KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
M. Sc. Christopher Bresch

WS 2021/2022
05.10.2021

Mathematischer Vorkurs

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 7

(a) Berechnen Sie:

(i) 2^{-4}, (ii) $(3^6)^{\frac{1}{12}}$,

(iii) $3^{10} \cdot 3^{-8}$, (iv) $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^2$,

(v) $(-\frac{1}{3})^3$, (vi) $\sqrt[5]{-32}$.

(b) Formen Sie jeweils den angegebenen Ausdruck in einen Term mit rationalem Nenner um und vereinfachen Sie dann die Ausdrücke so weit wie möglich.

(i) $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$, (ii) $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$,

(iii) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, (iv) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$,

(v) $\dfrac{60}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, (vi) $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie jeweils das $x \in \mathbb{R}$, welches die angegebene Gleichung erfüllt.

(1) $2^x = 64$, $64^x = 64$, $3^x = 81$, $2^x = \dfrac{1}{8}$,

(2) $3^x = \dfrac{1}{3}$, $10^x = 0,01$, $5^x = 0,008$, $8^x = 4$,

(3) $\log_x(9) = 2$, $\log_x(243) = 5$, $\log_x(1024) = 10$, $\log_x\left(\dfrac{1}{16}\right) = 4$,

(4) $\log_x(4) = \dfrac{1}{2}$, $\log_x \dfrac{1}{32} = -5$, $\log_x \dfrac{1}{5} = -1$, $\log_x \sqrt{10} = \dfrac{1}{2}$,

(5) $\log_7(49) = x$, $\log_5(1) = x$, $\log_7\left(\sqrt[6]{49}\right) = x$, $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{4}\right) = x$,

(6) $\log_{10}(10^6) = x$, $\log_{10}(1) = x$, $\log_{10}(\sqrt[3]{100}) = x$, $\log_{10}\left(\sqrt{\dfrac{1}{10}}\right) = x$,

(7) $\log_3(x) = 4$, $\log_{10}(x) = -3$.

Aufgabe 9

Es sei $\varepsilon \in (0,1)$. Geben Sie jeweils die angegebene Menge als Intervall oder als Vereinigung von Intervallen an.

(a) $A := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < \varepsilon\}$,

(b) $B := \{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| > \varepsilon\}$,

(c) $C := \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2-1| \leq \varepsilon\}$,

(d) $D := \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2-2| \geq \varepsilon\}$.

Aufgabe 10

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Für $r, s \in \mathbb{Q}$ und $a, b \in (0, \infty)$ gilt

$$a^s \cdot a^r = a^{s+r}, \qquad a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r \qquad \text{und} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s}.$$

(b) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

(c) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$||a| - |b|| \leqslant |a-b|.$$

(d) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$$

und es gilt "$>$" wenn $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.