KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
M. Sc. Christopher Bresch

WS 2021/2022
08.10.2021

Mathematischer Vorkurs

Lösungsvorschläge zum 5. Aufgabenblatt

Aufgabe 22

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion.

Behauptung: Es existiert genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = bx$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt aufgrund der Linearität von f, dass

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1).$$

Setzen wir $b = f(1)$ ist die Existenz gezeigt. Wenden wir uns der Eindeutigkeit zu. Sei $\tilde{b} \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \tilde{b}x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt insbesondere

$$\tilde{b} = \tilde{b} \cdot 1 = f(1) = b$$

und damit haben wir die Eindeutigkeit gezeigt. □

Aufgabe 23

(a)

(i) *Behauptung:* Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.

Anschauliche Erläuterung: Graph(cos) entsteht aus Graph(sin) durch eine Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links.

Beweis: Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \cos(x) \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = \cos(x)\,.$$

□

(ii) *Behauptung:* Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$.

Anschauliche Erläuterung: Verschiebt man Graph(cos) um $\frac{\pi}{2}$ nach links und spiegelt das an der x-Achse, so erhält man Graph(sin).

Beweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)\,.$$

□

(iii) *Behauptung:* Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$.

Anschauliche Erläuterung: Verschieben von Graph(sin) um π nach links ergibt Graph($-\sin$).

Beweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x+\pi) = \sin(x)\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \cos(x)\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = -\sin(x)\,.$$

$\square$

(iv) *Behauptung:* Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$.

Beweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x+\pi) = \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x).$$

$\square$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$.

(i) $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

(ii) Durch Addition der beiden Gleichungen $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ und $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ erhalten wir $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$, woraus direkt die Behauptung folgt.

(iii) $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

(iv) Durch Subtraktion der beiden Gleichungen $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ und $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ erhalten wir $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$, woraus direkt die Behauptung folgt.

Aufgabe 24

x in °	x im Bm	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0

x in °	x im Bm	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	-
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
360°	2π	0	1	0
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

Aufgabe 25

Voraussetzung: Es seien

$$X = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\}$$

und $x, y \in X$ mit $x + y \in X$ und $\tan(x)\tan(y) \neq 1$.

Behauptung: Für $x \in X$ ist der mathematische Ausdruck $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und daher der Tangens definiert. Es gilt

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} .$$

Beweis: Da $x, y \in X$ gilt $\cos(x), \cos(y) \neq 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} &= \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} \\
&= \frac{1}{\cos(x)\cos(y)} \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\frac{\sin(y)}{\cos(y)}} \\
&= \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \tan(x)\tan(y)} = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} .
\end{aligned}$$

Bemerkung: An der Rechnung sieht man, dass $x + y \in X$ schon aus den anderen Annahmen folgt. $\square$

Aufgabe 26

(i) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$,

(ii) $(x^3 - 10x^2 + 29x - 20) = (x-5)(x^2 - 5x + 4)$,

(iii) $(x^3 - x^2 - 7x + 5) = (x+3)(x^2 - 4x + 5) - 10$,

(iv) $(3x^4 + x^3 - 13x^2 + x + 5) = (x^2 + 2x - 1)(3x^2 - 5x) - 4x + 5$.

Aufgabe 27

(i) $-1, 1$,

(ii) $-3, 2, 2$,

(iii) $-1, -5, 4$,

(iv) $\frac{1}{2}, -2, 2$,

(v) $0, 0, 1$,

(vi) $-4, -1, 1, 2$.

Aufgabe 28

(i) $\frac{5}{4}$,

(ii) $\frac{7}{11}$

(iii) $\frac{1}{3}$,

(iv) 42,

(v) $-\frac{1}{24}$,

(vi) $-\frac{7}{32}$,

(vii) $\frac{377}{1330}$,

(viii) $\frac{2}{5}$,

(ix) $\frac{1}{42}$,

(x) $\frac{1}{60}$.