Arch. Math., Vol. 55, 484–489 (1990) 0003-889X/90/5505-0484 $ 2.70/0

Ein Spektralabbildungssatz

Von

CH. SCHMOEGER

1. Einleitung. In dieser Arbeit bezeichne X einen komplexen Banachraum, $L(X)$ die Banachalgebra der stetigen Endomorphismen auf X und I die identische Abbildung auf X. Mit $N(T)$, $T(X)$, $\sigma(T)$ und $\varrho(T)$ bezeichnen wir beziehentlich Nullraum, Bildraum, Spektrum und Resolventenmenge des Operators $T \neq 0$ in $L(X)$.

T. Kato zeigt in [3] (Theorem 3, S. 297), daß die Menge

$$\varrho_K(T) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T)(X) \text{ ist abgeschlossen und } N(\lambda I - T) \subseteqq \bigcap_{n=1}^{\infty} (\lambda I - T)^n(X)\right\}$$

eine offene Teilmenge der komplexen Ebene ist. Man beachte hierbei, daß die Katosche Bedingung $v(\lambda I - T : I) = \infty$ gleichbedeutend mit $N(\lambda I - T) \subseteqq \bigcap_{n=1}^{\infty} (\lambda I - T)^n(X)$ ist (s. [3], S. 290).

Da $\varrho_K(T)$ die Resolventenmenge $\varrho(T)$ umfaßt, ist das Komplement

$$\sigma_K(T) := \mathbb{C} \backslash \varrho_K(T)$$

eine kompakte Teilmenge des Spektrums $\sigma(T)$. In Satz 2 der vorliegenden Arbeit werden wir sehen, daß $\sigma_K(T)$ stets nicht leer ist.

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Spektralabbildungssatz für die Menge $\sigma_K(T)$ zu beweisen.

Welche Rolle die Menge $\varrho_K(T)$ in der Operatorentheorie spielt, soll nun geschildert werden.

K. H. Förster beweist in [1] (Theorem 3) den folgenden

Satz 1. *In jeder Zusammenhangskomponente von $\varrho_K(T)$ sind die Räume*

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} N((\lambda I - T)^n)} \quad \text{und} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} (\lambda I - T)^n(X)$$

unabhängig von λ.

Bekanntlich nennt man $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ einen Semifredholmpunkt von T, wenn $\beta(\lambda_0 I - T) := \operatorname{codim}(\lambda_0 I - T)(X) < \infty$ oder $\alpha(\lambda_0 I - T) := \dim N(\lambda_0 I - T) < \infty$ und $(\lambda_0 I - T)(X)$ abgeschlossen ist. Nach Theorem 6 in [3] (S. 316) gilt nun: Die Menge der Semifredholmpunkte von T ist offen, und in jeder Zusammenhangskomponente Γ dieser Menge sind die Defekte $\alpha(\lambda I - T)$ und $\beta(\lambda I - T)$ konstant, mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge, die in Γ keine Häufungspunkte besitzt. Außerdem ist der Index von $\lambda I - T$, also die Größe $\alpha(\lambda I - T) - \beta(\lambda I - T)$, konstant. Daher ist für einen Semifredholmpunkt λ_0 die folgende Definition sinnvoll (vgl. [4]):

$$j(\lambda_0) := \begin{cases} \alpha(\lambda_0 I - T) - \alpha(\lambda I - T), & \text{falls } \alpha(\lambda_0 I - T) < \infty \\ \beta(\lambda_0 I - T) - \beta(\lambda I - T), & \text{falls } \beta(\lambda_0 I - T) < \infty, \end{cases}$$

wobei $\lambda \neq \lambda_0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von λ_0 liegen soll.

Aus Theorem 3 und Theorem 5 in [3] (S. 298 bzw. 315) folgt, daß für einen Semifredholmpunkt λ_0 gilt:

$$j(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 \in \varrho_K(T).$$

Die geschilderten Eigenschaften der Menge $\varrho_K(T)$ zeigen, daß man ihre Punkte in einem gewissen Sinne als „gutartig“ betrachten kann.

2. Hilfsmittel. Einen Beweis des ersten Hilfssatzes findet man in [2] (Satz 80.1 c)).

Hilfssatz 1. *Sind λ_1 und λ_2 zwei verschiedene komplexe Zahlen, so gilt:*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} N((\lambda_1 I - T)^n) \subseteqq \bigcap_{n=1}^{\infty} (\lambda_2 I - T)^n (X).$$

Hilfssatz 2. *Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, dann gilt für das Polynom $p(\lambda) := \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$:*

$$N(p(T)) = N((T - \lambda_1 I)^{n_1}) \oplus \cdots \oplus N((T - \lambda_k I)^{n_k})$$

und

$$p(T)(X) = \bigcap_{i=1}^{k} (T - \lambda_i I)^{n_i}(X).$$

Beweis. Die erste Aussage ergibt sich aus Satz 80.1 a) in [2], während man die zweite mit Aufgabe 80.5 in [2] einsehen kann. □

Den folgenden Hilfssatz haben wir [3] entnommen (Lemma 511 (S. 289) und die daran anschließenden Bemerkungen).

Hilfssatz 3. *Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $N(\lambda I - T) \subseteqq \bigcap_{n=1}^{\infty} (\lambda I - T)^n(X)$.

(b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} N((\lambda I - T)^n) \subseteqq (\lambda I - T)(X)$.

(c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} N((\lambda I - T)^n) \subseteqq \bigcap_{n=1}^{\infty} (\lambda I - T)^n(X)$.

3. Eigenschaften von $\sigma_K(T)$. Für eine Menge $M \subseteqq \mathbb{C}$ sei ∂M die Menge ihrer Randpunkte.

Satz 2.
(a) *Ist C eine Zusammenhangskomponente des Spektrums $\sigma(T)$, so gilt $\partial C \subseteqq \sigma_K(T)$.*
(b) $\partial\sigma(T) \subseteqq \sigma_K(T)$.

Insbesondere ist also $\sigma_K(T) \neq \emptyset$ und jede Zusammenhangskomponente von $\sigma(T)$ trifft $\sigma_K(T)$.

B e w e i s. (a) Wir nehmen an, für ein $\lambda_0 \in \partial C$ gelte $\lambda_0 \in \varrho_K(T)$. Es bezeichne K diejenige Komponente von $\varrho_K(T)$, für die $\lambda_0 \in K$ gilt. Wegen $\lambda_0 \in \partial\sigma(T)$ und der Offenheit von K bekommen wir $K \cap \varrho(T) \neq \emptyset$. Hieraus erhält man mit Satz 1

$$N(\lambda I - T) = \{0\} \quad \text{und} \quad (\lambda I - T)(X) = X \quad \text{für jedes } \lambda \in K,$$

woraus sich wegen $\lambda_0 \in K$ der Widerspruch $\lambda_0 \in \varrho(T)$ ergibt.

(b) ergibt sich aus (a) und der Beziehung $\partial C = C \cap \partial\sigma(T)$ für jede Zusammenhangskomponente C von $\sigma(T)$. □

Ist $T \in L(X)$, so sei $H(T)$ die Menge aller komplexwertigen Funktionen f, die auf einer offenen Umgebung $\Delta(f)$ des Spektrums holomorph sind. Der Operator $f(T)$ für $f \in H(T)$ ist dann durch den bekannten Riesz-Dunfordschen Funktionalkalkül erklärt (s. [2], § 99).

Der nächste Satz wird uns beim Beweis des Spektralabbildungssatzes von Nutzen sein.

Satz 3. *Ist $g \in H(T)$ und verschwindet g in keinem Punkt von $\sigma_K(T)$, so besitzt g in $\sigma(T)$ höchstens endlich viele Nullstellen.*

B e w e i s. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann besitzt die Nullstellenmenge von g einen Häufungspunkt λ_0 in $\sigma(T)$. Wir bezeichnen mit C die Zusammenhangskomponente von $\sigma(T)$, die den Punkt λ_0 enthält und mit K diejenige Komponente des Definitionsbereiches von g, für die $\lambda_0 \in K$ gilt. Dann ist $C \subseteqq K$ und $g \equiv 0$ auf K. Aus Satz 2 erhalten wir $C \cap \sigma_K(T) \neq \emptyset$, also auch $K \cap \sigma_K(T) \neq \emptyset$. Somit besitzt g doch Nullstellen in $\sigma_K(T)$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

4. Eigenschaften der Menge $\varrho_K(T)$.

Satz 4. *Für $\lambda \in \varrho_K(T)$ und $n \in \mathbb{N}$ ist der Bildraum von $(\lambda I - T)^n$ abgeschlossen.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\lambda = 0$. Wir zeigen die Abgeschlossenheit von $T^n(X)$ induktiv. $T(X)$ ist nach Voraussetzung abgeschlossen. Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei die Abgeschlossenheit von $T^n(X)$ schon gezeigt. Setzt man $M := T(X)$, so folgt aus $N(T) \subseteqq \bigcap_{k=1}^{\infty} T^k(X)$ und Hilfssatz 3 die Inklusion $N(T^n) \subseteqq M$, woraus sich $M + N(T^n) = M$ ergibt. Damit ist die Summe $M + N(T^n)$ abgeschlossen. Wendet man Lemma 311 aus [3] (S. 274) auf den Operator T^n an, so folgt die Abgeschlossenheit von $T^n(M) = T^{n+1}(X)$. $\square$

Satz 5. *Ist $S \in L(X)$ ein Operator mit $TS = ST$ und $0 \in \varrho_K(TS)$, so folgt*

$$0 \in \varrho_K(T) \cap \varrho_K(S).$$

Beweis. Es genügt, $0 \in \varrho_K(T)$ zu beweisen. Wegen $0 \in \varrho_K(TS)$ und $TS = ST$ erhalten wir zunächst

$$N(T) \subseteqq N(TS) \subseteqq \bigcap_{n=1}^{\infty} (T^n S^n)(X) \subseteqq \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(X). \tag{1}$$

Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit von $T(X)$. Dazu sei (y_n) eine konvergente Folge in $T(X)$ und $y_0 := \lim_{n \to \infty} y_n$. In X wählen wir eine Folge (x_n) mit $Tx_n = y_n$. Für die Folge $(S y_n)$ gilt dann

$$S y_n = S T x_n = T S x_n \in (TS)(X) \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} S y_n = S y_0.$$

Wegen der Abgeschlossenheit von $(TS)(X)$ erhalten wir $S y_0 \in (TS)(X) = (ST)(X)$. Daher gibt es in X ein z_0 mit $S y_0 = S T z_0$. Der letzten Gleichung entnimmt man

$$y_0 - T z_0 \in N(S) \subseteqq N(TS).$$

Aus (1) ergibt sich dann $y_0 - T z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(X)$, insbesondere $y_0 - T z_0 \in T(X)$. Damit ist $y_0 \in T(X)$ gezeigt. Der Bildraum $T(X)$ ist also abgeschlossen, woraus sich mit (1) schließlich $0 \in \varrho_K(T)$ ergibt. $\square$

5. Der Spektralabbildungssatz. Er lautet so:

Satz 6. *Für jedes $f \in H(T)$ gilt $\sigma_K(f(T)) = f(\sigma_K(T))$.*

Beweis. Wir beweisen zuerst die Inklusion $f(\sigma_K(T)) \subseteqq \sigma_K(f(T))$. Dazu nehmen wir an, es sei $\lambda_0 \notin \sigma_k(f(T))$ und zeigen, daß dann auch $\lambda_0 \notin f(\sigma_K(T))$ gilt. Angenommen, es sei $\lambda_0 \in f(\sigma_K(T))$. Aus dieser Annahme erhalten wir die Existenz eines $\mu_0 \in \sigma_K(T)$ mit $f(\mu_0) = \lambda_0$. Die Funktion g sei durch $g(\lambda) := \lambda_0 - f(\lambda)$ erklärt. Dann gilt $g \in H(T)$ und $g(\mu_0) = 0$, daher gibt es in $H(T)$ ein h mit

$$g(\lambda) = (\mu_0 - \lambda) h(\lambda).$$

Es folgt $g(T) = (\mu_0 I - T) h(T)$. Aus $\lambda_0 \in \varrho_K(f(T))$ ergibt sich

$$0 \in \varrho_K(g(T)) = \varrho_K((\mu_0 I - T) h(T)).$$

Mit Satz 5 erhalten wir daher

$$0 \in \varrho_K(\mu_0 I - T), \quad \text{also} \quad \mu_0 \in \varrho_K(T).$$

Dieser Widerspruch zu $\mu_0 \in \sigma_K(T)$ zeigt uns $\lambda_0 \notin f(\sigma_K(T))$. Damit ist $f(\sigma_K(T)) \subseteqq \sigma_K(f(T))$ bewiesen.

Um die umgekehrte Inklusion $\sigma_K(f(T)) \subseteqq f(\sigma_K(T))$ zu zeigen, sei $\lambda_0 \notin f(\sigma_K(T))$. Wir setzen wieder $g(\lambda) := \lambda_0 - f(\lambda)$. Dann ist $g(\lambda) \neq 0$ für jedes $\lambda \in \sigma_K(T)$. Besitzt g in $\sigma(T)$ keine Nullstellen, so ist $g(T) = \lambda_0 I - f(T)$ invertierbar, also $\lambda_0 \in \varrho(f(T)) \subseteqq \varrho_K(f(T))$, woraus wir $\lambda_0 \notin \sigma_K(f(T))$ erhalten.

Zu betrachten ist also noch der Fall, daß g in $\sigma(T)$ Nullstellen besitzt. Wegen Satz 3 hat g in $\sigma(T)$ nur endlich viele Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$) mit den Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k$. Wegen $g(\lambda) \neq 0$ für $\lambda \in \sigma_K(T)$ gilt

$$\lambda_i \in \varrho_K(T) \quad \text{für } i = 1, \ldots, k. \tag{2}$$

Mit einer geeigneten Funktion $h \in H(T)$, die auf $\sigma(T)$ nicht verschwindet, läßt sich g in der Form

$$g(\lambda) = \left(\prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}\right) h(\lambda)$$

darstellen. Setzen wir abkürzend $p(\lambda) := \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, so gilt

$$g(T) = p(T)h(T) = h(T)p(T),$$

wobei $h(T)$ in $L(X)$ invertierbar ist. Aus Hilfssatz 2 folgt daher

$$N(g(T)) = N(p(T)) = N((T - \lambda_1 I)^{n_1}) \oplus \cdots \oplus N((T - \lambda_k I)^{n_k}) \tag{3}$$

und

$$g(T)^m(X) = p(T)^m(X) = \bigcap_{i=1}^{k} (T - \lambda_i I)^{n_i m}(X) \tag{4}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$. Mit der Abkürzung $D_i := \bigcap_{m=1}^{\infty} (T - \lambda_i I)(X)$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \bigcap_{m=1}^{\infty} g(T)^m(X) &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{k} (T - \lambda_i I)^{n_i m}(X) \\ &= \bigcap_{i=1}^{k} \bigcap_{m=1}^{\infty} (T - \lambda_i I)^{n_i m}(X) \\ &= \bigcap_{i=1}^{k} \bigcap_{m=1}^{\infty} (T - \lambda_i I)^{m}(X) = \bigcap_{i=1}^{k} D_i . \end{aligned} \tag{5}$$

Wir zeigen nun

$$N(g(T)) \subseteqq \bigcap_{i=1}^{k} D_i .$$

Dazu sei $x \in N(g(T))$. Wegen (3) läßt sich x in der Form $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$ mit $x_i \in N((T - \lambda_i I)^{n_i})$ schreiben. Da jedes λ_i zu $\varrho_K(T)$ gehört, folgt aus den Hilfssätzen 1 und 3 die Beziehung $x_i \in D_j$ für $i, j = 1, \ldots, k$. Damit ist $x_i \in \bigcap_{j=1}^{k} D_j$ für jedes i, woraus $x \in \bigcap_{j=1}^{k} D_j$ folgt. Mit (5) erhalten wir dann

$$N(g(T)) \subseteqq \bigcap_{m=1}^{\infty} g(T)^m(X). \tag{6}$$

Mit Satz 4 und (4) ergibt sich schließlich noch die Abgeschlossenheit des Bildraumes $g(T)(X)$ und daraus mit (6)

$$0 \in \varrho_K(g(T)) = \varrho_K(\lambda_0 I - f(T)),$$

also $\lambda_0 \notin \sigma_K(f(T))$. Somit haben wir auch $\sigma_K(f(T)) \subseteqq f(\sigma_K(T))$ gezeigt. $\square$

Zusatz bei der Korrektur.*) Nachdem die vorliegende Arbeit zum Druck angenommen wurde, ist eine Arbeit von M. Mbekhta (Résolvant généralisé et théorie spectrale, J. Operator Theory **21**, 69–105 (1989)) erschienen, die einen Beweis des obigen Spektralabbildungssatzes enthält, allerdings nur für Operatoren auf Hilberträumen.

Literaturverzeichnis

[1] K. H. Förster, Über die Invarianz einiger Räume, die zum Operator $T - \lambda A$ gehören. Arch. Math. **17**, 56–64 (1966).
[2] H. Heuser, Funktionalanalysis. 2. Aufl., Stuttgart 1986.
[3] T. Kato, Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators. J. Analyse Math. **6**, 261–322 (1958).
[4] T. T. West, A Riesz-Schauder theorem for Semi-Fredholm operators. Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **87**, 137–146 (1987).

Eingegangen am 18. 4. 1989

Anschrift des Autors:

Ch. Schmoeger
Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut I
Englerstr. 2
D-7500 Karlsruhe 1

*) Eingegangen am 12. 2. 1990.