KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
M. Sc. Christopher Bresch

WS 2021/2022
06.10.2021

Mathematischer Vorkurs

Lösungsvorschläge zum 3. Aufgabenblatt

Aufgabe 11

Voraussetzung: Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und die Gleichung

(1) $$ax^2 + bx + c = d\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,,$$

gegeben.

Behauptung: Für $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c-d}{a}$ gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$x \text{ ist eine Lösung von (1)} \iff x \text{ ist eine Lösung von } x^2 + px + q = 0\,, \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,.$$

Beweis: Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \text{ ist eine Lösung von (1)} \quad &\iff ax^2 + bx + c - d = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c-d}{a} = 0 \\ &\iff x^2 + px + q = 0\,. \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 12

Wir werden jeweils die Lösung einer quadratischen Gleichung und einer quadratischen Ungleichung ausführlich vorführen und bei den restlichen Aufgaben nur noch die Lösungen angeben, da die Vorgehensweise immer die Gleiche ist.

(a) Für die quadratische Gleichung

$$x^2 - x - 2 = 0\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,,$$

gilt $\mathbb{L} = \{-1, 2\}$, denn für $x \in \mathbb{R}$ gilt per quadratische Ergänzung

$$x^2 - x - 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

und daher

$$x^2 - x - 2 = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \iff |x - \frac{1}{2}| = \frac{3}{2} \iff x = -1 \ \vee \ x = 2\,.$$

(b) $\mathbb{L} = \{3, 4\}$.

(c) $\mathbb{L} = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$.

(d) $\mathbb{L} = \{-5, 1\}$.

(e) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

(f) $\mathbb{L} = \{4\}$.

(g) $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$.

(h) $\mathbb{L} = \emptyset$.

(i) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

(j) Wir wollen die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von der quadratischen Ungleichung

$$-x^2 + 4x + 21 > 0, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}$$

bestimmen. Dazu lösen wir zuerst die quadratische Gleichung

$$-x^2 + 4x + 21 = 0, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}$$

durch quadratische Ergänzung. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$-x^2+4x+21 = -(x^2-4x-21) = -(x^2-4x+4-25) = -((x-2)^2-25) = 25-(x-2)^2$$

und daher

$$-x^2 + 4 + 21 = 0 \iff (x-2)^2 = 25 \iff |x-2| = 5 \iff x = -3 \ \vee \ x = 7.$$

Dann folgt durch Faktorisierung

$$-x^2 + 4x + 21 = -(x+3)(x-7)$$

und folglich

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x + 21 > 0 \quad &\iff \quad -(x+3)(x-7) > 0 \iff (x+3)(x-7) < 0 \\ &\iff \quad (x < -3 \ \wedge \ x > 7) \ \vee \ (x > -3 \ \wedge \ x < 7) \iff x \in (-3, 7). \end{aligned}$$

Somit gilt $\mathbb{L} = (-3, 7)$.

Aufgabe 13

Voraussetzung: Es seien $p, q \in \mathbb{R}$ und die quadratische Gleichung

(2) $$x^2 + px + q = 0\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,,$$

gegeben.

Behauptung:

$\mathbb{L} = \emptyset$ genau dann wenn $\dfrac{p^2}{4} - q < 0\,,$

$\mathbb{L}$ hat genau ein Element, wenn $\dfrac{p^2}{4} - q = 0\,,$

$\mathbb{L}$ hat genau zwei Elemente, wenn $\dfrac{p^2}{4} - q > 0\,.$

Beweis: Nach Vorlesung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\,.$$

Dann gilt

(3) $$x^2 + px + q = 0 \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q\,.$$

Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt nun $y^2 = (-y)^2 \geqslant 0$ und $y^2 = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$. Daher hat die obige Gleichung (3) genau dann

$$\begin{aligned} \text{keine Lösung, wenn } & \frac{p^2}{4} - q < 0\,, \\ \text{eine Lösung, wenn } & \frac{p^2}{4} - q = 0\,, \\ \text{zwei Lösungen, wenn } & \frac{p^2}{4} - q > 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 14

(a)

(i) Wir bestimmen die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Wurzelgleichung

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x} + 1 = 0\,, \qquad \mathbb{D} = [0, \infty)\,.$$

Für $x \in [0, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{x+6} + \sqrt{x} + 1 = 0 \;&\Longleftrightarrow\; \sqrt{x+6} = -1 - \sqrt{x} \;\Rightarrow\; x + 6 = 1 + 2\sqrt{x} + x \\ &\Longleftrightarrow\; \frac{5}{2} = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; x = \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

Eine Probe liefert

$$\sqrt{\frac{25}{4} + 6} + \frac{5}{2} + 1 > 0$$

und daher ist $\frac{25}{4}$ keine Lösung und $\mathbb{L} = \emptyset$.

(ii) $\mathbb{L} = \{13\}\,.$

(iii) $\mathbb{L} = \{\frac{23}{5}\}\,.$

(iv) $\mathbb{L} = \{1\}\,.$

(b) $\mathbb{D} = [-3, \infty)$ und $\mathbb{L} = \{9\}\,.$

Aufgabe 15

(a)

(i) Wir bestimmen die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Bruchungleichung

$$\frac{1}{x-3} \leqslant 1\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}\,,$$

durch Fallunterscheidung.

1.Fall: Für $x \in (-\infty, 3)$ gilt

$$\frac{1}{x-3} \leqslant 1 \;\wedge\; x < 3 \;\Longleftrightarrow\; 1 \geqslant x - 3 \;\wedge\; x < 3 \;\Longleftrightarrow\; x \leqslant 4 \;\wedge\; x < 3\,,$$

also $\mathbb{L}_1 = (-\infty, 3)\,.$

2.Fall: Für $x \in (3, \infty)$ gilt

$$\frac{1}{x-3} \leqslant 1 \ \wedge \ x > 3 \iff 1 \leqslant x-3 \ \wedge \ x > 3 \iff 4 \leqslant x \ \wedge \ x > 3\,,$$

also $\mathbb{L}_2 = [4, \infty)$.

Insgesamt gilt

$$\mathbb{L} = (\mathbb{L} \cap (-\infty, 3)) \ \cup \ (\mathbb{L} \cap (3, \infty)) = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty, 3) \cup [4, \infty)\,.$$

(ii) $\mathbb{L} = (-\infty, 2) \cup [\frac{11}{4}, \infty)$.

(iii) $\mathbb{L} = (-1, \infty)$.

(iv) $\mathbb{L} = (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{7}, 1)$.

(b)

(i) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $\mathbb{L} = (-\infty, -\frac{3}{4}] \cup (1, \infty)$.

(ii) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $\mathbb{L} = (-\infty, -\frac{3}{8}] \cup (1, \infty)$.

Aufgabe 16

(a)

(i) Wir bestimmen die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Betragsungleichung

$$|2x-3| < x\,, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\,,$$

durch Fallunterscheidung.

1.Fall: Für $x \in (-\infty, \frac{3}{2})$ gilt

$$\begin{aligned} |2x-3| < x \ \wedge \ x < \frac{3}{2} &\iff -(2x-3) < x \ \wedge \ x < \frac{3}{2} \iff -3x < -3 \ \wedge \ x < \frac{3}{2} \\ &\iff x > 1 \ \wedge \ x < \frac{3}{2} \iff x \in (1, \frac{3}{2}), \end{aligned}$$

also $\mathbb{L}_1 = (1, \frac{3}{2})$.

2.Fall: Für $x \in [\frac{3}{2}, \infty)$ gilt

$$|2x-3| < x \ \wedge \ x \geqslant \frac{3}{2} \iff 2x-3 < x \ \wedge \ x \geqslant \frac{3}{2} \iff x < 3 \ \wedge \ x \geqslant \frac{3}{2} \iff x \in [\frac{3}{2}, 3),$$

also $\mathbb{L}_2 = [\frac{3}{2}, 3)$.

Insgesamt gilt

$$\mathbb{L} = (\mathbb{L} \cap (-\infty, \frac{3}{2})) \ \cup \ (\mathbb{L} \cap [\frac{3}{2}, \infty)) = \mathbb{L}_1 \ \cup \ \mathbb{L}_2 = (1, 3).$$

(ii) $\mathbb{L} = (-1, 5)$.

(iii) $\mathbb{L} = (0, 6)$.

(iv) $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$.

(v) $\mathbb{L} = (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$.

(vi) $\mathbb{L} = (-1, -\frac{1}{3}]$.

(b)

(i) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{L} = (\frac{3}{2}, \infty)$.

(ii) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ und $\mathbb{L} = (-\infty, 1] \setminus \{-4\}$.