KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
M. Sc. Christopher Bresch

WS 2021/2022
08.10.2021

Mathematischer Vorkurs

5. Aufgabenblatt

Aufgabe 22

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine lineare Funktion. Zeigen Sie:
Es existiert genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = bx$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 23

(a) Machen Sie sich die folgenden Gleichungen, gültig für alle $x \in \mathbb{R}$, anschaulich klar und beweisen Sie diese unter Verwendung der Additionstheoreme.

(i) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)\,,$ (ii) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)\,,$

(iii) $\sin(x + \pi) = -\sin(x)\,,$ (iv) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)\,.$

(b) Beweisen Sie unter Verwendung der Identität $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$ und der Additionstheoreme die folgenden Gleichungen, gültig für alle $x \in \mathbb{R}$.

(i) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)\,,$ (ii) $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))\,,$

(iii) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)\,,$ (iv) $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\,.$

Aufgabe 24

Vervollständigen Sie die Tabelle. Hierbei steht Bm für Bogenmaß.

x in °	x im Bm	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0°				
30°				
	$\frac{\pi}{4}$			
	$\frac{\pi}{3}$			
90°				
120°				
135°				
150°				
	π			

x in °	x im Bm	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
210°				
225°				
240°				
270°				
300°				
315°				
330°				
360°				
15°				

— bitte wenden —

Aufgabe 25

Es seien

$$X = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\}$$

der Definitionsbereich des Tangens aus der Vorlesung und $x, y \in X$ mit

$$x + y \in X \quad \text{und} \quad \tan(x) \cdot \tan(y) \neq 1\,.$$

Zeigen Sie

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}\,.$$

Aufgabe 26

Führen Sie jeweils eine Polynomdivision für die folgenden Paare an Polynomfunktionen aus.

(i) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1)\,,$

(ii) $(x^3 - 10x^2 + 29x - 20) : (x - 5)\,,$

(iii) $(x^3 - x^2 - 7x + 5) : (x + 3)\,,$

(iv) $(3x^4 + x^3 - 13x^2 + x + 5) : (x^2 + 2x - 1)\,.$

Aufgabe 27

Bestimmen Sie jeweils alle reellen Nullstellen der folgenden Polynomfunktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) $p(x) = x^2 - 1,$

(ii) $p(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12,$

(iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - 19x - 20,$

(iv) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4,$

(v) $p(x) = x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 9x^2,$

(vi) $p(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8.$

Aufgabe 28

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(i) $\frac{5}{6} : \frac{2}{3},$

(ii) $\frac{105}{51} : \frac{110}{34}$

(iii) $\frac{385}{266} : \frac{165}{38},$

(iv) $\frac{102}{35} : \frac{17}{245},$

(v) $\frac{1}{8} - \frac{1}{6},$

(vi) $\frac{1}{32} - \frac{1}{4},$

(vii) $\frac{11}{70} + \frac{12}{95},$

(viii) $\frac{1}{3} + \frac{1}{15},$

(ix) $\frac{1}{2} - \frac{10}{21},$

(x) $\frac{505050505}{1212121212} - \frac{202}{505}.$