 0 < 1 = f(1)$ und somit ist f auch nicht monoton fallend. $\square$

(3) Es sei die Wurzelfunktion

$$w : [0, \infty) \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto \sqrt{x}\,,$$

gegeben.

Behauptung: w ist streng monoton wachsend.

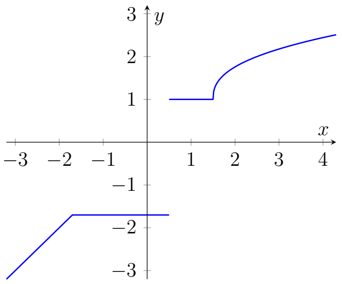
Beweis: Es seien $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ mit $x_1 < x_2$. Dann gilt

$$\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} \ge \sqrt{x_2} > 0$$

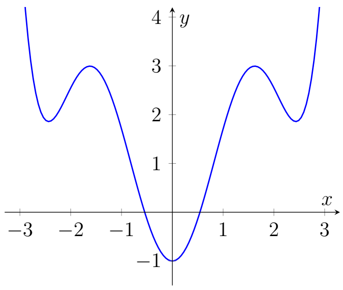
und damit

$$w(x_2) - w(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} > 0\,,$$

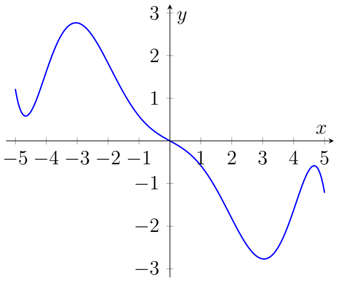
was äquivalent zu $w(x_1) < w(x_2)$ ist. $\square$



(a) monoton wachsende Funktion



(b) gerade Funktion



(c) ungerade Funktion

4.3.2 Gerade und ungerade Funktionen

Definition 4.3.2 (*Gerade und ungerade Funktion*)
Es sei $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, wobei X symmetrisch zur Null sei, d. h. für alle $x \in X$ gilt auch $-x \in X$. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt **gerade** *(oder* **symmetrisch***) bzw.* **ungerade** *(oder* **antisymmetrisch***), wenn*

$$f(-x) = f(x) \quad bzw. \quad f(-x) = -f(x)$$

für alle $x \in X$ gilt.

Beispiele:

(1) Es sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$ ist eine gerade Funktion.

(2) Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$ ist eine ungerade Funktion.

4.4 Die Umkehrfunktion

Dieser Abschnitt ist der Berechnung von Umkehrfunktionen gewidmet. Aber im allgemeinen hat nicht jede Funktion eine Umkehrfunktion. Die zentrale Eigenschaft um die Existenz einer Umkehrfunktion sicherzustellen ist Gegenstand der folgenden Definition.

Definition 4.4.1 (*Injektivität*)
Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt **injektiv***, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt. Dies ist äquivalent zur Aussage*

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$$

für alle $x_1, x_2 \in X$.

Anschaulich bedeutet Injektivität einer Funktion, dass es zu jedem $y \in f(X)$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Es gibt also in X keine zwei Elemente, die durch die Funktion f auf das gleiche Element in $f(X)$ abgebildet werden. Dies ermöglicht

Definition 4.4.2 (*Umkehrfunktion*)
Sei $f : X \to Y$ eine injektive Funktion. Dann heißt

$$f^{-1} : f(X) \to X, \qquad y \mapsto x,$$

wobei x das eindeutige Element aus X mit $f(x) = y$ ist, die **Umkehrfunktion** *von f.*

Aus dieser Definition kann man leicht folgern, dass für alle $x \in X$ und $y \in f(X)$ gilt

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = y\,.$$

Für $(x, y) \in \mathrm{Graph}(f)$ gilt somit $(x, y) = (x, f(x)) = (f^{-1}(y), y)$. Da die Vertauschung der beiden Komponenten eines Punktes in der Ebene der Spiegelung an der durch $y = x$ beschriebenen Geraden entspricht, liegen somit die Graphen von f und f^{-1} symmetrisch zur Geraden $y = x$.

Beispiele:

(1) Strikt monotone Funktionen sind immer injektiv und besitzen somit auch immer eine Umkehrfunktion. (Der Beweis dieser Tatsache ist eine Übungsaufgabe.)

(2) Wir beweisen, dass Verkettungen injektiver Funktionen wieder injektiv sind. Seien hierzu $g : X_1 \to Y_1$ und $f : X_2 \to Y_2$ injektive reelle Funktionen. Für alle Elemente x_1, x_2 aus dem Definitionsbereich von $f \circ g$ mit der Eigenschaft $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ folgt aus der Injektivität, dass die Gleichung $g(x_1) = g(x_2)$ erfüllt ist. Die Injektivität von g impliziert nun $x_1 = x_2$, womit die Injektivität von $f \circ g$ gezeigt ist. $\square$

(3) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, denn es gilt

$$f(1) = 1 = (-1)^2 = f(-1),$$

aber $1 \neq -1$.

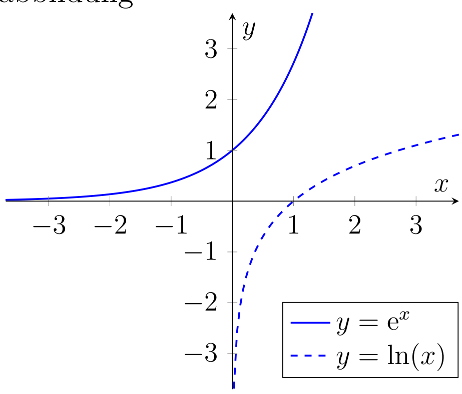
(4) Es sei $b > 0$. Die Umkehrfunktion der Exponentialabbildung

$$\exp_b : \mathbb{R} \to (0, \infty)\,, \qquad x \mapsto b^x\,,$$

zur Basis b ist die Logarithmusfunktion

$$\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto \log_b(x)\,.$$

zur Basis b. Die Skizze zeigt die Graphen der Funktionen der Exponentialabbildung und der natürlichen Logarithmusfunktion.



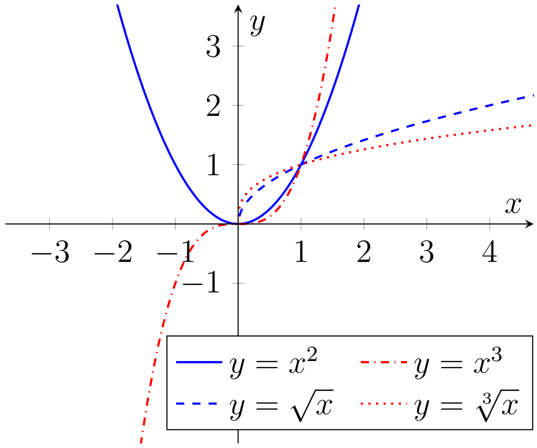
(5) Es sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Dann ist die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto x^n$$

injektiv und die Umkehrfunktion gegeben durch

$$f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty), \qquad x \mapsto \sqrt[n]{x}\,.$$



(6) Wir zeigen, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto \frac{x-1}{x+1}\,,$$

injektiv ist, berechnen die Umkehrfunktion und skizzieren jeweils den Graphen. Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt

$$\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} = f(x_1) = f(x_2) = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1} \iff (x_1 - 1)(x_2 + 1) = (x_2 - 1)(x_1 + 1)\,.$$

Folglich

$$x_1 x_2 - x_2 + x_1 - 1 = (x_1 - 1)(x_2 + 1) = (x_2 - 1)(x_1 + 1) = x_2 x_1 - x_1 + x_2 - 1\,.$$

und daraus erhalten wir schließlich

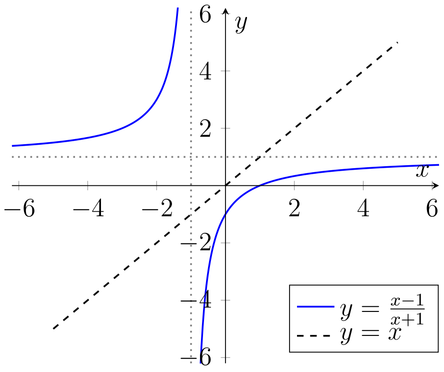
$$-x_2 + x_1 = -x_1 + x_2 \;\Rightarrow\; 2x_1 = 2x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2\,.$$

Also ist f injektiv. Ferner ist $f(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, denn für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gilt $f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ und die Funktion $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := -\frac{2}{x+1}$ erfüllt $g(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Kommen wir nun zur Berechnung der Umkehrfunktion. Diese erhält man durch Auflösen der Gleichung $y = \frac{x-1}{x+1}$ für $y \in f(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$ nach x. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gilt

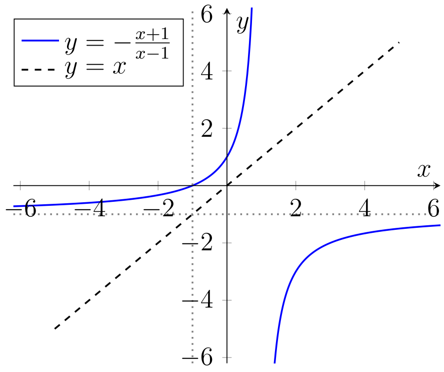
$$y = \frac{x-1}{x+1} \iff (x+1)y = x - 1 \iff xy - x + y = -1$$
$$\iff x(y-1) = -y - 1 \overset{y \neq 1}{\iff} x = -\frac{y+1}{y-1}\,.$$

Um die Umkehrfunktion f^{-1} zu bestimmen, muss man sich klarmachen, dass das obige y die Variable sein soll und man daher in der letzten Gleichung x und y vertauschen muss. Wir erhalten also

$$f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \qquad x \mapsto -\frac{x+1}{x-1}\,.$$



Graph der Funktion f



Graph der Funktion f^{-1}

(7) Es sei $a \in (0,\infty)$, $X = [0,\infty)$ und die Funktion

$$f : X \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto \frac{1}{a+\sqrt{x}}\,,$$

gegeben, wobei $f([0,\infty)) = (0, 1/a]$. Wir zeigen zuerst wieder Injektivität von f. Es sei $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt

$$f(x_1) = f(x_2) \iff a + \sqrt{x_1} = a + \sqrt{x_2} \iff \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \;\Rightarrow\; x_1 = x_2\,,$$

wobei wir in der letzten Implikation die Injektivität der Wurzelfunktion auf $[0,\infty)$ ausgenutzt haben. Die Umkehrfunktion berechnen wir wie zuvor. Für $x \in X$ gilt

$$y = \frac{1}{a+\sqrt{x}} \iff a + \sqrt{x} = \frac{1}{y} \iff \sqrt{x} = \frac{1}{y} - a \overset{x\geq 0}{\iff} x = \left(\frac{1}{y} - a\right)^2$$

Damit ergibt sich

$$f^{-1} : f(X) \to X, \qquad x \mapsto \left(\frac{1}{x} - a\right)^2 .$$

5 Spezielle Funktionen

5.1 Allgemeine (affin-)lineare Funktionen

Definition 5.1.1 (*Linearität)*
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **linear***, wenn für jedes $x_1, x_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt*

$$f(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)\,.$$

Beispiel: Es sei $b \in \mathbb{R}$ fest. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto bx$ ist linear und der Graph dieser Funktion ist eine Gerade mit Steigung b und enthält den Punkt $(0, 0)$. Die Linearität wollen wir nun beweisen.

Behauptung: f ist linear.

Beweis: Es seien $x_1, x_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f(c_1x_1 + c_2x_2) = b(c_1x_1 + c_2x_2) = bc_1x_1 + bc_2x_2 = c_1bx_1 + c_2bx_2 = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)\,.$$

$\square$

Definition 5.1.2 (*Allgemeine affin-lineare Funktion)*
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Eine Funktion der Form $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto a + bx$ heißt **affin-linear** *oder* **allgemein affin-lineare Funktion***.*

Bemerkung: Im Fall $a \neq 0$ ist die affin-lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto a + bx$ nicht linear, denn für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x_1 + x_2) = a + b(x_1 + x_2) \neq 2a + b(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)\,.$$

Beispiel:

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto a+bx$ für die angegebenen Werte von $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $a = 1,\ b = 0$ (2) $a = -1,\ b = -\frac{1}{2}$

Auch bei diesen Graphen handelt es sich jeweils um eine Gerade, aber jetzt schneidet der Graph die y-Achse nicht mehr in $(0, 0)$, sondern jeweils in $(0, a)$. Mit allgemeinen affin-linearen Funktionen lassen sich zum Beispiel Funktionen in denen Beträge vorkommen in eine einfachere Form bringen.

Beispiel: Wir schreiben die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto 2 - |1 - x| - |x + 2|\,,$$

ohne Beträge, indem wir sie auf geeigneten Intervallen als affin-lineare Funktionen schreiben und skizzieren ihren Graphen.
Wie in Kapitel 3 lösen wir den Betrag durch Fallunterscheidungen auf, wobei wir zwei Beträge und somit zunächst vier Fälle haben (wovon einer schließlich wegfällt). Es gelten

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x\,, & x \leq 1\,, \\ x - 1\,, & x > 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad |x + 2| = \begin{cases} x + 2\,, & x \geq -2\,, \\ -x - 2\,, & x < -2\,. \end{cases}$$

Fall 1: Sei $x \in (-\infty, 1] \cap [-2, \infty) = [-2, 1)$. Dann gilt

$$f(x) = 2 - (1 - x) - (x + 2) = -1\,.$$

Fall 2: Sei $x \in (-\infty, 1] \cap (-\infty, -2) = (-\infty, -2)$. Dann gilt

$$f(x) = 2 - (1 - x) - (-x - 2) = 3 + 2x\,.$$

Fall 3: Sei $x \in (1, \infty) \cap [2 - \infty, \infty) = (1, \infty)$. Dann gilt

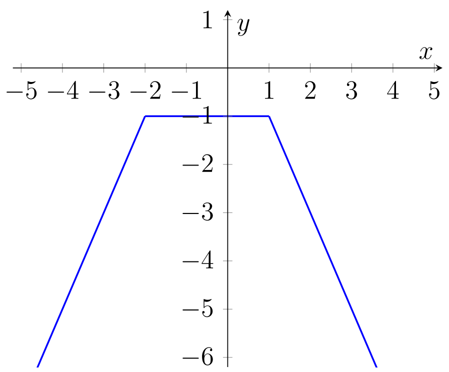
$$f(x) = 2 - (x - 1) - (x + 2) = 1 - 2x\,.$$

Fall 4: Dieser fällt weg, da $(1, \infty) \cap (-\infty, -2) = \emptyset$.

Insgesamt kann man f also auch so schreiben:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) := \begin{cases} 3 + 2x\,, & x \in (-\infty, -2)\,, \\ -1\,, & x \in [-2, 1)\,, \\ 1 - 2x\,, & x \in [1, \infty)\,. \end{cases}$$

Rechts ist der Graph von f skizziert.



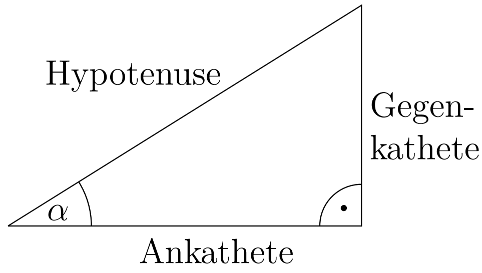
5.2 Trigonometrische Funktionen

Für ein rechtwinkliges Dreieck gelten die Definitionen

$$\sin(\alpha) := \text{Gegenkathete}/\text{Hypotenuse},$$

$$\cos(\alpha) := \text{Ankathete}/\text{Hypotenuse},$$

$$\tan(\alpha) := \text{Gegenkathete}/\text{Ankathete}.$$



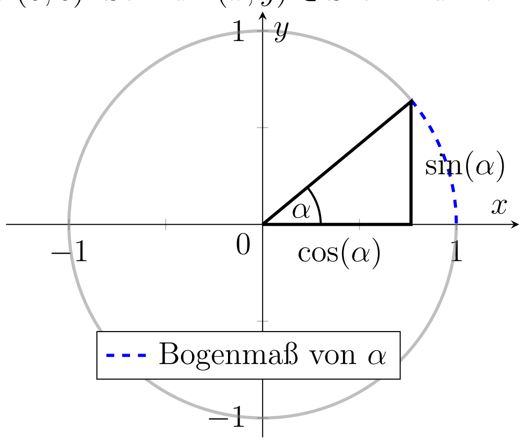
Diese Definition ist allerdings nur für $\alpha < 90°$ möglich. Das Ziel der folgenden Abschnitte ist die Definition des Sinus, Cosinus und Tangens als reelle Funktionen, insbesondere mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Dabei sollen diese Funktionen mit der obigen Definition auf einer bestimmten Teilmenge von $\mathbb{R}$ übereinstimmen.

5.2.1 Sinus und Cosinus

Es bietet sich an, zuerst die Begriffe *Gradmaß* und *Bogenmaß* einzuführen. Es sei

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

die Kreislinie in $\mathbb{R}^2$ mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0)$. Sei nun $(x, y) \in S$ ein Punkt auf der Kreislinie und $L(x, y)$ die Stecke zwischen (x, y) und $(0, 0)$. Den Winkel, den $L(x, y)$ mit dem positiven Teil der x-Achse einschließt, bezeichnen wir mit α und nennen dies das **Gradmaß** von (x, y). Messen wir nun die Strecke, welche durchlaufen wird, wenn man $(1, 0)$ und (x, y) gegen den Uhrzeigersinn auf dem Kreisring verbindet, so erhalten wir eine Zahl $b \in [0, 2\pi)$ (der Kreisumfang ist per Definition 2π), welche wir das **Bogenmaß** des Punktes (x, y) nennen.



Zum Beispiel ist für $(-1, 0)$ das Gradmaß $\alpha = 180°$ und das Bogenmaß $b = \pi$. Auf diese Weise lässt sich jedes Element aus S durch Gradmaß und Bogenmaß ausdrücken. Dies legt nahe, dass wir auch Gradmaß und Bogenmaß ineinander umrechnen können. In der Tat haben wir die Identitäten

$$\alpha = \frac{180}{\pi} b \quad \text{und} \quad b = \frac{\pi}{180} \alpha.$$

Wir werden ab sofort nur noch in Bogenmaß rechnen. Es sei $b \in [0, 2\pi)$ und (x, y) der Punkt auf S mit Bogenmaß b. Wir setzen

$$\cos(b) := x \quad \text{und} \quad \sin(b) := y.$$

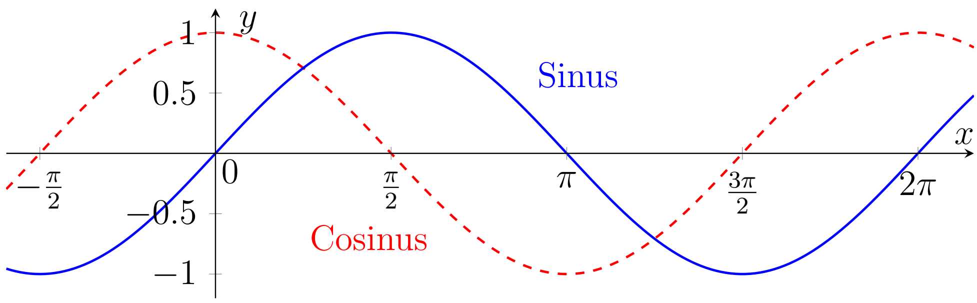
und definieren die Funktionen $\widetilde{\cos} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ und $\widetilde{\sin} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ durch

$$b \mapsto \cos(b) \quad \text{und} \quad b \mapsto \sin(b)$$

wobei offensichtlich $\widetilde{\sin}([0, 2\pi)) = \widetilde{\cos}([0, 2\pi)) \subseteq [-1, 1]$ gilt. Mit der Einsicht, dass $b = 0$ mit $b = 2\pi$ identifiziert werden kann, da in beiden Fällen der Punkt $(x, y) = (1, 0)$ zugeordnet ist, setzen wir beide Funktionen auf die folgende Art periodisch fort: Es sei $b \in \mathbb{R}$. Dann existieren genau ein $\tilde{b} \in [0, 2\pi)$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $b = \tilde{b} + 2\pi k$ und wir definieren

$$\cos(b) := \widetilde{\cos}(\tilde{b}) \qquad \text{und} \qquad \sin(b) := \widetilde{\sin}(\tilde{b})\,.$$

Insgesamt haben wir damit die Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ und $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ definiert, welche wir **Sinus** und **Cosinus** nennen. Skizziert man die Graphen, erhält man folgende Abbildung.



Per Definition sind die Funktionen periodisch mit Periode 2π, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi k) \quad \text{und} \quad \cos(x) = \cos(x + 2\pi k)\,.$$

Weiterhin ist anhand der Definition und der obigen Skizzen zumindest anschaulich klar, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \text{und} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\,.$$

Dabei verwenden wir die abkürzende Schreibweise $\sin^2(x) = (\sin(x))^2$. Überaus praktisch sind die *Additionstheoreme*, welche besagen, dass die folgenden Gleichungen für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gelten.

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) \pm \cos(x_1)\sin(x_2)\,,$$
$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) \mp \sin(x_1)\sin(x_2)\,.$$

Aus den Additionstheoremen lassen sich unter anderem die folgenden vier nützlichen Identitäten herleiten, welche für jedes $x \in \mathbb{R}$ gelten.

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)\,, \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))\,,$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)\,, \qquad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\,.$$

Weiterhin interessant sind die Nullstellen des Sinus und Cosinus. Es gelten

$$\sin(x) = 0 \iff \text{es existiert ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = \pi k$$

und

$$\cos(x) = 0 \iff \text{es existiert ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = \pi k + \frac{\pi}{2}\,.$$

5.2.2 Tangens und Cotangens

Die Funktion $\tan : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tan(x) \coloneqq \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

mit

$$X = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

heißt **Tangens**. Analog definiert man den **Cotangens** durch $\cot : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ mit

$$\cot(x) \coloneqq \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

und

$$\tilde{X} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

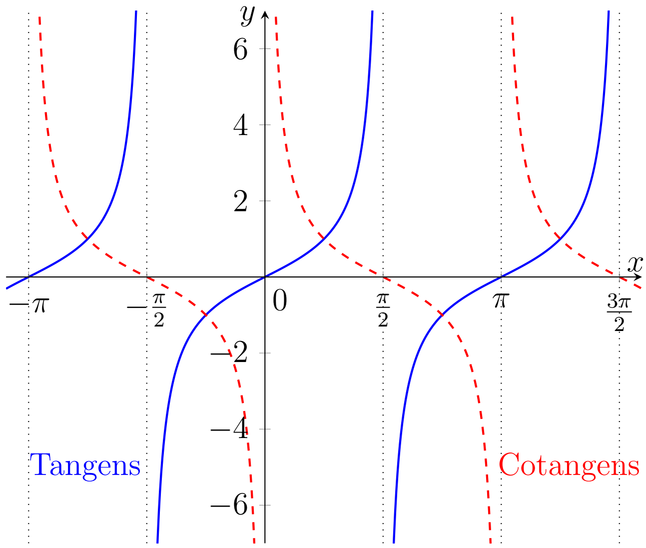
Die Funktionen tan und cot sind ebenfalls periodisch, aber mit Periode π. Es gelten also für jedes x aus dem jeweiligen Definitionsbereich und $k \in \mathbb{Z}$ die Gleichungen

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi) \quad \text{und} \quad \cot(x) = \cot(x + k\pi)\,,$$

wie mit Hilfe der Additionstheoreme nachgerechnet werden kann.

Bemerkung: Der Cosinus ist eine gerade Funktion, während Sinus, Tangens und Cotangens ungerade sind.

Einige Funktionswerte des Sinus, Cosinus und Tangens sind in folgender Tabelle angegeben.



x in °	x im Bogenmaß	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	Begründung
0°	0	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	0	(1)
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	(4)
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	(2)
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	(3)
90°	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	–	(1)

Begründung:

(1) Dies kann direkt aus der Definition von Sinus und Cosinus abgelesen werden.

(2) Wir verwenden die Gleichungen

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right), \qquad 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

woraus mit $\sin(\frac{\pi}{4}) > 0, \cos(\frac{\pi}{4}) > 0$ die Identität

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

folgt.

(3) Wir wählen in der Gleichung

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(x+2x) = \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x)\\ &= \cos(x)\left(1-2\sin^2(x)\right) - \sin(x)2\sin(x)\cos(x)\\ &= \cos(x) - 2\cos(x)\left(1-\cos^2(x)\right) - 2\left(1-\cos^2(x)\right)\cos(x)\\ &= -3\cos(x) + 4\cos^2(x)\end{aligned}$$

den Wert $x = \frac{\pi}{6}$ und erhalten

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 4\cos^3\left(\frac{\pi}{6}\right),$$

woraus wir mit $\cos(\frac{\pi}{6}) > 0$ auf $\cos^2(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{4}$ schließen können.

(4) Übungsaufgabe.

Schließlich bestimmen wir noch $\sin(\frac{\pi}{12})$ und $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Zuerst schreiben wir

$$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Wir quadrieren beide Seiten und erhalten

$$\frac{1}{16} = \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Definieren wir $y \coloneqq \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$, so finden wir mithilfe der pq-Formel

$$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Genauso gilt für $z \coloneqq \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$ die Gleichung $\frac{1}{16} = z(1-z)$. An dem Graphen von Sinus und Cosinus lesen wir zudem $0 < \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ab, weshalb

$$y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

gelten müssen. Damit erhalten wir das Ergebnis:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Die letzten beiden Gleichheiten können dabei wie folgt nachgerechnet werden

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} &\iff \sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1 \iff 2(2-\sqrt{3}) = (\sqrt{3}-1)^2 \\ &\iff 4-2\sqrt{3} = 4-2\sqrt{3} \iff 0 = 0\,, \\ \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} &\iff \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1 \iff 2(2+\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+1)^2 \\ &\iff 4+2\sqrt{3} = 4+2\sqrt{3} \iff 0 = 0\,,\end{aligned}$$

wobei wir jeweils einmal quadrieren, was hier eine Äquivalenzumformung ist, da die Zahlen $2 \pm \sqrt{3}$ und $\sqrt{3} \pm 1$ positiv sind.

6 Polynomdivision, Partialbruchzerlegung

Dieses Kapitel wurde im Wintersemester 2020/2021 von Sebastian Ohrem ergänzt.

6.1 Polynomdivision

Bei der schriftlichen Division hat man zwei ganze Zahlen $P, Q \in \mathbb{Z}$ und sucht eine Darstellung $P = S \cdot Q + R$ mit weiteren ganzen Zahlen $S, R \in \mathbb{Z}$ so, dass der Rest R möglichst klein ist. Ganz ähnlich ist das bei der Polynomdivision:

Hier sind zwei Polynomfunktionen $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben mit $Q \neq 0$. Die Polynomdivision, die wir im Folgenden an Beispielen illustrieren, liefert weitere Polynomfunktionen $S, R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass gelten:

1. $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
2. Der Grad von R ist echt kleiner als der Grad von Q.

Die Funktionen S und R existieren und sind durch diese beiden Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Beispiele:

(1) Wir betrachten die Polynomfunktionen $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$P(x) = x^3 + x^2 - 9x + 4 \quad \text{und} \quad Q(x) = x - 1\,.$$

Wir schauen zuerst den führenden Term von P an (das ist x^3) und bestimmen ein Vielfaches von Q, das denselben führenden Term hat. Hier ist $x^2 \cdot Q(x) = x^3 - x^2$ so ein Vielfaches. Dieses Vielfache ziehen wir nun ab:

$$P(x) - x^2Q(x) = (x^3 + x^2 - 9x + 4) - (x^3 - x^2) = 2x^2 - 9x + 4$$

Mit dem Ergebnis machen wir dasselbe, d.h. wir suchen ein Vielfaches von Q mit führendem Term $2x^2$. Es bietet sich $2xQ(x) = 2x^2 - 2x$ an. Wieder subtrahieren wir:

$$(2x^2 - 9x + 4) - (2x^2 - 2x) = -7x + 4$$

Das Spielchen machen wir noch ein letztes mal, wir nehmen diesmal $-7Q(x) = -7x + 7$ als Vielfaches. Die Differenz ist:

$$-7x + 4 - (-7x + 7) = -3$$

Dabei ist der Grad der rechten Seite 0 und damit echt kleiner als der Grad von Q, der 1 ist. Dass wir hier das richtige gemacht haben, sieht man an der folgenden Rechnung:

$$
\begin{aligned}
-3 &= -7x + 4 - (-7)Q(x) \\
&= 2x^2 - 9x + 4 - (2x - 7)Q(x) \\
&= x^3 + x^2 - 9x + 4 - (x^2 + 2x - 7)Q(x) \\
\iff P(x) &= (x^2 + 2x - 7)Q(x) - 3
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis ist dann $R(x) = -3$ und $S(x) = x^2 + 2x - 7$. Üblich ist es, diese Polynomdivision in einer kompakteren Form zu schreiben, die der der schriftlichen Division sehr ähnelt.

$$
\begin{array}{lllll}
(x^3 & +x^2 & -9x & +4) & : (x-1) = x^2 \ +2x \ -7 \\
-(x^3 & -x^2) & & & \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & -9x & & \\
 & -(2x^2 & -2x) & & \\ \cline{2-3}
 & & -7x & +4 & \\
 & & -(-7x & +7) & \\ \cline{3-4}
 & & & -3 &
\end{array}
$$

(2) Wir betrachten nun die Polynome $P(x) = 6x^4 + 2x^3 - 5x + 2$ und $Q(x) = x^2 - 3$. Wir berechnen

$$
\begin{array}{llllll}
(6x^4 & +2x^3 & & -5x & +2) & : (x^2-3) = 6x^2 \ +2x \ +18 \\
-(6x^4 & & -18x^2) & & & \\ \cline{1-3}
 & 2x^3 & +18x^2 & -5x & & \\
 & -(2x^3 & & -6x) & & \\ \cline{2-4}
 & & 18x^2 & +x & +2 & \\
 & & -(18x^2 & & -54) & \\ \cline{3-5}
 & & & x & +56 &
\end{array}
$$

und erhalten somit die Darstellung $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ mit Polynomen

$$S(x) = 6x^2 + 2x + 18 \quad \text{und} \quad R(x) = x + 56.$$

(3) Die Polynomdivision ist extrem nützlich, um alle Nullstellen eines Polynoms zu bestimmen. Dies hat mit der folgenden Aussage zu tun:

Behauptung: Es seien $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynom und $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von P, d.h. es gilt $P(x_0) = 0$. Dann liefert die Polynomdivision von P durch $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, Q(x) = x - x_0$ eine Faktorisierung $P(x) = S(x)(x - x_0)$ mit einem weiteren Polynom $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beweis: Polynomdivison angewandt auf P und Q liefert weitere Polynome $R, S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und der Grad von R echt kleiner als 1 ist. Da nur konstante Polynome Grad kleiner gleich 0 haben, muss R bereits konstant sein. Außerdem gilt

$$R(x_0) = P(x_0) - S(x_0)Q(x_0) = 0 - S(x_0) \cdot 0 = 0$$

weshalb R konstant 0 ist. Das zeigt die gesuchte Darstellung $P(x) = S(x)Q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Wir untersuchen nun die reelle Polynomfunktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, P(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$ auf Nullstellen.

Dazu werden wir zuerst durch geschicktes Raten eine Nullstelle finden: $P(1) = 1 - 6 - 1 + 6 = 0$! Nun führen wir Polynomdivision mit $Q(x) = x - 1$ aus:

$$\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & -6x^2 & -x & +6) & : (x-1) = x^2 - 5x - 6 \\
-(x^3 & -x^2) & & & \\
\hline
 & -5x^2 & -x & & \\
 & -(-5x^2 & +5x) & & \\
\cline{2-3}
 & & -6x & +6 & \\
 & & -(-6x & +6) & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Wir haben also die Darstellung $P(x) = (x^2 - 5x - 6)(x - 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gefunden. Die Nullstellen von $x \mapsto x^2 - 5x - 6$ bestimmen wir mithilfe der pq-Formel und erhalten

$$x_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}},$$

also $x_2 = 6, x_3 = -1$, welche zusammen mit $x_1 = 1$ alle Nullstellen von P sind.

Bemerkung: Wir haben in Beispiel 3 eine Methode zum Finden von Nullstellen von Polynomen kennengelernt: Durch geschicktes Raten von Nullstellen kann man eventuell den Grad eines Polynoms so lange reduzieren, bis man die Nullstellen (z.B. mit der pq-Formel) ablesen kann. So eine Lösungsformel für Nullstellen von Polynomen gibt es tatsächlich auch für Polynome von Grad 3 oder 4, nur sind diese Formeln sehr groß. Aus mathematischer Sicht viel interessanter ist die Tatsache, dass für Polynome von Grad 5 KEINE Lösungsformel existiert.

6.2 Partialbruchzerlegung

Die Partialbruchzerlegung ist ein Mittel, um für rationale Funktionen eine Darstellung zu finden, die z.B. bei der Bestimmung einer Stammfunktion sehr praktisch ist.

Ausgang sind wieder zwei Polynomfunktionen $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $Q \neq 0$. Der Grad von P soll echt kleiner als der von Q sein. Weiter nehmen wir an, dass eine Zerlegung von Q in Linearfaktoren

$$Q(x) = (x - x_1)^{n_1} \dots (x - x_k)^{n_k}$$

mit $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ sowie $n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$ existiert und bekannt ist. Nun suchen wir eine Darstellung der Form

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_1}{x - x_1} + \dots + \frac{a_{n_1}}{(x - x_1)^{n_1}} + \dots + \frac{z_1}{x - x_k} + \dots + \frac{z_{n_k}}{(x - x_k)^{n_k}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $Q(x) \neq 0$. Dabei sind $a_1, \dots, a_{n_1}, \dots, z_1, \dots, z_{n_k}$ reelle Zahlen, die zu finden sind.

Beispiele:

(1) Wir bestimmen die Partialbruch-Darstellung für

$$\frac{x - 11}{x^2 + 5x - 14}$$

Dazu faktorisieren wir zuerst $x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$ und schreiben die gesuchte Gleichung hin:

$$\begin{aligned}
& \frac{x - 11}{x^2 + 5x - 14} \overset{!}{=} \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 7} \\
\iff & \frac{x - 11}{x^2 + 5x - 14} = \frac{a(x + 7)}{x^2 + 5x - 14} + \frac{b(x - 2)}{x^2 + 5x - 14} \\
\iff & x - 11 = a(x + 7) + b(x - 2) \\
\iff & 1 = a + b \text{ und } -11 = 7a - 2b
\end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösung $a = -1, b = 2$ und damit die Darstellung

$$\frac{x-11}{x^2+5x-14} = \frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x+7}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -7\}$.

(2) In diesem Beispiel untersuchen wir

$$\frac{1}{x^3-x^2}$$

Man kann sofort die Faktorisierung des Nenners $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ ablesen. Wir lösen auf:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x^3-x^2} \overset{!}{=} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{1}{x^3-x^2} = \frac{ax(x-1)}{x^3-x^2} + \frac{b(x-1)}{x^3-x^2} + \frac{cx^2}{x-1} \\
\Longleftrightarrow\ & 1 = a(x^2-x) + b(x-1) + cx^2
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $a+c = 0, a-b = 0, -b = 1$, woraus wir die Darstellung

$$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ablesen.

Index