

Mathematischer Vorkurs

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1

Es seien \mathcal{A}, \mathcal{B} und \mathcal{C} mathematische Aussagen.

(a) Zeigen Sie jeweils mit Hilfe von Wahrheitstafeln die folgenden Äquivalenzen:

$$(1) \quad \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}), \quad (2) \quad \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}),$$

$$(3) \quad (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}), \quad (4) \quad (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}).$$

$$(5) \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \iff (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}).$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen stets wahr sind.

$$(1) \quad \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A},$$

$$(2) \quad [(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B})] \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}).$$

Die letzte Aussage beschreibt dabei das Zerlegen einer Folgerung in Teilschritte.

Aufgabe 2

Finden Sie Beispiele für die Verknüpfung von Aussagen ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$), indem Sie die Aussage \mathcal{A} : „Heute ist Montag.“ mit Aussagen aus der folgenden Liste so verknüpfen, dass Sie mindestens vier weitere wahre Aussagen erhalten:

\mathcal{B} : „Heute ist Dienstag.“

\mathcal{E} : „Gestern war Sonntag.“

\mathcal{C} : „Heute ist kein Montag.“

\mathcal{F} : „Heute ist Werktag.“

\mathcal{D} : „Gestern war kein Montag.“

\mathcal{G} : „Gestern war Wochenende.“

Beispiel: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{F}$.

Können Sie aus den Aussagen \mathcal{B} – \mathcal{G} durch Verknüpfung weitere wahre Aussagen erzeugen?

Aufgabe 3

Der Barbier von Karlsruhe

In Karlsruhe gibt es seit Gründung der Stadt das Gesetz, dass alle Personen männlichen Geschlechts sich jeden Morgen zu rasieren haben. Nichteinhaltung dieses Gesetzes wird hart bestraft und es wird daher von jedem Mann befolgt. Um dieser Pflicht nachzukommen, gibt es heutzutage zwei Möglichkeiten: Entweder man rasiert sich selbst oder man sucht den Barbier von Karlsruhe auf, der als einziger seines Fachs beruflich nicht auf Webdesign umgesattelt hat. Dieser ist ein kleiner kauziger Mann, der schon sein ganzes Leben in Karlsruhe verbringt und des Öfteren seine Mitbürger durch seine strikte Definition des Barbierberufs vor Rätsel stellt. Seiner Meinung nach, sei ein Barbier jemand, der diejenigen, und nur diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Frage: Rasiert der Barbier von Karlsruhe sich selbst, oder nicht?

Aufgabe 4

(a) Faktorisieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln.

(i) $b^2 - 9$,

(ii) $x^2 - 8x + 16$,

(iii) $25a^2 + 20ab^2 + 4b^4$,

(iv) $a^8 - 2a^4b^2 + b^4$.

(b) Faktorisieren Sie.

(i) $x^2 - x - 2$,

(ii) $3u^2 - 12$,

(iii) $18a^3 + 84a^2b + 98ab^2$,

(iv) $(a - b)^2 - (a + b)^2$.

Aufgabe 5

(a) Schreiben Sie jeweils die angegebene Menge als Intervall.

(i) $A := \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{2} \geq \frac{1-x}{3}\}$,

(ii) $B := \{x \in \mathbb{R} \mid 4(1-x) + 3(x+2) < 8\}$,

(iii) $C := \{x \in \mathbb{R} \mid 3x-1 \leq 2(x-3) - (2-x)\}$,

(iv) $D := \{x \in \mathbb{R} \mid -7x \geq \frac{3(x-1)}{2}\}$.

(b) Es seien A, B, C, D wie in (a). Bestimmen Sie

(i) $A \cap B$,

(ii) $D \setminus B$,

(iii) $(A \setminus C) \cup D$,

(iv) $\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$.

Aufgabe 6

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade. Zeigen Sie, dass n gerade ist.

(b) Zeigen Sie: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.