

Analysis für das Lehramt

Skriptum Sommersemester 2019

Dieses Skriptum folgt meiner Vorlesung im Sommersemester 2019, wobei gelegentlich kleinere Korrekturen und Ergänzungen vorgenommen wurden. Die Beweise und Rechnungen im Skriptum sind typischerweise etwas knapper gehalten als in der Vorlesung. Es fehlen darüber hinaus die meisten Schaubilder und die Mehrzahl der mündlichen Erläuterungen aus der Vorlesung.

Die Verweise auf Analysis 1–4 beziehen sich auf meine gleichnamigen Skripten aus den Jahren 2022–22. Ich verwende vereinzelt Begriffe, Notationen und Standardresultate aus den Skripten Analysis 1 und 2 ohne weiteren Kommentar.

Ich bedanke mich herzlich bei Esther Bleich und Andreas Geyer-Schulz für die Erstellung der Bilder.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Komplexe Ableitung und Kurvenintegrale	1
1.1. Holomorphie	1
1.2. Wurzel und Logarithmus	7
1.3. Komplexe Kurvenintegrale	11
Kapitel 2. Der Cauchysche Integralsatz und seine Folgerungen	18
2.1. Cauchys Integralsatz und -formel	18
2.2. Folgerungen aus dem Integralsatz	23
2.3. Isolierte Singularitäten	25
Kapitel 3. Das Riemannsches Integral und Volumenberechnung	32
3.1. Der Jordansche Inhalt	32
3.2. Das Riemannsches Integral	35
3.3. Berechnung von Integralen und Volumina	38
3.4. Oberflächeninhalt und -integral	51
Kapitel 4. Gewöhnliche Differentialgleichungen	56
4.1. Einführung	56
4.2. Lineare Probleme	60
4.3. Wohlgestelltheit und globale Existenz	68
4.4. Langzeitverhalten	74
Literaturverzeichnis	79

KAPITEL 1

Komplexe Ableitung und Kurvenintegrale

In den ersten beiden Kapiteln sei stets D eine nichtleere offene Teilmenge von \mathbb{C} . Wir werden im ersten Drittel der Vorlesung die grundlegenden Aussagen der Differentialrechnung im Komplexen darstellen. Im Deutschen nennt man dieses Gebiet der Mathematik auch *Funktionentheorie*. Im ersten Kapitel beginnen wir mit einigen Vorbereitungen und Beispielen.

1.1. Holomorphie

Wie in Analysis 1 besprochen, werden die komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} := \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} z + w &= (x + iy) + (u + iv) := (x + u) + i(y + v), \\ zw &= z \cdot w = (x + iy) \cdot (u + iv) := (xu - yv) + i(xv + yu) \end{aligned}$$

versehen, wobei $i^2 = -1$ und $w = u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ sind. Man beachte, dass in den Klammern rechts nur reelle Operationen auftreten. Wir identifizieren \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 via der Abbildung $z = x + iy \mapsto (x, y)$. Reell geschrieben wird die komplexe Multiplikation dann zu einem Matrix-Vektor Produkt der Form

$$zw = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -\frac{y}{r} \\ \frac{y}{r} & \frac{x}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ für $z \neq 0$. Die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -\frac{y}{r} \\ \frac{y}{r} & \frac{x}{r} \end{pmatrix}$$

ist orthogonal mit $\det D = 1$, sodass die komplexe Multiplikation $w \mapsto zw$ reell betrachtet eine durch x und y bestimmte Drehstreckung ist.

Weiter definieren wir für die Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ihre *komplex Konjugierte*

$$\bar{z} := x - iy,$$

ihren *Real- und Imaginärteil*

$$\operatorname{Re} z := x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z := y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

sowie ihren *Betrag*

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}, \quad |z|^2 = z\bar{z}.$$

Der Kehrwert von $z \neq 0$ ist dann durch

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

gegeben. Wir fügen ein Zahlenbeispiel an. Es gilt

$$z := \frac{2 + 3i}{-1 + 2i} = \frac{(2 + 3i)(1 + 2i)}{(-1 + 2i)(1 + 2i)} = \frac{2 + 4i + 3i + 6i^2}{-1 + 4i^2} = \frac{-4 + 7i}{-5} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Daraus ergeben sich die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \frac{4}{5}, & \operatorname{Im} z &= -\frac{7}{5}, & -z &= -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i, & \bar{z} &= \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i, \\ |z| &= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{65}}{5}, & \frac{1}{z} &= \frac{-1 + 2i}{2 + 3i} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{25}{65} \left(\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i \right) = \frac{1}{13}(4 + 7i). \end{aligned}$$

Für $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ haben wir auch die Polardarstellung $z = re^{i\phi} = r \exp(i\phi)$ mit $r = |z|$ und dem *Argument*

$$(-\pi, \pi] \ni \phi = \arg z := \begin{cases} \arccos \frac{x}{r}, & y > 0, \\ 0, & z \in (0, +\infty) =: \mathbb{R}_+, \\ -\arccos \frac{x}{r}, & y < 0, \\ \pi, & z \in (-\infty, 0) =: \mathbb{R}_-, \end{cases}$$

vergleiche Satz 4.49 in Analysis 1 und Beispiel 3.16 in Analysis 2. Es gelten also $\pm i = e^{\pm i\pi/2}$ oder $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Mit den Regeln für \exp aus (1.3) (oder Beispiel 3.25 in Analysis) ergeben sich für das Produkt und die Konjugierte der komplexen Zahlen $z = re^{i\phi}$ und $w = se^{i\psi}$ die weiteren Darstellungen

$$zw = rse^{i(\phi+\psi)} = |z||w|e^{i(\phi+\psi)} \quad \text{bzw.} \quad \bar{z} = re^{-i\phi}.$$

Wir schreiben ferner

$$B(c, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\} \quad \text{und} \quad \bar{B}(c, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leq r\}$$

für die offene bzw. abgeschlossene Kreisscheibe in \mathbb{C} mit Mittelpunkt $c \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$. Hierbei stimmt die Norm von $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ mit der von $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_2)$ überein. Diese Räume haben deswegen die gleichen Eigenschaften bzgl. Konvergenz, Stetigkeit, Offenheit usw. Außerdem gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} z_n \rightarrow z \text{ in } \mathbb{C} \text{ für } n \rightarrow \infty &\iff \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z \text{ und } \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z \\ &\text{in } \mathbb{R} \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Für komplexe Funktionen kann man die Ableitung genauso wie im Reellen durch den Differenzenquotienten einführen.

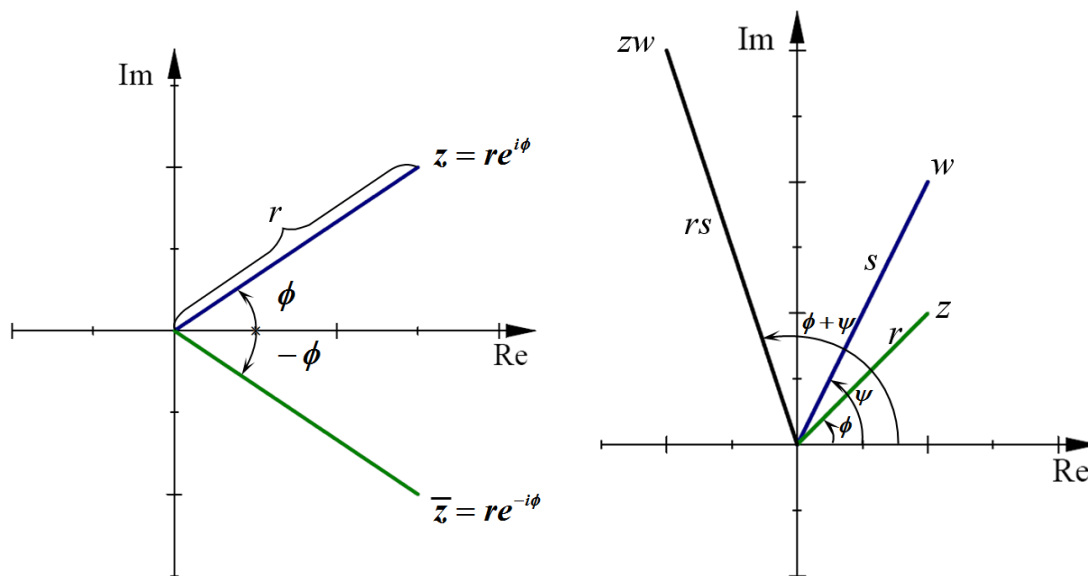


ABBILDUNG 1.1. Die Schaubilder zeigen den Betrag, das Argument, die komplex Konjugierte und die komplexe Multiplikation.

DEFINITION 1.1. Sei $z_0 \in D$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in z_0 , wenn der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D \setminus \{z_0\}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

in \mathbb{C} existiert. Wir nennen $f'(z_0)$ die Ableitung von f bei z_0 . Wenn f in allen Punkten $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist, so bezeichnet man f als holomorph (auf D) mit Ableitung $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$. Man schreibt dann $f \in H(D)$. Iterativ definiert man die höheren Ableitungen $f^{(n)}$ von f für $n \in \mathbb{N}$.

Die meisten der elementaren Rechenregeln für die komplexe Ableitung zeigt man genauso wie für reelle Funktionen in Analysis 1. Nur der Beweis der Umkehrregel lässt sich nicht unmittelbar übertragen, da wir hier in Analysis 1 die Ordnungsstruktur von \mathbb{R} verwendet haben. Wir diskutieren diesen Satz am Ende des Abschnittes.

BEMERKUNG 1.2. a) Die Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = 1$, und $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; $g(z) = z$, sind holomorph mit den Ableitungen $f' = 0$ bzw. $g' = 1$ auf \mathbb{C} .

b) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei $z_0 \in D$. Dann ist f bei z_0 auch stetig.

c) Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei $z_0 \in D$, die Menge $\tilde{D} \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $f(D) \subseteq \tilde{D}$, die Funktion $h : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{C}$ sei bei $f(z_0)$ komplex differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann existieren die komplexen Ableitungen

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)'(z_0) &= \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0), \\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0), \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2} \quad (\text{falls } f(z_0) \neq 0),$$

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0))f'(z_0).$$

Aufgrund von Aussage b) ist $f \neq 0$ auf einer Kugel um z_0 , wenn $f(z_0) \neq 0$ gilt.

d) Nach a) und b) sind Polynome p und rationale Funktionen $\frac{p}{q}$ auf $D = \mathbb{C}$ bzw. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\}$ holomorph mit den aus Analysis 1 bekannten Ableitungen. \diamond

Für gegebene Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir den *Konvergenzradius*

$$\rho = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \in [0, +\infty].$$

(In $[0, +\infty]$ setzen wir $1/0 = \infty$ und $1/\infty = 0$, sowie $\infty = +\infty$.) Es sei $\rho > 0$ und $c \in \mathbb{C}$. Nach Theorem 3.29 in Analysis 1 existiert die Potenzreihe

$$f : B(c, \rho) \rightarrow \mathbb{C}; \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - c)^k,$$

wobei $B(c, \infty) := \mathbb{C}$ ist. Nach Korollar 4.44 aus Analysis 1 ist diese Funktion stetig und die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf allen Kreisen $\overline{B}(c, r)$ mit $r \in (0, \rho)$. Um die Potenzreihe abzuleiten, betrachten wir $w, z \in B(c, \rho)$ und die Partialsumme

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - c)^k$$

für $n \in \mathbb{N}$. Nach Bemerkung 1.2 hat f_n die Ableitung

$$f_n'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k (z - c)^{k-1}.$$

Man sieht wie im Beweis von Theorem 5.12 in Analysis 1, dass die Reihe

$$g : B(c, \rho) \rightarrow \mathbb{C}; \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - c)^{k-1}$$

den gleichen Konvergenzradius ρ besitzt, sodass (f_n') gleichmäßig auf $\overline{B}(c, r)$ für jedes $r \in (0, \rho)$ gegen g konvergiert. Der Hauptsatz, siehe (1.13) unten, liefert ferner die Gleichung

$$f_n(w) - f_n(z) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f_n(z + t(w - z)) dt = \int_0^1 f_n'(z + t(w - z))(w - z) dt,$$

wobei auch die Kettenregel einging. Wie in Theorem 5.12 aus Analysis 1 berechnet man nun die Ableitungen der Potenzreihe f .

SATZ 1.3. Seien $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}_0$, $\rho > 0$ und $c \in \mathbb{C}$. Die oben definierte Potenzreihe ist auf $B(c, \rho)$ beliebig oft komplex differenzierbar. Für $n \in \mathbb{N}_0$ hat $f^{(n)}$ auch den Konvergenzradius $\rho > 0$ und erfüllt $f^{(n)}(c) = n!a_n$ sowie

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1)a_k(z-c)^{k-n} \quad \text{für } z \in B(c, \rho).$$

Wir erinnern an drei wichtige elementare Funktionen.

BEISPIEL 1.4. Aus den Beispielen 3.30 und 3.32 in Analysis 1 kennen wir die Potenzreihen

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

für $z \in \mathbb{C}$. Mit dem obigen Satz erhält man wie in Beispiel 5.13 in Analysis 1 die Ableitungen $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ auf \mathbb{C} . Weiter genügt die Exponentialfunktion den Rechenregeln $\exp z \neq 0$,

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w), \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp z}, \quad \overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}) \quad (1.3)$$

für $z, w \in \mathbb{C}$, siehe Beispiel 3.25 aus Analysis 1. ◇

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Wir betrachten D als Teilmenge von \mathbb{R}^2 und setzen $u = \operatorname{Re} f : D \rightarrow \mathbb{R}$, sowie $v = \operatorname{Im} f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Damit können wir f als Funktion

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix},$$

in \mathbb{R}^2 auffassen. Damit stellt sich die Frage, wie die komplexe Ableitung mit der in \mathbb{R}^2 aus Definition 3.7 in Analysis 2 zusammenhängt. Laut des nächsten wichtigen Satzes ist die komplexe Differenzierbarkeit gleichwertig zu der im Reellen plus einer speziellen Struktur der Jakobimatrix.

SATZ 1.5. Seien $f : D \rightarrow \mathbb{C}$; $f = u + iv$, und $z = x + iy \in D$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

a) f ist in z komplex differenzierbar.

b) f ist in z reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \quad (1.4)$$

In diesem Fall hat f in $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ die Jakobimatrix

$$f'(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

BEWEIS. Definitionsgemäß ist f genau dann in z reell differenzierbar, wenn es so eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gibt, dass

$$\frac{1}{|w - z|_2} \left| \begin{pmatrix} u(w) - u(z) - (a|w - z) \\ v(w) - v(z) - (b|w - z) \end{pmatrix} \right|_2 = \frac{1}{|w - z|_2} |f(w) - f(z) - A(w - z)|_2 \rightarrow 0$$

für $w \rightarrow z$ konvergiert, wobei $w \in D \setminus \{z\}$ ist. Wegen (1.2) ist diese Aussage äquivalent dazu, dass u und v die reelle Ableitungen $u'(x, y) = a = (a_1, a_2)$ bzw. $v'(x, y) = b$ in $\mathbb{R}^{1 \times 2}$ besitzen.

Andererseits ist nach Definition 1.1 die Aussage a) gleichwertig zur Existenz einer Zahl $f'(z) \in \mathbb{C}$ mit

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{|f(w) - f(z) - f'(z)(w - z)|}{|w - z|} = 0.$$

Diese Eigenschaft ist genau dann gleich der Konvergenz im ersten Abschnitt, wenn A einer komplexen Zahl entspricht, die dann $f'(z)$ sein muss. Wegen (1.1) heißt das gerade, dass $b = (-a_2, a_1)$ gelten muss. Diese Beobachtungen liefern die behauptete Äquivalenz und die Formel (1.5). \square

Der Beweis von Theorem 2.5 zeigt die Bedeutung der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen für die komplexe Analysis. In Satz 1.8 nutzen wir sie zum Nachweis der Holomorphie. Zunächst verwenden wir sie um zu zeigen, dass zwei wichtige Funktionen nicht holomorph sind.

BEISPIEL 1.6. a) Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = \bar{z} = x - iy$, ist nirgends komplex differenzierbar. Hier sind $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = -y$, sodass $\partial_x u = 1$ und $\partial_y v = -1$ nirgends übereinstimmen und damit (1.4) verletzt ist.

b) Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, ist nur in 0 komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(0) = 0$. In diesem Fall haben wir $u(x, y) = x^2 + y^2$ und $v = 0$. Also verschwinden die partiellen Ableitungen von u nur in 0, was von den Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen (1.4) gefordert wird.

c) Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = \frac{1}{z}$, ist nach Bemerkung 1.2 holomorph. Es gilt hierbei

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y),$$

woraus man leicht die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y),$$

berechnet, die natürlich den Gleichungen (1.4) genügen. \diamond

Wir wenden uns nun der Frage zu, wann die Umkehrabbildung einer injektiven holomorphen Funktion wieder holomorph ist, wobei wir zuerst einen entsprechenden Begriff einführen.

DEFINITION 1.7. Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer, $f : U \rightarrow V$ bijektiv, sowie f und f^{-1} holomorph. Dann heißt f biholomorph.

Der folgende Kriterium für lokale Biholomorphie ergibt sich leicht aus dem Umkehrsatz im Reellen. In Theorem 3.5 von Analysis 4 findet man ein deutlich stärkeres, globales Resultat.

SATZ 1.8. a) Seien $f : U \rightarrow V$ biholomorph und $z \in U$. Dann ist $f'(z) \neq 0$ und für $w = f(z)$ gilt

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} = \frac{1}{f'(z)}.$$

b) Seien $f \in H(D) \cap C^1(D, \mathbb{R}^2)$ und $z_0 \in D$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann gibt es solche offene nichtleere Mengen $U \subseteq D$ mit $z_0 \in U$ und $V \subseteq \mathbb{C}$, dass die Einschränkung $f : U \rightarrow V$ biholomorph ist. Insbesondere gilt dann Teil a) für alle $z \in U$.

BEWEIS. a) Wegen der Voraussetzung können wir die Gleichung $z = f^{-1}(f(z))$ für $z \in U$ mittels der Kettenregel aus Bemerkung 1.2 ableiten. Es ergibt sich $1 = (f^{-1})'(f(z))f'(z)$ und damit Behauptung a).

b) Wir fassen f wieder reell auf; also entspricht $f'(z_0)$ der Jacobimatrix A_0 von f bei z_0 . Da $f'(z_0) \neq 0$ ist, folgt aus (1.4) die Ungleichung $\det A_0 = (\partial_x u(x, y))^2 + (\partial_y u(x, y))^2 \neq 0$, sodass A_0 invertierbar ist. Theorem 3.36 aus Analysis 2 liefert nun solche offenen Mengen $U \subseteq D$ und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $z \in U$, dass die Einschränkung $f : U \rightarrow V$ bijektiv ist und eine stetig differenzierbare Inverse besitzt. Weiter ist die Jacobimatrix B von f^{-1} bei $w = f(z) \in V$ gleich der Inversen der Jacobimatrix A von f bei $z \in U$. Nach (1.5) hat A die Form

$$A = \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix}$$

für gewisse $s, t \in \mathbb{R}$, woraus die Identität

$$B = \frac{1}{s^2 + t^2} \begin{pmatrix} s & t \\ -t & s \end{pmatrix}$$

folgt. Also ist f^{-1} gemäß Satz 1.5 auf V holomorph. □

1.2. Wurzel und Logarithmus

In diesem Abschnitt studieren wir das Abbildungsverhalten von Potenzen und Exponentialfunktion und zeigen dann mittels Satz 1.8, dass geeignete Einschränkungen biholomorph sind. Da man es im Grunde mit Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zu tun hat, sind solche Untersuchungen in \mathbb{C} deutlich komplizierter als in \mathbb{R} .

A) Potenzen und Wurzeln. Um Wurzeln zu definieren, betrachten für $\theta \in (0, \pi]$ den (offenen) Sektor

$$\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg z| < \theta\}$$

mit halben Öffnungswinkel θ . Spezialfälle sind die offene rechte Halbebene

$$\mathbb{C}_+ := \Sigma_{\pi/2} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$$

und die geschlitzte Ebene

$$\Sigma_\pi = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Für $|\phi| \leq \pi$ liegt die Zahl $z = |z|e^{i\phi} \neq 0$ genau für $|\phi| < \theta$ in Σ_θ .

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir definieren die Potenzfunktion

$$P_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; P_n(z) = z^n = |z|^n e^{in\phi}.$$

Diese bildet den Halbstrahl

$$s_\theta := \{re^{i\theta} \mid r > 0\}$$

für $\theta \in \mathbb{R}$ bijektiv auf den Halbstrahl $s_{n\theta}$ ab, da P_n auf \mathbb{R}_+ bijektiv ist. (Die Quadratfunktion P_2 verdoppelt etwa den Winkel gegen die positive reelle Halbachse und quadriert den Betrag.) Somit ist die Einschränkung

$$p_n := P_n|_{\Sigma_{\pi/n}} : \Sigma_{\pi/n} \rightarrow \Sigma_\pi$$

bijektiv. Dabei ist P_n schon auf $\overline{\Sigma_{\pi/n}}$ nicht mehr injektiv. Zum Beispiel haben für $n = 2$ die Zahlen $\pm i$ auf $\partial\Sigma_{\pi/2}$ das gleiche Bild $P_2(\pm i) = i^2 = -1$. Die n -te Wurzel ist nun die ebenfalls bijektive Umkehrabbildung von der geschlitzten Ebene auf den Sektor mit Winkel π/n .

DEFINITION 1.9. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Die n -te Wurzel ist die Abbildung $r_n = p_n^{-1} : \Sigma_\pi \rightarrow \Sigma_{\pi/n}$. Man schreibt $r_n(w) = w^{\frac{1}{n}}$ (oder $r_n(w) = \sqrt[n]{w}$) für $w \in \Sigma_\pi$.

Somit ist für jedes $w \in \Sigma_\pi$ die n -te Wurzel $r_n(w) = z$ die einzige Zahl in $\Sigma_{\pi/n}$ mit $z^n = w$. Also gelten

$$r_n(z^n) = z \quad \text{und} \quad r_n(w)^n = w.$$

Weiter genügt die Wurzel der Formel

$$r_n(te^{i\phi}) = \sqrt[n]{t} e^{i\phi/n} \quad \text{für } t > 0 \text{ und } \phi \in (-\pi, \pi),$$

da $(\sqrt[n]{t} e^{i\phi/n})^n = te^{i\phi}$ nach (1.3) gilt und $\sqrt[n]{t} e^{i\phi/n}$ in $\Sigma_{\pi/n}$ liegt.

Wegen $p'_n(z) = nz^{n-1} \neq 0$, sind $p_n : \Sigma_{\pi/n} \rightarrow \Sigma_\pi$ und $r_n : \Sigma_\pi \rightarrow \Sigma_{\pi/n}$ biholomorph mit der Ableitung

$$r'_n(w) = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{nw^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} w^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{für } w \in \Sigma_\pi, \quad (1.6)$$

siehe Satz 1.8. (Hier haben wir ein Potenzgesetz aus den Übungen verwendet.)

Man kann andere komplexe Wurzeln definieren, indem man passend gedrehte Sektoren verwendet. Diese genügen analogen Rechenregel, liefern jedoch andere

Zahlenwerte. Entsprechendes gilt für den unten eingeführten Logarithmus. Diese Varianten werden im Folgenden nicht verwendet.

B) Exponentialfunktion und Logarithmus. Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gelten nach (1.3) und Analysis 1 die Gleichungen

$$\begin{aligned} \exp(z) &= e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \\ \exp(z) &= \exp(z + 2\pi ik), \quad \exp(z) = 1 \iff z = 2\pi ik. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Wir betrachten für feste $a, b \in \mathbb{R}$ die vertikale bzw. horizontale Geraden

$$g_a = \{a + iy \mid y \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad h_b = \{x + ib \mid x \in \mathbb{R}\},$$

sowie den Strahl s_b aus Abschnitt A). Für $x, y \in \mathbb{R}$ liefern die Formeln (1.7) die Gleichungen

$$\exp(a + iy) = e^a (\cos y + i \sin y) \quad \text{und} \quad \exp(x + ib) = e^x e^{ib}.$$

Die reellen Eigenschaften von \exp , \cos und \sin implizieren nun die Aussagen

$$\begin{aligned} \exp : g_a &\rightarrow \partial B(0, e^a) \quad \text{ist surjektiv und nicht injektiv,} \\ \exp : h_b &\rightarrow s_b \quad \text{ist bijektiv.} \end{aligned}$$

Mit anderen Worten wird die vertikale Gerade bei $x = a$ auf die Kreislinie um 0 mit Radius e^a unendlich oft aufgewickelt, während die horizontale Gerade bei $iy = ib$ bijektiv auf den Halbstrahl mit Winkel b abgebildet wird. Diese Beobachtungen führen uns auf die vertikalen und horizontalen Streifen

$$S_v(a_1, a_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in (a_1, a_2)\} \quad \text{bzw.} \quad S_h = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi)\}$$

für $a_1 < a_2$ in $[-\infty, \infty]$. Wegen der oben abgesetzten Abbildungseigenschaften von \exp sind die Einschränkungen

$$\begin{aligned} \exp : S_v(a_1, a_2) &\rightarrow B(0, e^{a_2}) \setminus \overline{B}(0, e^{a_1}) \quad \text{surjektiv und nicht injektiv,} \\ \exp : S_h &\rightarrow \Sigma_\pi \quad \text{bijektiv.} \end{aligned}$$

Also bildet \exp den horizontalen Streifen $S_h = \mathbb{R} \times i(-\pi, \pi)$ injektiv auf die geschlitzte Ebene Σ_π ab, was uns erlaubt den Logarithmus zu definieren.

DEFINITION 1.10. Die Umkehrabbildung $\log = (\exp|_{S_h})^{-1} : \Sigma_\pi \rightarrow S_h$ nennen wir den Logarithmus.

Für $w \in \Sigma_\pi$ ist somit $z = \log w$ die einzige Zahl in S_h mit $\exp(z) = w$. Weiter gelten

$$\log \exp(z) = z \quad \text{für } z \in S_h \quad \text{und} \quad \exp \log(w) = w \quad \text{für } w \in \Sigma_\pi.$$

Da $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist, liefert Satz 1.8 die Biholomorphie von $\exp : S_h \rightarrow \Sigma_\pi$ und $\log : \Sigma_\pi \rightarrow S_h$, sowie

$$\log'(w) = \frac{1}{\exp'(z)} = \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{w} \quad \text{für } w \in \Sigma_\pi. \quad (1.8)$$

Sei $w = re^{i\phi}$ für $r > 0$ und $\phi \in (-\pi, \pi)$. Mit dem reellen Logarithmus \ln erhalten wir die bequeme Formel

$$\log w = \ln r + i\phi, \quad (1.9)$$

da $\ln r + i\phi$ in S_h liegt und $\exp(\ln r + i\phi) = re^{i\phi}$ ist. Beispiele sind $\log r = \ln r$ für $r > 0$ und $\log i = i\frac{\pi}{2}$. Die Formel (1.9) impliziert das (erste) *Logarithmusgesetz*

$$\begin{aligned} \log(wz) &= \log(rse^{i(\phi+\psi)}) = \ln(rs) + i(\phi + \psi) = \ln r + i\phi + \ln s + i\psi \\ &= \log w + \log z \end{aligned} \quad (1.10)$$

für $w = re^{i\phi}$ und $z = se^{i\psi}$ in Σ_π mit $\phi, \psi, \phi + \psi \in (-\pi, \pi)$ und $r, s > 0$.

Vorsicht. Die Gleichungen (1.9) und (1.10) setzen voraus, dass ϕ, ψ und $\phi + \psi$ in $(-\pi, \pi)$ liegen. Dies wird verletzt, wenn man etwa beim komplexen Multiplizieren den Schnitt $(-\infty, 0]$ überschreitet. Seien dazu $\phi, \psi \in (-\pi, \pi)$ mit $\phi + \psi > \pi$. Mittels (1.3), (1.7) und (1.9) folgern wir

$$\log(e^{i\phi}e^{i\psi}) = \log e^{i(\phi+\psi-2\pi)} = i(\phi + \psi - 2\pi) \neq i(\phi + \psi) = \log e^{i\phi} + \log e^{i\psi}.$$

C) Allgemeine Potenz. Mit Hilfe des Logarithmus definieren wir nun die allgemeine Potenz.

DEFINITION 1.11. Seien $z = re^{i\phi} \in \Sigma_\pi$ mit $r > 0$ und $\phi \in (-\pi, \pi)$ und $w = x + iy \in \mathbb{C}$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Potenz ist die komplexe Zahl

$$z^w = \exp(w \log z) = \exp((x + iy)(\ln r + i\phi)) = r^x e^{-y\phi} e^{i(x\phi + y \ln r)}.$$

Beispiele sind $e^w = \exp(w)$ für $z = e$ und $i^i = e^{-\pi/2}$ da $i = e^{i\pi/2}$. Wie schon beim Logarithmus ist zu beachten, dass die komplexe Potenz sich oft anders als im Reellen verhält. Im Zweifelsfall muss man eben auf die Definition zurückgehen. Wir notieren einige wichtige Rechenregeln.

BEMERKUNG 1.12. Seien $z = re^{i\phi} \in \Sigma_\pi$ und $w, \tilde{w} \in \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.

a) Für $w = n \in \mathbb{N}$ liefert Definition 1.11 die Gleichung $z^n = r^n e^{in\phi}$, was mit der Definition von z^n aus Teil A) übereinstimmt.

b) Definition 1.11 und (1.3) implizieren das erste Potenzgesetz

$$z^{w+\tilde{w}} = \exp((w + \tilde{w}) \log z) = \exp(w \log z) \exp(\tilde{w} \log z) = z^w z^{\tilde{w}}.$$

Iterativ folgt daraus insbesondere

$$z = z^{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}} = (z^{\frac{1}{n}})^n,$$

sodass die Wurzeln $z^{\frac{1}{n}}$ aus den Definitionen 1.9 und 1.11 gleich sind. Die anderen beiden Potenzgesetze gelten nur eingeschränkt, vergleiche die Übungen.

c) Gemäß der Eigenschaften von \exp und \log , der Kettenregel und Teil b) existieren die Ableitungen

$$\partial_z z^w = \frac{d}{dz} \exp(w \log z) = \exp(w \log z) \frac{w}{z} = \frac{wz^w}{z} = wz^{w-1}$$

$$\partial_w z^w = \frac{d}{dw} \exp(w \log z) = \exp(w \log z) \log z = \log(z) z^w.$$

d) Wir erhalten aus Definition 1.11 die Abschätzung

$$|z^w| = r^x e^{-y\phi} = |z|^{\operatorname{Re} w} e^{-\operatorname{Im}(w) \arg(z)} \leq |z|^{\operatorname{Re} w} e^{\pi |\operatorname{Im}(w)|}.$$

Also kann der Imaginärteil von w zusätzliches Wachstum bewirken. \diamond

1.3. Komplexe Kurvenintegrale

In diesem Abschnitt übertragen wir einige Begriffe und Resultate aus Analysis 2 ins Komplexe. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, wenn sie für jedes $t \in [a, b]$ links- und rechtsseitige Grenzwerte in \mathbb{C} besitzt und bis auf höchstens endlich viele Punkte $t_k \in [a, b]$ stetig ist. Wir schreiben dann $f \in PC([a, b], \mathbb{C})$. Real- und Imaginärteil solcher Funktionen gehören zum analog definierten Raum $PC([a, b], \mathbb{R})$ aus Analysis 2 und besitzen ein (Riemann-)Integral. Wir setzen nun

$$\int_a^b f dt = \int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt \in \mathbb{C}. \quad (1.11)$$

Dieses Integral besitzt die entsprechenden Eigenschaften wie im reellen Fall (außer der Monotonie). Dabei rechnet man die \mathbb{C} -Linearität direkt nach. Um die Standardabschätzung

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \quad (1.12)$$

zu zeigen, setzen wir $z = \int_a^b f dt$ und berechnen

$$\begin{aligned} |z|^2 &= \bar{z} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \bar{z} f(t) dt = \operatorname{Re} \int_a^b \bar{z} f(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(\bar{z} f(t)) dt \leq \int_a^b |\bar{z}| |f(t)| dt = |z| \int_a^b |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Hier verwenden wir (1.11) und die Monotonie des reellen Integrals. Es folgt (1.12). Weiter nennen wir f bei $t_0 \in [a, b]$ *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$f'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

in \mathbb{C} existiert. Dies ist nach (1.2) dazu äquivalent, dass die Funktionen $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ in \mathbb{R} Ableitungen besitzen. Weiter gelten $\operatorname{Re} f' = (\operatorname{Re} f)'$ und $\operatorname{Im} f' = (\operatorname{Im} f)'$.

Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ auf $[a, b]$ differenzierbar, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ und $g, f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann folgt aus den obigen Beobachtungen und dem Hauptsatz der (reellen) Integral- und Differentialrechnung seine komplexe Variante

$$\int_a^b f'(t) dt = \int_a^b u'(t) dt + i \int_a^b v'(t) dt = u \Big|_a^b + i v \Big|_a^b = f(b) - f(a), \quad (1.13)$$

$$\exists \frac{d}{dt} \int_a^t g(s) ds = \frac{d}{dt} \int_a^t \operatorname{Re} g(s) ds + i \frac{d}{dt} \int_a^t \operatorname{Im} g(s) ds = g(t). \quad (1.14)$$

für $t \in [a, b]$. Wir geben ein einfaches Beispiel an.

BEISPIEL 1.13. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $\int_a^b e^{zt} dt = \frac{1}{z} e^{zt} \Big|_{t=a}^b = \frac{1}{z} (e^{zb} - e^{za})$. \diamond

Im folgenden beschäftigen wir uns meist mit Kurvenintegralen. Dazu übertragen wir die Kurvendefinition aus \mathbb{R}^2 ins Komplexe.

DEFINITION 1.14. a) Eine Funktion $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$ wird als Kurve oder Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ bezeichnet. Sie heißt geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist, und einfach, wenn γ auf $[a, b]$ injektiv ist. Das Bild (oder Spur) von γ ist $\Gamma = R(\gamma) = \gamma([a, b])$, und γ eine Parametrisierung von $R(\gamma)$. Bei einfachen Kurven identifizieren wir oft γ mit $\Gamma = R(\gamma)$. Wenn $R(\gamma) \subseteq M$ ist, so nennt man γ Weg in $M \subseteq \mathbb{C}$.

b) Die Kurve $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$ sei bis auf höchstens endlich viele $t_k \in (a, b)$ differenzierbar und in den t_k noch links- und rechtsseitig ableitbar. Wir setzen $\gamma'(t_k)$ gleich der rechtsseitigen Ableitung. Weiter liege γ' in $PC([a, b], \mathbb{C})$. Dann heißt γ stückweise stetig differenzierbar (kurz: stückweise C^1).

Die folgenden einfachen Beispiele und Konstruktionen werden im folgenden häufig auftreten. Im ersten Punkt sieht man exemplarisch, dass die gleiche Spur viele Parametrisierungen besitzt.

BEISPIEL 1.15. a) Seien $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann parametrisiert $\gamma : [0, 2\pi n] \rightarrow \mathbb{C}$; $\gamma(t) = c + re^{it}$, die n -fach im Gegenuhrzeigersinn (*positiv*) durchlaufene Kreislinie $\partial B(c, r)$. Diese Kurve ist geschlossen und nur für $n = 1$ einfach.

b) Für $w, z \in \mathbb{C}$ parametrisiert $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$; $\gamma(t) = w + t(z - w)$, die Strecke \overrightarrow{wz} von w nach z . Für $z \neq w$ ist diese Kurve einfach und nicht geschlossen.

c) Seien $\gamma_j \in C([a_j, b_j], \mathbb{C})$ mit $b_1 = a_2$ und $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Der *Summenweg* von γ_1 und γ_2 ist durch

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & a_1 \leq t \leq b_1, \\ \gamma_2(t), & a_2 < t \leq b_2, \end{cases}$$

gegeben. Ein Beispiel ist der Dreiecksweg $\partial\Delta(z_1, z_2, z_3) = \overrightarrow{z_1 z_2} \cup \overrightarrow{z_2 z_3} \cup \overrightarrow{z_3 z_1}$.

d) Der *Rückwärtsweg* von $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$ ist $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$; $\gamma^-(t) = \gamma(b - t + a)$. \diamond

Im folgenden sei γ stets ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, dessen Ableitungen möglicherweise in Punkten $t_k \in (a, b)$ springen.

DEFINITION 1.16. Seien $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise C^1 mit Bild $\Gamma = \gamma([a, b])$ und $f \in C(\Gamma, \mathbb{C})$. Dann definieren wir das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Die Länge der Kurve γ ist $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. Wenn klar ist, was γ ist, schreiben wir auch $\int_{\Gamma} f dz$ statt $\int_{\gamma} f dz$.

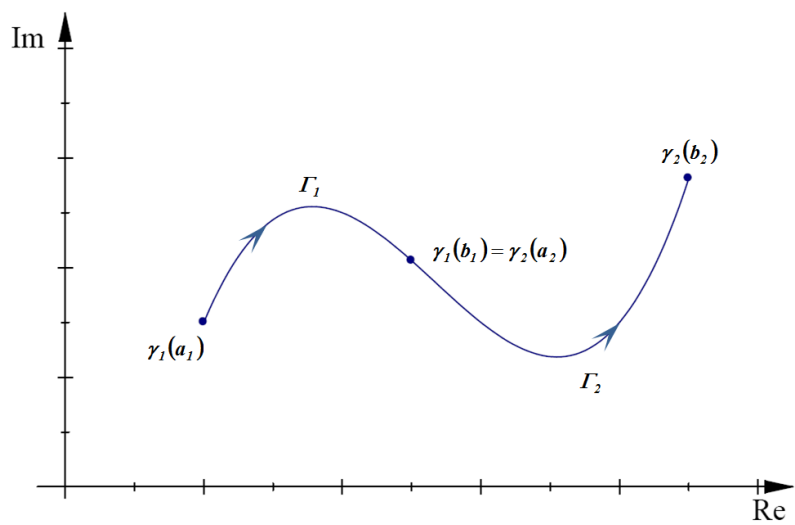


ABBILDUNG 1.2. Ein Summenweg.

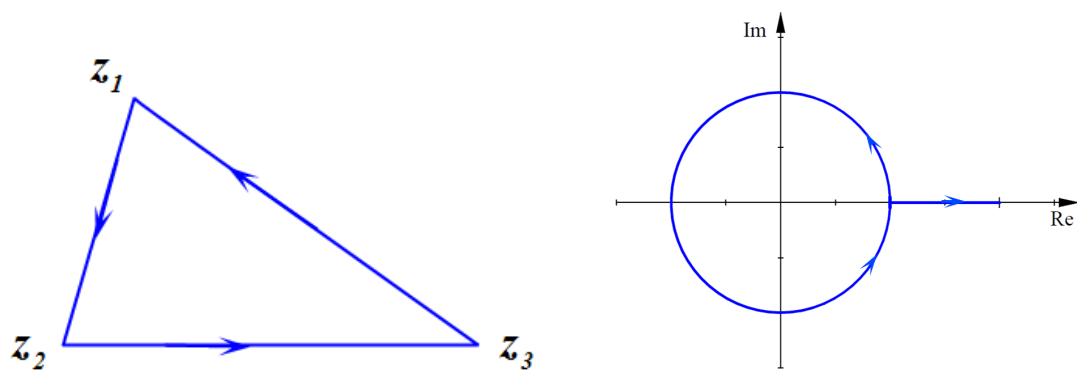


ABBILDUNG 1.3. Dreiecksweg und ein Kreis mit Strecke.

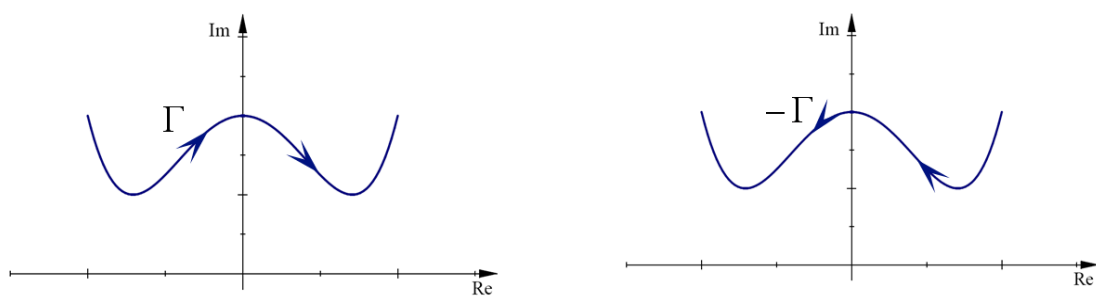


ABBILDUNG 1.4. Ein Rückwärtsweg.

Man kann das obige Integral mit den Kurvenintegralen aus Definition 4.6 in Analysis 2 in Beziehung setzen. Seien dazu $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, $\varphi = \operatorname{Re} \gamma$ und $\psi = \operatorname{Im} \gamma$ für f und γ aus Definition 1.16. Dann folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \, dz &= \int_a^b \left((u \circ \gamma) \varphi' - (v \circ \gamma) \psi' \right) dt + i \int_a^b \left((u \circ \gamma) \psi' + (v \circ \gamma) \varphi' \right) dt \\ &= \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d(x, y) + i \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d(x, y). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Wie in Bemerkung 4.7 aus Analysis 2 folgern wir die Rechenregeln für das komplexe Kurvenintegral leicht aus denen des komplexen Integrals.

BEMERKUNG 1.17. Es seien $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise C^1 -Kurven mit Bildern Γ , γ_1 und γ_2 wie in Beispiel 1.15 b) mit Bildern Γ_1 bzw. Γ_2 , $f, g \in C(\Gamma, \mathbb{C})$, $h \in C(\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \mathbb{C})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- a) $\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) \, dz = \alpha \int_{\gamma} f \, dz + \beta \int_{\gamma} g \, dz$.
- b) $\left| \int_{\gamma} f \, dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| \, dt \leq \|f\|_{\infty} \ell(\gamma)$.
- c) $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} h \, dz = \int_{\gamma_1} h \, dz + \int_{\gamma_2} h \, dz$.
- d) $\int_{\gamma^-} f \, dz = - \int_{\gamma} f \, dz$.
- e) Sei $\phi \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ strikt wachsend, $\phi([\alpha, \beta]) = [a, b]$ und $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi$. Dann ist $\tilde{\gamma}$ stückweise C^1 und es gilt

$$\int_{\tilde{\gamma}} f \, dz = \int_{\gamma} f \, dz. \quad \diamond$$

Wir können nun einige Integrale mittels der Definition und des Hauptsatzes (1.13) berechnen. Das erste Beispiel ist dabei zentral für die folgende Theorie.

BEISPIEL 1.18. a) Seien $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z}$ und $\gamma : [0, 2\pi n] \rightarrow \mathbb{C}$; $\gamma(t) = c + re^{it}$. Dann erhalten wir für $k \neq -1$

$$\int_{\gamma} (z - c)^k \, dz = \int_0^{2\pi n} (\gamma(t) - c)^k \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi n} r^k e^{kit} i r e^{it} \, dt = \frac{r^{k+1}}{k+1} e^{(k+1)it} \Big|_0^{2\pi n} = 0.$$

Für $k = -1$ ergibt sich dabei allerdings

$$\int_{\gamma} (z - c)^{-1} \, dz = \int_0^{2\pi n} i r^{-1+1} e^{(-1+1)it} \, dt = 2\pi i n.$$

b) Seien $w \in \Sigma_{\pi}$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$; $\gamma(t) = tw$. Da $t^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0^+$ gilt, ist die Funktion $f : \overrightarrow{0w} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$, stetig. Es folgt

$$\int_{\gamma} z^{\frac{1}{2}} \, dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \int_0^1 \sqrt{t} w^{1/2} w \, dt = \frac{2}{3} w^{3/2}. \quad \diamond$$

Das Kurvenintegral erbt die Grenzwertsätze des gewöhnlichen Integrals, wobei wir uns hier auf die nachfolgend benötigten beschränken.

SATZ 1.19. Seien γ stückweise C^1 mit Bild Γ , $f_n, f \in C(\Gamma, \mathbb{C})$ für $n \in \mathbb{N}$ und $h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Die Folge (f_n) konvergiere gleichmäßig auf Γ gegen f . Dann erhalten wir den Grenzwert

$$\int_{\gamma} f_n dz \longrightarrow \int_{\gamma} f dz, \quad n \rightarrow \infty.$$

b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiere gleichmäßig auf Γ . Dann konvergiert auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n dz = \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n dz.$$

c) Die Abbildung

$$H : D \rightarrow \mathbb{C}; \quad z \mapsto \int_{\Gamma} h(z, w) dw,$$

ist stetig.

d) Die Funktion $D \rightarrow \mathbb{C}; \quad z \mapsto h(z, w)$, sei holomorph mit $\frac{\partial}{\partial z} h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$. Dann ist H aus Teil c) holomorph mit der Ableitung

$$\frac{d}{dz} \int_{\gamma} h(z, w) dw = \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} h(z, w) dw.$$

BEWEIS. Bemerkung 1.17 impliziert leicht Aussage a) durch

$$\left| \int_{\gamma} f_n dz - \int_{\gamma} f dz \right| = \left| \int_{\gamma} (f_n - f) dz \right| \leq \|f - f_n\|_{\infty} \ell(\gamma) \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Indem wir dies auf die Funktionen $g_N := \sum_{n=1}^N f_n$ anwenden, zeigen wir Teil b).

Um die Aussage c) zu beweisen, seien $z_n, z_0 \in D$ mit $z_n \rightarrow z_0$ für $n \rightarrow \infty$. Da D offen ist, finden wir eine Kugel $K = \bar{B}(z_0, \delta)$ in D . In dieser liegen alle bis endlich viele z_n ; letztere lassen wir weg. Wir setzen $f_n : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(w) = h(z_n, w)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Nun ist $K \times \Gamma$ abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ und damit kompakt nach Theorem 2.44 in Analysis 2. Theorem 2.47 dieses Skriptums liefert nun die gleichmäßige Stetigkeit der Einschränkung von h auf $K \times \Gamma$. Dies heißt aber gerade, dass f_n gleichmäßig gegen f_0 konvergiert. Somit gilt c). Der Beweis von Teil d) steht in Satz 1.21 aus Analysis 4, siehe auch Satz 4.16 aus Analysis 2. \square

Für die folgenden Betrachtungen benötigen wir einige Begriffe aus der Analysis 2, an die wir kurz erinnern. Nach Definition 2.56 aus Analysis 2 heißt eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ *wegzusammenhängend*, wenn es für alle Punkte $w, z \in M$ einen stetigen Weg γ in M von w nach z gibt. Beispiele hierfür sind *konvexe* M (bei denen zu je zwei Punkten aus M auch die Verbindungsstrecke in M liegt) oder allgemeiner *sternförmige* M (bei denen es so ein Zentrum $z_0 \in M$ gibt, dass für jedes $z \in M$ die Strecke $\overrightarrow{z_0 z}$ in M liegt). Ein Sektor Σ_{θ} ist konvex für $\theta \in (0, \pi/2)$ und sternförmig für $\theta \in (0, \pi]$. Die folgenden Bilder veranschaulichen diese Konzepte.

Eine offene und wegzusammenhängende Menge in \mathbb{C} heißt *Gebiet*. Nach Lemma 3.12 in Analysis 2 gibt es für zwei Punkte z und w in einem Gebiet D stets

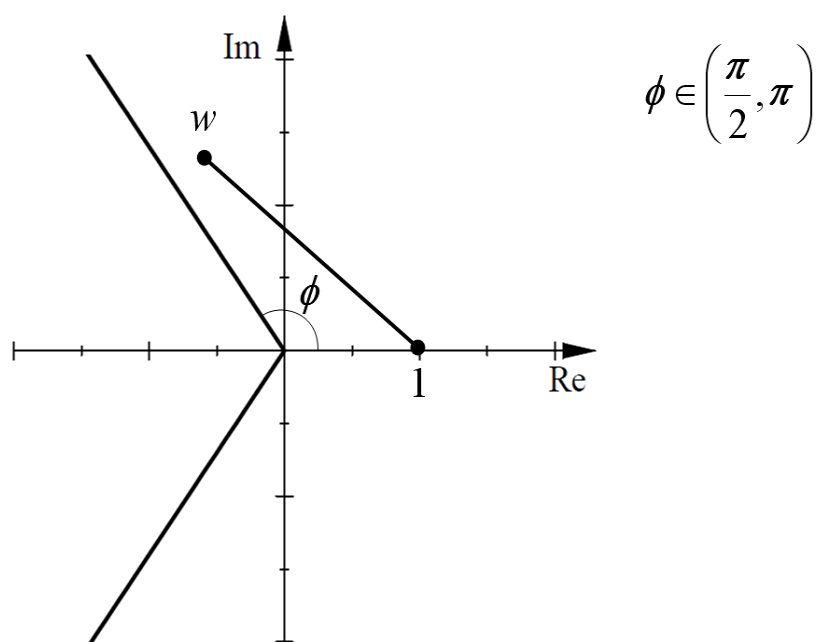
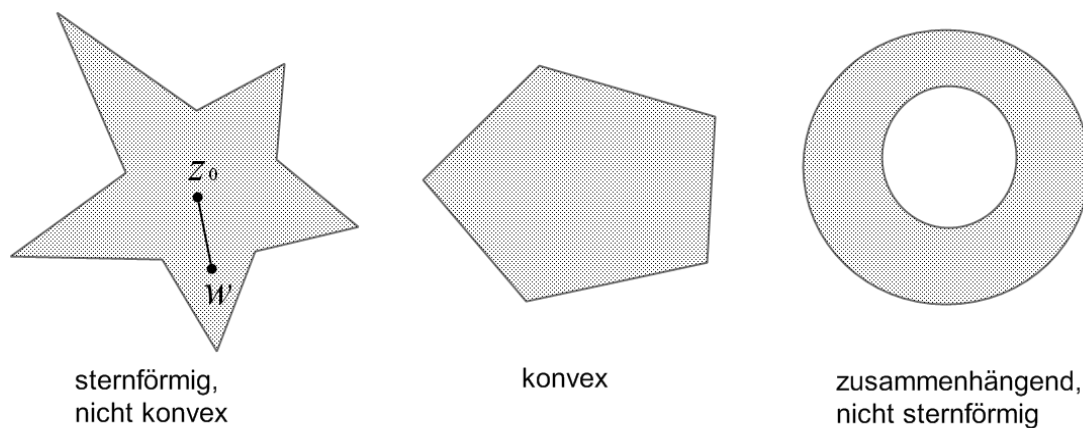


ABBILDUNG 1.5. Sektoren sind sternförmig

einen Streckenzug γ in D , der w und z verbindet. Gebiete gehen später meist durch den folgenden Satz ein.

SATZ 1.20. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(D)$ mit $f' = 0$ auf D . Dann ist f konstant.

BEWEIS. Seien $w, z \in D$ mit $\overrightarrow{wz} \subseteq D$. Dann liefern die Kettenregel und der Hauptsatz (1.13) die gewünschte Gleichung

$$0 = \int_{\overrightarrow{wz}} f'(\zeta) d\zeta = \int_0^1 f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} (f \circ \gamma) dt = f(z) - f(w)$$

mit $\gamma(t) = w + t(z - w)$ für $t \in [0, 1]$. Für beliebige $z, w \in D$ wählt man einen verbindenden Streckenzug in D gemäß Lemma 4.12 in Analysis 2. Iterativ folgt dann die Aussage, vergleiche Satz 1.22 aus Analysis 4. \square

Auf der nicht wegzusammenhängenden offenen Menge $B(0, 1) \cup B(3, 1)$ ist die Funktion $f = \mathbb{1}_{B(0,1)}$ trotz verschwindender Ableitung nicht konstant.

Der Cauchysche Integralsatz und seine Folgerungen

In diesem Kapitel zeigen wir einige Hauptsätze der komplexen Analysis, die alle aus Cauchys Integralsatz folgen werden.

2.1. Cauchys Integralsatz und -formel

Wir charakterisieren zunächst wie in Analysis 2 die Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen. Dazu übertragen wir den Begriff der Stammfunktion ins Komplexe.

DEFINITION 2.1. *Sei $f \in C(D, \mathbb{C})$. Eine Stammfunktion von f auf D ist eine Abbildung $F \in H(D)$ mit $F' = f$.*

Die Abbildungen \exp , \sin , \cos und die Polynome besitzen die Stammfunktionen \exp , $-\cos$, \sin bzw. $\frac{a_n}{n+1}z^{n+1} + \dots + a_0z$ auf \mathbb{C} , vergleiche Bemerkung 1.2 und Beispiel 1.4. Die Funktionen $f : \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $f(z) = z^{-k}$, für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq -2$ und $g : \Sigma_\pi \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = \frac{1}{z}$, haben die Stammfunktionen $z \mapsto \frac{1}{k+1}z^{k+1}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bzw. \log auf Σ_π nach Bemerkung 1.2 bzw. (1.8).

Die folgenden Eigenschaften gelten wie im Reellen, wo in Analysis 2 stets auf (wegzusammenhängenden) Intervallen gearbeitet wurde.

BEMERKUNG 2.2. Eine Funktion $f \in C(D, \mathbb{C})$ besitze eine Stammfunktion F . Dann ist auch $F_c := F + c\mathbb{1}$ für jedes $c \in \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f . Sei \tilde{F} eine weitere Stammfunktion von f und D ein Gebiet. Dann verschwindet die Ableitung $(\tilde{F} - F)' = f - f = 0$. Satz 1.20 liefert nun eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{F} = F + c\mathbb{1}$. \diamond

Wir können wie in Satz 4.11 aus Analysis 2 die Existenz einer Stammfunktion von f durch die Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen über f charakterisieren.

SATZ 2.3. *Seien D ein Gebiet und $f \in C(D, \mathbb{C})$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- a) *Die Abbildung f hat eine Stammfunktion F auf D .*
- b) *Für alle stückweisen C^1 -Wege γ_1 und γ_2 in D mit gleichem Anfangs- und Endpunkt gilt die Gleichung*

$$\int_{\gamma_1} f \, dz = \int_{\gamma_2} f \, dz.$$

- c) *Für jeden geschlossenen stückweisen C^1 -Weg γ in D ist*

$$\int_{\gamma} f \, dz = 0.$$

In diesem Fall erhalten wir die Gleichung

$$\int_{\gamma} f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

für jeden stückweisen C^1 -Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow D$.

BEWEISSKIZZE. Es gelte Teil b). Sei $z_0 \in D$ fest gewählt und $z \in D$ beliebig. Sei γ_z ein stückweiser C^1 -Weg in D von z_0 nach z . Mit Hilfe von Aussage b) definieren wir die Abbildung

$$F : D \rightarrow \mathbb{C}; \quad F(z) = \int_{\gamma_z} f dw.$$

Man kann nun $F' = f$ und damit a) zeigen, siehe Satz 2.3 von Analysis 4.

Sei Eigenschaft a) erfüllt. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sogar C^1 (der allgemeine Fall wird in Satz 2.3 von Analysis 4 behandelt). Dann berechnen wir mittels der Kettenregel und des Hauptsatzes (1.13)

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Somit sind der Zusatz und Aussage c) bewiesen.

Es gelte Behauptung c). Es seien γ_1 und γ_2 wie in b). Dann ist $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2^-$ eine geschlossene stückweise C^1 -Kurve in D . Teil c) und Bemerkung 1.17 liefern dann

$$0 = \int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz - \int_{\gamma_2} f dz,$$

woraus Aussage b) folgt. □

Wie in Analysis 2 erlaubt also die Kenntnis einer Stammfunktion die Berechnung von Kurvenintegralen. (Nur ist es im Komplexen schwieriger, Stammfunktionen zu finden.) Das zweite der nächsten Beispiele ist von zentraler Bedeutung in der folgenden Theorie.

BEISPIEL 2.4. a) Sei γ eine stückweiser C^1 -Weg von z_1 nach z_2 . Dann gilt $\int_{\gamma} \cos z dz = \sin(z_2) - \sin(z_1)$, da $\sin' = \cos$ ist.

b) Sei $\varepsilon \in (0, \pi)$ und γ_{ε} ein stückweiser C^1 -Weg von $z_- = e^{i(-\pi+\varepsilon)}$ nach $z_+ = e^{i(\pi-\varepsilon)}$ in Σ_{π} . Mit (1.8) erhalten wir

$$\int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{dz}{z} = \log(z) \Big|_{z_-}^{z_+} = 2\pi i - 2\varepsilon i.$$

Für $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}; \gamma(t) = e^{it}$, gilt $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ nach Beispiel 1.18, sodass $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion besitzt. ◇

Der folgende *Integralsatz von Cauchy* ist die Grundlage der Funktionentheorie. Da Kugeln konvex sind, liefert dieses Theorem für jede holomorphe Funktion f die Wegunabhängigkeit von Integralen über Kurven, die innerhalb einer Kugel in D verlaufen. Demnach besitzt f lokal eine Stammfunktion. (Das reelle Analogon

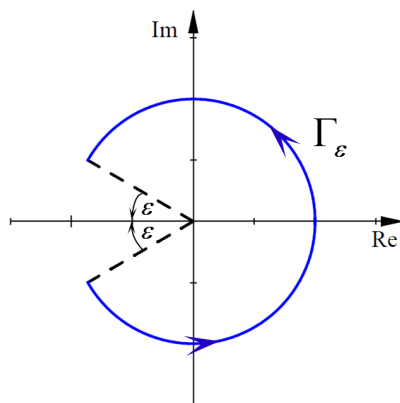


ABBILDUNG 2.1. Ein Weg für Beispiel 2.4b).

benötigt eine Zusatzannahme an f , vergleiche Theorem 4.15 in Analysis 2.) Für eine globale Aussage auf D muss das Gebiet jedoch einer ‘topologischen’ Bedingung genügen, siehe die anschließende Bemerkung.

THEOREM 2.5. *Seien D ein sternförmiges Gebiet, $f \in H(D)$ und γ eine geschlossene stückweise C^1 -Kurve in D . Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f \, dz = 0.$$

Somit besitzt f eine Stammfunktion auf D nach Satz 2.3.

BEWEIS. Wir nehmen zusätzlich an, dass f' stetig ist. Dies erlaubt es uns Poincarés Theorem 4.15 in Analysis 2 zu verwenden. Dazu erinnern wir an die reelle Formulierung des Kurvenintegrals

$$\int_{\gamma} f \, dz = \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d(x, y) + i \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d(x, y)$$

aus (1.15). Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen (1.4) implizieren die Symmetrie der Jacobimatrix

$$\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ -\partial_x v & -\partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_y u & -\partial_x u \end{pmatrix},$$

und analog für (v, u) . Theorem 4.15 in Analysis 2 liefert nun die Behauptung. \square

Wir diskutieren und illustrieren diesen Hauptsatz. Wir werden ihn und Theorem 2.7 erst am Ende des Kapitels systematischer für Integralberechnungen heranziehen; zuvor werden sie vor allem zur Entwicklung der Theorie verwendet.

BEMERKUNG 2.6. a) Das obige Theorem wird in Theorem 2.6 in Analysis 4 gezeigt. Der dortige Beweis beruht auf den recht schwierigen Satz 2.5 von Goursat

und liefert die Aussage sogar für Funktionen $f \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{w_0\})$ mit $w_0 \in D$, siehe Bemerkung 2.7 aus Analysis 4.

b) Cauchys Integralsatz ist im allgemeinen auf Gebieten mit Löchern falsch. Laut Beispiel 1.18 erhalten wir auf $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ etwa $\int_{\partial B(0,1)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$.

c) Es gilt $\int_{\partial B(2,1)} \frac{dz}{z} = 0$, da der Integrand $f : z \mapsto 1/z$ auf der konvexen Menge $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1/2\}$ holomorph ist und $\partial B(2,1)$ in D liegt. \diamond

Wir leiten aus dem Integralsatz nun *Cauchys Integralformeln* her. Diese beinhalten zum einen die erstaunliche Aussage, dass eine komplex differenzierbare Funktion automatisch beliebig oft differenzierbar ist. Im Reellen gibt es dagegen sogar differenzierbare Funktionen mit einer un stetigen Ableitung, siehe Beispiel 5.14 in Analysis 1. Darüberhinaus werden durch die Integralformeln alle Ableitungen einer holomorphen Funktion f auf einer Kreisscheibe durch die Werte von f auf dem Kreisrand bestimmt (was reell wieder komplett falsch sein kann). Dieser verblüffende Sachverhalt ist das wesentliche Instrument zum Beweis der Hauptsätze der Funktionentheorie. Da wir uns auf Kreisscheiben in D einschränken, gilt das nächste Theorem für alle offenen D . Man beachte, dass (2.1) unabhängig von der Wahl des Radius $r > 0$ mit $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$ ist.

THEOREM 2.7. *Seien $f \in H(D)$, $z_0 \in D$, $r > 0$ mit $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$, $n \in \mathbb{N}_0$, $z \in B(z_0, r)$ und $s := |z - z_0| < r$. Dann ist f beliebig oft auf D differenzierbar und wir erhalten*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw, \quad (2.1)$$

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! r}{(r - s)^{n+1}} \max_{|w - z_0| = r} |f(w)|. \quad (2.2)$$

(Hierbei wird $\partial B(z_0, r)$ durch $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$; $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, parametrisiert.)

BEMERKUNG 2.8. Seien $K \subseteq D$ kompakt und $D \neq \mathbb{C}$. Die Funktion $d : K \rightarrow \mathbb{C}$; $d(w) = \inf_{z \in \partial D} |w - z|$, ist nach Korollar 2.52 in Analysis 2 stetig und positiv, da K und ∂D sich nicht schneiden. Der Satz von Minimum liefert nun einen Punkt $w_0 \in K$, an dem d minimal wird. Also gilt die Ungleichung $|w - z| \geq d(w) \geq d(w_0) =: \operatorname{dist}(K, \partial D) > 0$ für alle $w \in K$ und $z \in \partial D$. Im Falle $D = \mathbb{C}$ setzen wir $\operatorname{dist}(K, \partial D) = \infty$. \diamond

BEWEIS VON THEOREM 2.7. Die Menge $\Gamma = \partial B(z_0, r)$ ist abgeschlossen und beschränkt, und deswegen kompakt laut Bolzano–Weierstraß. Nach Bemerkung 2.8 ist dann $\delta := \operatorname{dist}(K, \partial D)$ positiv. Für $r' \in (r, r + \operatorname{dist}(K, \partial D))$ liegt somit die Kugel $D_0 = B(z_0, r')$ in D . Sei $z \in B(z_0, r)$ fest, aber beliebig gewählt.

1) Sei zuerst $n = 0$. Wir definieren auf D_0 die Hilfsfunktion

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, & w \in D_0 \setminus \{z\}, \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$$

Wegen der Holomorphie von f , liegt g in $H(D_0 \setminus \{z\}) \cap C(D_0, \mathbb{C})$. Da D_0 konvex ist, liefern Cauchys Integralsatz in der Version von Bemerkung 2.6 b) sowie Bemerkung 1.17 die Gleichungen

$$0 = \int_{\Gamma} g \, dw = \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} \, dw - f(z) \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z},$$

wobei $z \notin \Gamma$ eingeht. Das letzte Integral werde mit $I(z)$ bezeichnet. Nach Beispiel 1.18 gilt $I(z_0) = 2\pi i$. Somit bleibt die Gleichung $I(z) = I(z_0)$ zu zeigen.

Die Kreislinien $\partial B(z_0, r)$ und $\partial B(z, r)$ haben zwei Schnittpunkte, die $\partial B(z_0, r)$ in Kreisbögen k_1^0 und k_2^0 , sowie $\partial B(z, r)$ in k_1 und k_2 , zerlegen. Dabei verlaufe etwa k_2^0 in $B(z, r)$ und k_1 in $B(z_0, r)$. Wir setzen $\gamma_j = k_j^0 \cup k_j^-$ für $j \in \{1, 2\}$. Es gibt solche Winkel $\theta \in (0, \pi/2)$ und $\phi \in (\pi/2, \pi)$, dass γ_1 und γ_2 in den sternförmigen Mengen $\mathbb{C} \setminus (z + \Sigma_{\theta})$ bzw. $z + \Sigma_{\phi}$ liegen. Wir können also Cauchys Integralsatz anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w-z} + \int_{\gamma_2} \frac{dw}{w-z} = \int_{k_1^0} \frac{dw}{w-z} + \int_{k_2^0} \frac{dw}{w-z} - \int_{k_1} \frac{dw}{w-z} - \int_{k_2} \frac{dw}{w-z} \\ &= I(z_0) - I(z), \end{aligned}$$

wobei auch Bemerkung 1.17 einging. Es ergibt sich (2.1) für $n = 0$.

2) Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Iterativ erhalten wir

$$\partial_z \frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-z)^2}, \quad \dots, \quad \partial_z^n \frac{f(w)}{w-z} = \frac{n! f(w)}{(w-z)^{n+1}}$$

für $w \in \Gamma$ und $z \in B(z_0, r)$. Diese Ableitungen sind auf $B(z_0, r) \times \Gamma$ stetig. Gemäß Satz 1.19 ist nun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(w)}{w-z} \, dw$$

n -fach differenzierbar in $z \in B(z_0, r)$ und wir können die Ableitungen am Integral vorbeiziehen, sodass die Cauchyformel (2.1) für alle n gezeigt ist.

3) Die *Cauchyschen Ungleichungen* (2.2) folgen schließlich durch direktes Abschätzen von (2.1) mittels Bemerkung 1.17 und der Schranke

$$|w-z| \geq |w-z_0| - |z_0-z| = r-s > 0. \quad \square$$

BEISPIEL 2.9. Es werde $\partial B(2, 1)$ einmal positiv durchlaufen. Dann gilt

$$\int_{\partial B(2,1)} \frac{w^{\frac{1}{2}}}{w-\frac{3}{2}} \, dw = 2\pi i \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Hier wählen wir $D = B(2, 3/2)$ und $f : D \rightarrow \mathbb{C}; f(z) = \sqrt{z}$. ◇

2.2. Folgerungen aus dem Integralsatz

Wir beginnen mit einem zentralen Begriff der Analysis.

DEFINITION 2.10. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt analytisch, wenn es für jeden Punkt $z \in D$ so einen Radius $r(z) > 0$ mit $B(z, r(z)) \subseteq D$ gibt, dass f auf $B(z, r(z))$ gleich einer Potenzreihe um z ist.

Nach Satz 1.3 sind analytische Funktionen holomorph. Wir wissen schon, dass eine holomorphe Funktion f beliebig oft differenzierbar ist. Im Reellen gibt es aber nichtanalytische C^∞ -Funktionen, zum Beispiel

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

siehe Beispiel 5.39 in Analysis 1. Der folgende *Entwicklungssatz* zeigt, dass dies im Komplexen nicht auftreten kann und dass f eine Taylorreihe auf dem maximal möglichen Konvergenzkreis besitzt (relativ zum gegebenen Definitionsbereich D von f). Tatsächlich ist der Umweg über das Komplexe der weitaus bequemste Weg um zu zeigen, dass die Taylorreihe einer reellen Funktion gegen diese konvergiert. Wir illustrieren dies unten anhand der Binomialreihe, deren Grenzwert wir in Analysis 1 nicht berechnen konnten.

THEOREM 2.11. Sei $f \in H(D)$. Dann ist f analytisch. Genauer setzen wir für jedes $z_0 \in D$ den Radius $R(z_0) := \sup \{r > 0 \mid B(z_0, r) \subseteq D\}$. Es sei $r \in (0, R(z_0))$. Für $z \in B(z_0, R(z_0))$ hat f dann die Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit} \tag{2.3}$$

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

BEWEIS. Seien $0 < r' < r < R(z_0)$, $z \in \overline{B}(z_0, r')$ und $w \in \partial B(z_0, r) =: \Gamma$. Dann ergibt sich

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \frac{r'}{r} =: q < 1.$$

Diese Ungleichung erlaubt es, den Integranden aus der Cauchyformel (2.1) für $f(z)$ mittels der geometrischen Reihe in

$$\frac{f(w)}{w - z} = \frac{f(w)}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

zu entwickeln. Dabei konvergiert die Reihe gleichmäßig für $w \in \Gamma$ nach dem Majorantenkriterium (Satz 4.43 in Analysis 1), da $\sum_{n \geq 0} q^n < \infty$ ist. Formel (2.1) für $n = 0$ und Satz 1.19 liefern nun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

Nach Theorem 2.7 ist das letzte Integral gleich $2\pi i f^{(n)}(z_0)/n!$, und (2.3) folgt. \square

BEISPIEL 2.12. Seien $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ und $f : D := \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = (1+z)^\alpha$. Da f holomorph auf D ist, hat diese Funktion eine Potenzreihe bei $z_0 = 0$ mit Konvergenzradius $\rho \geq 1$. Es gilt genauer $\rho = 1$, da für $n > \alpha$ die Ableitung $f^{(n)}(z)$ für $z \rightarrow -1$ unbeschränkt ist. Die Taylorkoeffizienten von f bei 0 lassen sich iterativ berechnen und wir erhalten damit die Binomialreihe

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad |z| < 1,$$

vergleiche Beispiel 5.39 in Analysis 1. \diamond

Der nächste berühmte Satz von *Liouville* zeigt nachdrücklich, wie stark die Holomorphie (zumal für $D = \mathbb{C}$) eine Funktion einschränkt. Man beachte dabei, dass Beschränktheit oft einfach nachzuprüfen und weit von Konstanz einfernt ist. Außerdem ist etwa der Sinus im Reellen beschränkt und natürlich nicht konstant. Eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ heißt *ganz*.

THEOREM 2.13. *Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

BEWEIS. Sei $z \in \mathbb{C}$. Wähle einen Radius $r \geq 2|z|$. Die Cauchyabschätzung (2.2) mit $z_0 = 0$ liefert die Ungleichung

$$|f'(z)| \leq \frac{r}{(r-r/2)^2} \|f\|_\infty = \frac{4}{r} \|f\|_\infty.$$

Im Limes $r \rightarrow \infty$ folgt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, sodass Satz 1.20 die Aussage zeigt. \square

Wir zeigen die bekannteste Anwendung von Liouvilles Theorem, den *Fundamentalsatz der Algebra*, der im übrigen auch elementarere Beweise besitzt.

KOROLLAR 2.14. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein komplexes Polynom n -ten Grades hat n (eventuell wiederholte) Nullstellen in \mathbb{C} .*

BEWEIS. Wir schreiben das Polynom als $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ für $z \in \mathbb{C}$ und Konstanten $a_j \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$.

1) Wir nehmen an, dass p nirgends gleich 0 wäre. Somit existiert die ganze Funktion $f := 1/p$ auf \mathbb{C} . Im Hinblick auf Liouvilles Theorem zeigen wir nun die Beschränktheit von f . Der Satz vom Maximum liefert diese auf jeder Kugel $\overline{B}(0, r_0)$. Um f bei ∞ zu kontrollieren, wählen wir einen Radius $r_0 > 0$ mit

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} r_0^{j-n} \leq \frac{1}{2}.$$

(Dieser existiert, da alle Exponenten $j - n$ negativ sind.) Sei $|z| \geq r_0$. Damit ist $|z|$ so groß, dass in p der Term $a_n z^n$ dominiert; genauer gilt

$$|p(z)| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0| \geq |a_n| |z|^n - (|a_{n-1}| |z|^{n-1} + \dots + |a_0|)$$

$$= |a_n| |z|^n \left(1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} |z|^{j-n} \right) \geq |a_n| |z|^n \left(1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} r_0^{j-n} \right) \geq \frac{|a_n|}{2} |z|^n,$$

$$|f(z)| \leq \frac{2}{|a_n|} |z|^{-n} \leq \frac{2}{|a_n|} r_0^{-n}.$$

Somit ist f auf \mathbb{C} beschränkt, also konstant laut Theorem 2.13. Gemäß der obigen Abschätzung verschwindet f für $|z| \rightarrow +\infty$, sodass $f = 0$ ist; was unmöglich ist.

2) Demnach hat jedes nichtkonstante komplexe Polynom mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} . Mit Polynomdivision folgt dann iterativ die Aussage. \square

Wir folgern den *Nullstellensatz* aus dem Entwicklungssatz. Er besagt, dass sich eine holomorphe Funktion bei einer Nullstelle wie eine reine Potenz verhält.

THEOREM 2.15. *Sei D ein Gebiet und $f \in H(D)$ ungleich der Nullfunktion. Es gebe einen Stelle $z_0 \in D$ mit $f(z_0) = 0$. Dann existieren solche Zahlen $m \in \mathbb{N}$ und $r > 0$ mit $B(z_0, r) \subseteq D$ und eine Funktion $g \in H(B(z_0, r))$ mit $g(z_0) \neq 0$, dass die Gleichungen*

$$0 = f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0), \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0 \quad \text{und} \quad f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

für $z \in B(z_0, r)$ gelten. (Man nennt m die Ordnung der Nullstelle z_0 .)

BEWEIS. Nach Theorem 2.11 gibt es solch einen Radius $r > 0$ und Zahlen a_n , dass $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ für alle $z \in B(z_0, r)$ gilt, wobei $a_0 = f(z_0) = 0$ ist. Wenn alle $a_n = 0$ wären, dann verschwindet f demnach auf $B(z_0, r)$. Sei $w \in D$. Lemma 4.12 in Analysis 2 liefert einen Streckenzug in D von z nach w . Entlang diesem lässt sich das obige Argument endlich oft wiederholen und wir erhalten $f(w) = 0$ und somit $f = 0$, was der Annahme widerspricht. (Vergleiche Theorem 2.21 in Analysis 4.)

Also gibt es einen Index $m \in \mathbb{N}$ wie im Theorem. Für $z \in B(z_0, r)$ schreiben wir

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m} =: (z - z_0)^m g(z).$$

Als Potenzreihe ist g holomorph, und wir haben $g(z_0) = a_m \neq 0$. \square

Im Reellen hatt z.B. die C^1 Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = |x|^{3/2}$, keine ganzzahlige Nullstellenordnung.

2.3. Isolierte Singularitäten

Wir klassifizieren das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe eines isolierten Punktes in $\mathbb{C} \setminus D$. Zunächst führen wir die zentralen Begriffe ein.

DEFINITION 2.16. *Seien $f \in H(D)$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ so gegeben, dass $D_0 := B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ in D liegt. Dann ist z_0 eine isolierte Singularität von f . Weiter heißt z_0*

a) hebbar, wenn es eine Funktion $\tilde{f} \in H(B(z_0, r))$ mit $f|_{D_0} = \tilde{f}|_{D_0}$ gibt;

- b) Pol, wenn $|f(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow z_0$ gilt;
 c) wesentlich, wenn z_0 weder hebbar noch ein Pol ist.

Wir diskutieren einige typische Beispiele.

BEISPIEL 2.17. a) Sei $f : \Sigma_\pi \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = \log z$. Dann ist $z_0 = 0$ keine isolierte Singularität von f .

b) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Die Sinusreihe aus Beispiel 1.4 impliziert

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$$

für alle $z \neq 0$. Die rechte Seite ist als Potenzreihe holomorph (sogar auf ganz \mathbb{C}), und somit ist $z_0 = 0$ hebbar.

c) Seien $m \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = z^{-m}$. Dann ist $z_0 = 0$ ein Pol von f , weil $|f(z)| = |z|^{-m} \rightarrow +\infty$ für $z \rightarrow 0$ (uneigentlich) konvergiert.

d) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = e^{1/z}$. Dann ist $z_0 = 0$ wesentlich, da hier die Grenzwerte $f(1/n) = e^n \rightarrow +\infty$ und $f(-1/n) = e^{-n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gelten. \diamond

Wir kommen zum grundlegenden Resultat dieses Kapitels. Es liefert ein sehr bequemes Kriterium für die Hebbarkeit und zeigt, dass f bei Polstellen z_0 wie $(z - z_0)^{-m}$ wächst und dass f bei wesentlichen Singularitäten ganz \mathbb{C} approximiert. Die Beweise beruhen vor allem auf dem Entwicklungssatz und dem Nullstellensatz.

THEOREM 2.18. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von $f \in H(D)$. Dann gelten die folgenden Charakterisierungen.

a) Genau dann ist z_0 hebbar, wenn es so einen Radius $r_1 > 0$ gibt, dass $D_1 := B(z_0, r_1) \setminus \{z_0\}$ in D liegt und f auf D_1 beschränkt ist. (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

b) Genau dann ist z_0 ein Pol von f , wenn solche Zahlen $r_2, c_1, c_2 > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ gibt, dass $D_2 := B(z_0, r_2) \setminus \{z_0\}$ in D liegt und für alle $z \in D_2$ die Ungleichungen

$$c_1 |z - z_0|^{-m} \leq |f(z)| \leq c_2 |z - z_0|^{-m}$$

gelten. (Dieses $m \in \mathbb{N}$ heißt Polordnung von f bei z_0 .)

c) Genau dann ist z_0 wesentlich, wenn für jedes $r > 0$ mit $D_r := B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ das Bild $f(D_r)$ dicht in \mathbb{C} ist. (Satz von Casorati-Weierstraß)

Das obige Theorem ist im Reellen falsch. So ist etwa die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, beschränkt, besitzt aber in $x_0 = 0$ nicht einmal eine stetige Fortsetzung. Ferner strebt $g(x) = |x|^{-3/2} \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow 0$. Andererseits gilt

$$|x|^k g(x) \rightarrow \begin{cases} +\infty, & k = 1, \\ 0, & k \in \{2, 3, \dots\}, \end{cases}$$

für $x \rightarrow 0$, sodass $x_0 = 0$ für g keine ganzzahlige Polordnung hat.

BEWEIS VON THEOREM 2.18. a) Seien z_0 hebbar, sowie $r > 0$ und \tilde{f} wie in Definition 2.16 a). Nach dem Satz vom Maximum ist dann \tilde{f} auf $\overline{B}(z_0, r/2)$ beschränkt, sodass die Bedingung in Teil a) mit $r_1 = r/2$ gilt.

Sei f auf $B(z_0, r_1) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ beschränkt. Wir definieren $U = D \cup \{z_0\}$ und die Hilfsfunktion

$$g : U \rightarrow \mathbb{C}; \quad g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & z \in D, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Man beachte, dass U in \mathbb{C} offen und g auf D holomorph ist. Weiter konvergiert

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = (z - z_0)f(z) \rightarrow 0$$

für $z \rightarrow z_0$, da f bei z_0 beschränkt ist. Also liegt g in $H(U)$ und erfüllt $g'(z_0) = 0 = g(z_0)$. Theorem 2.11 liefert somit die Potenzreihendarstellung

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

auf $B(z_0, r_1) \subseteq U$. Wir definieren nun die Funktion

$$\tilde{f} : B(z_0, r_1) \rightarrow \mathbb{C}; \quad \tilde{f}(z) := \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2} = (z - z_0)^{-2} g(z) = f(z),$$

wobei wir für die zweite und dritte Gleichung $z \neq z_0$ annehmen. Als Potenzreihe ist \tilde{f} holomorph, und Aussage a) ist gezeigt.

b) Es ist klar, dass z_0 ein Pol ist, wenn die Bedingung in Teil b) gilt. Sei umgekehrt z_0 ein Pol. Dann gibt es so einen Radius $r > 0$, dass $D' := B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ in D liegt und $\min_{D'} |f| \geq 1$ ist. Somit ist $h_0 := 1/f$ in $H(D')$ enthalten und ist beschränkt. Also besitzt h_0 nach Behauptung a) und ihrem Beweis eine holomorphe Fortsetzung h auf $B(z_0, r)$. Da $|f(z)| \rightarrow +\infty$ für $z \rightarrow z_0$ konvergiert, hat h in z_0 eine Nullstelle.

Theorem 2.15 liefert nun einen Radius $\tilde{r} \in (0, r]$ und eine Funktion $\varphi \in H(B(z_0, \tilde{r}))$ mit $\varphi(z_0) \neq 0$ und $h(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$. Aus der Stetigkeit von φ erhalten wir nun solche Zahlen $r_2 \in (0, \tilde{r}]$ und $c_2 > c_1 > 0$, das $|\varphi|$ auf $B(z_0, r_2)$ Werte in $[c_2^{-1}, c_1^{-1}]$ annimmt. Somit erfüllt $f = 1/h$ die Bedingung in b).

c) Für die Aussage c) verweisen wir auf Theorem 3.3. in Analysis 4. □

Wir diskutieren einige einfache Beispiele. Es sei erwähnt, dass das Einsetzen der jeweiligen Potenzreihen oft einen guten Hinweis auf das Verhalten einer Funktion bei einer Singularität gibt, auch wenn es dann bequemer sein kann Theorem 2.18 für den Beweis heranzuziehen.

BEISPIEL 2.19. a) Sei $f : D := B(0, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}; f(z) = \frac{1}{1 - \cos z}$. Hier ist $z_0 = 0$ ein Pol zweiter Ordnung von f .

BEWEIS. Wie in einer Übung kann man sehen, dass der Kosinus in \mathbb{C} den Wert 1 nur bei $z = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ annimmt. Die Funktion $h_0 := 1/f : D \rightarrow \mathbb{C}$ hat die holomorphe Fortsetzung $h = 1 - \cos$ auf \mathbb{C} . Weiter gelten $h(0) = 0 = h'(0)$ und

$h''(0) = 1$, sodass die Nullstelle 0 von h die Ordnung 2 hat. Die Behauptung folgt nun wie im Beweis von Theorem 2.18 b). \square

b) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$. Dann ist 0 eine wesentliche Singularität von f . Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kann f mit $\tilde{f}(0) = 0$ zu einer differenzierbaren Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

BEWEIS. Für $x \in \mathbb{R}$ haben wir $|f(x)| \leq x^2 \rightarrow 0$ und

$$|f(ix)| = \frac{x^2}{2} |e^{\frac{i}{ix}} - e^{-\frac{i}{ix}}| \geq \frac{x^2}{2} (e^{\frac{1}{|x|}} - e^{-\frac{1}{|x|}}) \rightarrow +\infty$$

für $x \rightarrow 0$, wobei Satz 3.33 aus Analysis 1 einging. Also ist 0 wesentlich. Reell konvergiert hingegen

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0. \quad \square$$

c) Sei $f : D := B(0, \pi) \setminus \{0\}$; $f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$. Dann hat f in $z_0 = 0$ einen Pol erster Ordnung.

BEWEIS. Laut einer Übung hat der Sinus auch in \mathbb{C} die Nullstellenmenge $\pi\mathbb{Z}$. Wir schreiben f als

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{z}{\sin z} \cos z =: \frac{1}{z} g_0(z).$$

Nach Beispiel 2.17 konvergiert $g_0(z) \rightarrow 1$ für $z \rightarrow 0$, sodass g_0 laut Theorem 2.18 a) eine holomorphe Fortsetzung g auf $B(0, \pi)$ mit $g(0) = 1$ hat. Wegen Stetigkeit gibt es so einen Radius $r \in (0, 1)$, dass $|g(z)|$ für alle $z \in \overline{B}(0, r)$ in $[1/2, 2]$ ist. Nun folgt aus Theorem 2.18 b) die Aussage. \square

Bei isolierten Singularitäten besitzen holomorphe Funktionen verallgemeinerte Potenzreihenentwicklungen, wie der nachfolgende Hauptsatz zeigt. Aus diesen Reihen ergibt sich eine schöne Ergänzung von Theorem 2.18. Den recht aufwändigen Beweis findet man in Theorem 3.8 und Korollar 3.9 aus Analysis 4.

THEOREM 2.20. Seien $f \in H(D)$, $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$ mit $D_0 := B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \subseteq D$. Für $r \in (0, R)$ setzen wir $k_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$; $k_r(t) = z_0 + re^{it}$, und

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{k_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw. \quad (2.4)$$

Dann konvergiert die Laurentreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}, \quad z \in D_0,$$

absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von D_0 gegen $f(z)$. Die Koeffizienten a_n dieser Reihe sind eindeutig bestimmt und insbesondere unabhängig von $r \in (0, R)$. Weiter gelten die folgenden Äquivalenzen.

a) z_0 ist genau dann hebbar, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$ ist.

b) z_0 ist genau dann ein Pol m -ter Ordnung (mit $m \in \mathbb{N}$), wenn $a_{-m} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -m$ gelten.

c) z_0 ist genau dann wesentlich, wenn es Indizes $n_j \rightarrow -\infty$ mit $a_{n_j} \neq 0$ gibt.

Wir illustrieren dieses Resultat mit zwei einfachen Beispielen, in denen man mit bekannten Reihen die Laurentreihe berechnen und dann den Typ der Singularität ablesen kann.

BEISPIEL 2.21. a) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ liefert die Exponentialreihe die Laurententwicklung

$$f(z) := e^{\frac{1}{z}} = e^{(z^{-1})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^n}{(-n)!}.$$

Also ist 0 eine wesentliche Singularität von f , vergleiche Beispiel 2.17.

b) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = z^{-6}(\cos(z) - 1)$. Aufgrund der Kosinusreihe hat f die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} z^{2j-6} = -\frac{1}{2}z^{-4} + \frac{1}{4!}z^{-2} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!}z^2 - \dots$$

für $z \neq 0$. Laut Theorem 2.20 ist somit $z_0 = 0$ ein Pol vierter Ordnung. \diamond

Sei f wie in Theorem 2.20 und γ ein geschlossener Weg in D_0 . Die Laurentreihe konvergiert dann gleichmäßig auf $R(\gamma) = \Gamma$ gegen f . Die Sätze 1.19 und 2.3 zeigen nun die Identität

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = a_{-1} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}, \quad (2.5)$$

Hierbei verwenden wir, dass $z \mapsto (z - z_0)^n$ für $n \neq -1$ die Stammfunktion $z \mapsto \frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ auf D_0 hat. Wir definieren die *Windungszahl* oder den *Index* von γ um z_0 durch

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}. \quad (2.6)$$

Man kann zeigen, dass $n(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$ gleich der Anzahl der positiven Umläufe minus der Anzahl der negativen Umläufe von γ um z_0 ist, siehe Bemerkung 1.25 in Analysis 4. Für die mehrfach durchlaufene Kreislinie um z_0 haben wir diese Aussage in Beispiel 1.18 nachgerechnet. Im nachfolgenden Schaubild wird sie illustriert.

Die Formel (2.5) motiviert den nächsten Begriff.

DEFINITION 2.22. Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von $f \in H(D)$ und a_n für $n \in \mathbb{Z}$ die Koeffizienten der Laurentreihe von f um z_0 aus (2.4). Das Residuum von f bei z_0 ist die Zahl

$$\text{Res}(f, z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} f(w) dw,$$

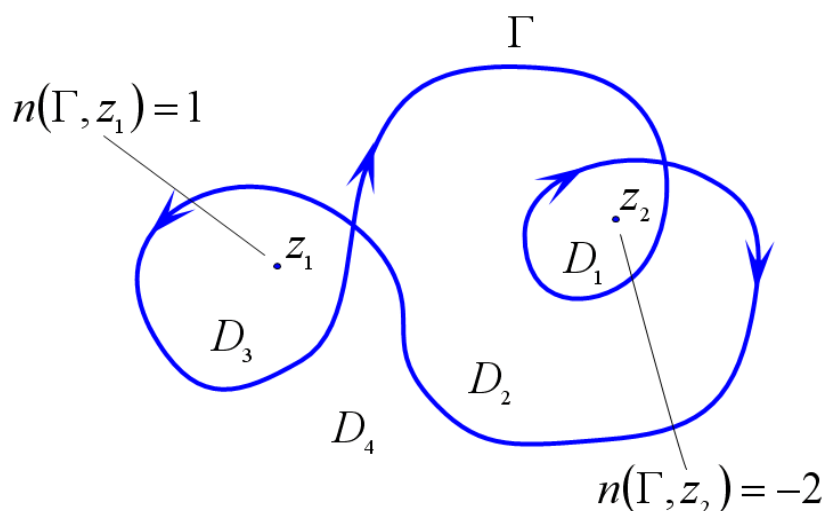


ABBILDUNG 2.2. Graphische Bestimmung der Windungszahl

wobei $\overline{B}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ in D liegt.

Der folgende *Residuensatz* verfeinert die Idee aus (2.5), um Integrale zu berechnen.

THEOREM 2.23. Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sternförmig, γ ein stückweiser C^1 -Weg mit Bild $\Gamma \subseteq U$, $A = \{z_1, \dots, z_n\} \subseteq U \setminus \Gamma$, $D = U \setminus A$ und $f \in H(D)$ mit $D = U \setminus A$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n n(\gamma, z_j) \text{Res}(f, z_j).$$

Diese Aussage ist eine vereinfachte Variante von Theorem 3.12 in Analysis 4. Gemäß des nächsten Hilfssatzes kann man Residuen für Pole bequem berechnen, wenn man die Polordnung kennt. Erst solche Aussagen machen den Residuensatz zu einem nützlichen Instrument.

LEMMA 2.24. Seien z_0 ein Pol m -ter Ordnung von $f \in H(D)$. Dann gelten

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} ((z - z_0)^m f(z)),$$

und somit für $m = 1$

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

BEWEIS. Wir zeigen die Aussage nur für $m = 1$, siehe Lemma 3.13 in Analysis 4 für den allgemeinen Fall. Theorem 2.20 und die Stetigkeit von Potenzreihen liefern

$$(z - z_0) f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-1} (z - z_0)^k \longrightarrow a_{-1}, \quad z \rightarrow z_0. \quad \square$$

Mit dem Residuensatz (oder oft nur mit Cauchys Integralsatz und -formel) kann man eine Reihe von reellen Integrale berechnen, für die man keine Stammfunktion kennt. Hier berechnen wir nur ein einfaches Beispiel.

BEISPIEL 2.25. Sei $a > 1$. Dann gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

BEWEIS. Das Integral existiert, da der Integrand stetig ist und wir über ein kompaktes Intervall integrieren. Um es mittels komplexer Methoden zu berechnen, schreiben wir den Kosinus um und fügen die Parametrisierung $z = \gamma(t) = e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$, des Einheitskreises ein. Dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + \cos t} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})} = \frac{2}{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{it}}{2ae^{it} + (e^{it})^2 + 1} dt \\ &= \frac{2}{i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \frac{4\pi}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z - z_2)^{-1}}{z - z_1} dz \end{aligned}$$

für die Nullstellen $z_{1/2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ des Nennerpolynoms $z^2 + 2az + 1$. Man beachte, dass z_1 in $(-1, 0)$ liegt und $z_2 < -a < -1$ ist. Also ist der Zähler $f(z) = (z - z_2)^{-1}$ holomorph auf $B(0, a)$. Cauchys Integralformel (2.1) liefert nun

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{4\pi}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \quad \square$$

Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die auf \mathbb{R} absolut integrierbar ist, definieren wir die Fourier Transformation

$$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Diese ist von großer Bedeutung in vielen Gebieten der Mathematik und ihren Anwendungen. Bei ihrer Untersuchung spielen komplexe Kurvenintegrale und Methoden der Funktionentheorie eine wichtige Rolle. Wir geben hier nur die Transformierte von $g(x) = (1 + x^2)^{-1}$ an. Nach Beispiel 3.15 von Analysis 4 gilt

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\xi x}}{1 + x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Das Riemannsche Integral und Volumenberechnung

3.1. Der Jordansche Inhalt

Wir stellen uns die Frage, ob man auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m) = \{A \mid A \subseteq \mathbb{R}^m\}$ des \mathbb{R}^m sinnvoll ein *Volumen* (oder *Inhalt*) vol definieren kann. Für Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ setzt man dazu einfach $\text{vol}(I)$ gleich der Länge $|I| \in [0, \infty]$ des Intervalls. Das mehrdimensionale Analogon sind Quader $Q = I_1 \times \cdots \times I_m$ im \mathbb{R}^m , deren Volumen $\text{vol}(Q) := |I_1| \cdot \cdots \cdot |I_m| \in [0, \infty]$ durch das Produkt der Längen der Intervalle $I_j \subseteq \mathbb{R}$ gegeben ist. Im allgemeinen sucht man nach einer Abbildung $\text{vol} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \rightarrow [0, \infty]$, die das Volumen auf der Menge \mathcal{Q}_m der m -dimensionalen Quader fortsetzt und die (*endlich*) *additiv* und *bewegungsinvariant* ist; das heißt

- (a) für alle paarweisen disjunkten Mengen $A_j \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt $\text{vol}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \text{vol}(A_1) + \cdots + \text{vol}(A_n)$;
- (b) für jede Bewegung $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ und jedes $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ist $\text{vol}(VA) = \text{vol}(A)$.

Eine Bewegung ist eine affine Abbildung der Form $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$; $x \mapsto Ux + v$, für einen Verschiebungsvektor $v \in \mathbb{R}^m$ und eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Für $m \geq 3$ existiert jedoch **keine** solche Abbildung. Dies ist die Konsequenz des *Banach–Tarski Paradoxons* (1924): Für zwei beliebige Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ mit nichtleerem Innern findet man solche paarweise disjunkten Teilmengen $C_j \subseteq A$ und Bewegungen $V_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, dass $A = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ und $B = V_1 C_1 \cup \cdots \cup V_n C_n$ gelten und auch die Bilder $V_j C_j$ paarweise disjunkt sind. Hierbei kann man etwa die Kugel $A = B(0, 1)$ und die zwei disjunkten Kugeln $B = B(0, 1) \cup B(3, 1)$ gleicher Größe wählen (wobei man mit $n = 5$ Mengen C_j auskommt). Natürlich kann man für solche Mengen keinen Inhalt vol mit den obigen Eigenschaften definieren. Aus (a) und (b) würde ja die Gleichheit $\text{vol}(A) = \text{vol}(B)$ für alle Mengen mit nichtleeren Innern folgen, was auf \mathcal{Q}_m aber nicht stimmt. Im übrigen existiert ein solches Volumen auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$; es ist aber hochgradig uneindeutig. (Diese Aussagen beruhen wesentlich auf dem Auswahlaxiom der Mengenlehre.)

Man muss also den Volumenbegriff auf ‘gute’ Teilmengen des \mathbb{R}^m einschränken. Wie wir unten sehen werden, umfasst die hier gewählte Klasse der Mengen bei weitem alle für uns relevanten Objekte. Wir folgen dabei der Darstellung in Kapitel 7 des Buches [Wa] von Walter, auf das wir für fast alle Beweise verweisen.

Zunächst erinnern wir an drei wichtige Begriffe aus Analysis 2. Für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^m$ definiert man das Innere A° , den Abschluss \bar{A} , und den Rand ∂A durch

$$A^\circ = \{x \in A \mid \exists r(x) > 0 : B(x, r(x)) \subseteq A\},$$

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists x_n \in A \text{ mit: } x_n \rightarrow x \ (n \rightarrow \infty)\},$$

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists x_n \in A, y_n \in \mathbb{R}^m \setminus A \text{ mit: } x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow x \ (n \rightarrow \infty)\}.$$

Also ist \bar{A} die disjunkte Vereinigung von A° und ∂A . Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ist genau dann offen bzw. abgeschlossen, wenn sie $A = A^\circ$ bzw. $A = \bar{A}$ erfüllt. (Siehe Satz 2.22 in Analysis 2.) Weiter ist A genau dann abgeschlossen und beschränkt, wenn die Menge kompakt ist (d.h., jede Folge in A hat eine Teilfolge mit Grenzwert in A), siehe Theorem 2.44 in Analysis 2.

In einem ersten Schritt dehnen wir den Volumenbegriff von \mathcal{Q}_m auf *Quadersummen* S aus. Eine solche ist eine endliche Vereinigung von kompakten Quadern $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{Q}_m$ mit paarweise disjunkten Innern $Q_i^\circ \cap Q_j^\circ = \emptyset$ für $i \neq j$. Es sei \mathcal{S}_m die Menge aller Quadersummen im \mathbb{R}^m . Für $S \in \mathcal{S}_m$ setzt man

$$\text{vol}(S) = \text{vol}(Q_1) + \dots + \text{vol}(Q_n). \quad (3.1)$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Quader Q_i : Sei etwa $S = Q'_1 \cup \dots \cup Q'_k$ für Quader mit paarweise disjunkten Innern. Laut Abschnitt 7.3 von [Wa] gilt dann entsprechend $\text{vol}(S) = \text{vol}(Q'_1) + \dots + \text{vol}(Q'_k)$. Dort werden auch die folgenden Aussagen beweisen. Seien S und T zwei Quadersummen. Dann liegt auch ihre Vereinigung $S \cup T$ in \mathcal{S}_m und erfüllt $\text{vol}(S \cup T) \leq \text{vol}(S) + \text{vol}(T)$. Falls $S^\circ \cap T^\circ = \emptyset$ ist, gilt hier Gleichheit. Aus der Inklusion $S \subseteq T$ folgt $\text{vol}(S) \leq \text{vol}(T)$.

Wir können nun in einem zweiten Schritt das gewünschte Volumen für eine gewisse Klasse beschränkter Mengen einführen.

DEFINITION 3.1. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt. Ihr innerer bzw. äußerer (Jordanscher) Inhalt ist

$$\text{vol}_i(B) = \sup\{\text{vol}(S) \mid S \in \mathcal{S}_m, S \subseteq B\} \quad \text{bzw.}$$

$$\text{vol}_a(B) = \inf\{\text{vol}(S) \mid S \in \mathcal{S}_m, B \subseteq S\}.$$

Die Menge B heißt quadrierbar oder (Jordan-)messbar, wenn diese beiden Zahlen übereinstimmen. In diesem Fall definiert man ihren (Jordan-)Inhalt durch

$$\text{vol}(B) := \text{vol}_i(B) = \text{vol}_a(B).$$

Wir besprechen einige Eigenschaften des inneren und äußeren Inhalts, wobei $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt sind. Diese Aussagen folgen zum Teil leicht aus Definition 3.1, siehe die Abschnitte 7.4 und 7.5 von [Wa]. Zunächst gelten die Ungleichungen

$$0 \leq \text{vol}_i(B) \leq \text{vol}_a(B) < \infty.$$

Insbesondere folgt aus $\text{vol}_a(B) = 0$, dass B quadrierbar mit Volumen 0 ist. Man nennt B dann (Jordansche) Nullmenge.

In Hinblick auf die Additivität ist wichtig, dass die Ungleichungen $\text{vol}_a(A \cup B) \leq \text{vol}_a(A) + \text{vol}_a(B)$ und, falls $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$ ist, $\text{vol}_i(A \cup B) \geq \text{vol}_i(A) + \text{vol}_i(B)$ erfüllt sind. Aus der Inklusion $A \subseteq B$ folgen die Relationen

$$\text{vol}_i(A) \leq \text{vol}_i(B) \quad \text{und} \quad \text{vol}_a(A) \leq \text{vol}_a(B).$$

Es gelten ferner die Formeln

$$\text{vol}_i(B) = \text{vol}_i(B^\circ) \quad \text{und} \quad \text{vol}_a(B) = \text{vol}_a(\overline{B}).$$

Der Rand von B spielt also keine Rolle. Wir geben einige einfache Beispiele an. Nichttriviale Fälle können wir erst später mit Hilfe des Integrals berechnen.

BEISPIEL 3.2. a) Jede Quadersumme S_0 ist quadrierbar und das Volumen aus (3.1) und Definition 3.1 stimmen überein. (Das Supremum und das Infimum in dieser Definition werden bei S_0 angenommen.)

b) Sei $D = [0, 1]^m \cap \mathbb{Q}^m$. Dann gelten $\text{vol}_i(D) = 0$ und $\text{vol}_a(D) = 1$, sodass D nicht quadrierbar ist.

c) Die beschränkte Menge B sei in einer Koordinatenebene enthalten, z.B. in $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$. Dann ist B eine Nullmenge, da es in Quadern $Q' \times [-1/n, 1/n]$ mit Volumen $2 \text{vol}(Q')/n$ liegt, wobei $Q' \in \mathcal{Q}_{m-1}$ groß genug und $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist.

d) Ähnlich zeigt man, dass Graphen $B = \{(x', f(x')) \mid x' \in B'\}$ Nullmengen sind, wenn $B' \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ beschränkt und $f : B' \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig sind, siehe Abschnitt 7.6 von [Wa]. \diamond

In Abschnitt 7.5 von [Wa] wird die Jordan-Messbarkeit auf recht einfache Weise charakterisiert.

SATZ 3.3. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt. Dann gilt $\text{vol}_i(B) + \text{vol}_a(\partial B) = \text{vol}_a(B)$. Somit ist B genau dann quadrierbar, wenn ihr Rand den Jordan-Inhalt 0 hat.

Aus dieser Charakterisierung und den oben angegebenen Eigenschaften folgen leicht die zentralen Rechenregeln für den Jordaninhalt (nur Aussage f) ist aufwändiger), siehe die Abschnitte 7.4, 7.6 und 7.9 aus [Wa]. Insbesondere erfüllt er die eingangs genannten Bedingungen.

SATZ 3.4. Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt und quadrierbar. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.

- Die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$ und $B \setminus A$ sind quadrierbar.
- Sei $A \subseteq B$. Dann haben wir $\text{vol}(A) \leq \text{vol}(B)$.
- $\text{vol}(A \cup B) \leq \text{vol}(A) + \text{vol}(B)$.
- Sei $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$. Dann gilt $\text{vol}(A \cup B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B)$.
- Alle Mengen C mit $B^\circ \subseteq C \subseteq \overline{B}$ und insbesondere B° und \overline{B} sind quadrierbar. Ihr Inhalt ist gleich $\text{vol}(B)$. Speziell gilt $\text{vol}(Q) = |I_1| \cdot \dots \cdot |I_m|$ für jeden beschränkten Quader $Q = I_1 \times \dots \times I_m$ (und nicht nur für kompakte Quader).
- Seien $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $v \in \mathbb{R}^m$ und $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$; $Ux = Tx + v$. Dann ist UB quadrierbar mit Inhalt $\text{vol}(UB) = |\det T| \text{vol}(B)$. Also ist vol bewegungsinvariant.

Aus diesem Satz und dem obigen Beispiel ergibt sich eine leicht zu überprüfende Bedingung für Jordan-Messbarkeit, die für unsere Beispiele völlig genügt.

KOROLLAR 3.5. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt und es gelte $\partial B = M_1 \cup \dots \cup M_n$ für Mengen $M_j = V_j G_j$, wobei $V_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ Bewegungen und G_j Mengen wie in Beispiel 3.2 d) sind. Dann ist B quadrierbar.

BEWEIS. Nach Beispiel 3.2 d) haben die Mengen G_j den Inhalt 0, und somit auch M_j nach Satz 3.4 f). Gemäß Teil c) dieses Satzes ist also ∂B eine Nullmenge, sodass Satz 3.3 die Behauptung impliziert. \square

BEISPIEL 3.6. Das Ellipsoid $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1\}$ mit den Halbmessern $a, b, c > 0$ ist quadrierbar. Um dies einzusehen, verwenden wir zunächst die Diagonalmatrix D mit der Hauptdiagonale (a, b, c) . Dann gilt $E = D(\overline{B}(0, 1))$, denn (x, y, z) liegt genau dann in E , wenn $D^{-1}(x, y, z) = (x/a, y/b, z/c)$ in $\overline{B}(0, 1)$ enthalten ist. Weiter kann man die Kugelsphäre als $\partial \overline{B}(0, 1) = M_+ \cup M_-$ schreiben, wobei die Halbsphären M_\pm die Bilder der Funktionen $f_\pm(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ für $(x, y) \in \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$ sind. Somit folgt die Behauptung aus Korollar 3.5 und Satz 3.4. \diamond

3.2. Das Riemannsche Integral

Man konstruiert das Riemann-Integral auf dem \mathbb{R}^m ganz ähnlich wie im eindimensionalen Fall. Für unsere Zwecke können wir uns weitgehend auf stetige Integranden einschränken. Allerdings benötigt man auch *charakteristische Funktionen*

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^m \setminus A, \end{cases}$$

für gewisse Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^m$, da der Inhalt von A gerade das Integral über $\mathbb{1}_A$ sein wird. (Hier kann man \mathbb{R}^m auch durch andere Obermengen von A ersetzen.)

Im Reellen konnte man die Inhaltsproblematik ignorieren und sich auf kompakte Intervalle $A = I$ einschränken, sodass man insgesamt nur stückweise stetige Funktionen betrachten musste. Im \mathbb{R}^m reichen Quader nicht aus, da man gerade das Volumen krumm berandeter Mengen wie Kugeln definieren und berechnen will. Aus diesem Grunde haben wir im vorhergehenden Abschnitt quadrierbare Menge eingeführt und diskutiert.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt und quadrierbar. Eine (*markierte*) *Zerlegung* von B ist eine Menge der Form

$$Z = \{(B_j, \xi_j)_{j=1}^k \mid \forall j \in \{1, \dots, k\} : \xi_j \in B_j \subseteq B, B_j \text{ quadrierbar}, \\ B_1 \cup \dots \cup B_k = B, \forall i \neq j : B_i^\circ \cap B_j^\circ = \emptyset\},$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ beliebig ist. Die Menge aller solchen Z bezeichnen wir mit $\mathcal{Z}(B)$. Die *Feinheit* von Z ist der maximale Durchmesser der B_j , also die Zahl

$$|Z| = \max_{j \in \{1, \dots, k\}} \sup_{x, y \in B_j} |x - y|_2 \in [0, \infty).$$

Weiter sei $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und Z aus $\mathcal{Z}(B)$. Ähnlich wie in Analysis 2 definieren wir dann die *Riemannsche Summe*

$$S(f, Z) = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \text{vol}(B_j). \quad (3.2)$$

Auch wie im Reellen erklärt man nun das Riemannsche Integral.

DEFINITION 3.7. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt und quadrierbar, sowie $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Es gebe so eine Zahl $J \in \mathbb{R}$, dass wir für jede Folge (Z_n) in $\mathcal{Z}(B)$ mit $|Z_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ den Grenzwert $J = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, Z_n)$ haben. Dann nennen wir f (Riemann-)integrierbar und schreiben

$$J = \int_B f(x) \, dx = \int_B f \, dx.$$

In [Wa] wird eine äquivalente Definition gewählt. Man ersetzt in (3.2) den Funktionswert $f(\xi_j)$ durch $\inf_{B_j} f$ bzw. $\sup_{B_j} f$ und erhält so die Riemannsche Untersumme $\underline{S}(f, Z)$ bzw. Obersumme $\overline{S}(f, Z)$. Die beschränkte Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z_ε von B mit

$$0 \leq \overline{S}(f, Z_\varepsilon) - \underline{S}(f, Z_\varepsilon) \leq \varepsilon \quad (3.3)$$

gibt (*Riemannsches Integrierbarkeitskriterium*), oder wenn das Supremum aller Untersummen gleich dem Infimum aller Obersummen ist. Diese Zahl ist dann gleich dem Grenzwert J in Definition 3.7, siehe Abschnitt 7.10 und Satz 7.13 in [Wa].

Zunächst zeigen wir die Integrierbarkeit (gleichmäßig) stetiger Funktionen, und diskutieren einige andere einfache Beispiele.

BEISPIEL 3.8. a) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt und quadrierbar, sowie $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Theorem 2.47 in Analysis 2 ist f sogar gleichmäßig stetig. Also existiert so ein Radius $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, dass für alle $x, y \in B$ mit $|x - y|_2 \leq \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ gilt. Wir wählen nun eine Zerlegung Z_ε von B mit Feinheit $|Z_\varepsilon| \leq \delta$. Dann folgt mit Satz 3.4 und der Disjunktheit der Mengen B_j°

$$0 \leq \overline{S}(f, Z_\varepsilon) - \underline{S}(f, Z_\varepsilon) = \sum_{j=1}^k (\sup_{B_j} f - \inf_{B_j} f) \operatorname{vol}(B_j) \leq \sum_{j=1}^k \varepsilon \operatorname{vol}(B_j) = \varepsilon \operatorname{vol}(B).$$

Das Kriterium von Riemann (3.3) liefert nun die Integrierbarkeit von f .

Genauso erhält man die Integrierbarkeit einer gleichmäßig stetigen Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer beschränkten und quadrierbaren Menge $B \subseteq \mathbb{R}^m$. In diesem Fall ist f automatisch beschränkt, da f dann eine stetige Fortsetzung auf die kompakte Menge \overline{B} besitzt (siehe Abschnitt 2.19 in [Wa]), die nach dem Satz vom Maximum beschränkt ist.¹

b) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt und quadrierbar. Dann ist die konstante Funktion $\mathbb{1} : B \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit $\int_B \mathbb{1} \, dx = \operatorname{vol}(B)$, denn für jede Zerlegung gilt

$$S(\mathbb{1}, Z) = \sum_{j=1}^k \mathbb{1}(\xi_j) \operatorname{vol}(B_j) = \sum_{j=1}^k \operatorname{vol}(B_j) = \operatorname{vol}(B).$$

c) Sei $D = [0, 1]^m \cap \mathbb{Q}^m$. Die Funktion $f = \mathbb{1}_D$ ist nicht (Riemann-)integrierbar auf $[0, 1]^m$. Sei dazu $(Z_n^{\mathbb{R}})$ und $(Z_n^{\mathbb{Q}})$ Folgen wie in Definition 3.7, wobei die Zwischenstellen ξ_j in den Zerlegungen $Z_n^{\mathbb{R}}$ alle irrational und in $Z_n^{\mathbb{Q}}$ alle rational sind.

¹Diese Aussage fehlte in der Vorlesung.

Dann sieht man wie oben, dass $S(\mathbb{1}_D, Z_n^{\mathbb{R}}) = 0$ und $S(\mathbb{1}_D, Z_n^{\mathbb{Q}}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten, woraus die Behauptung folgt.

d) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Jordan-Nullmenge und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f integrierbar und $\int_B f \, dx = 0$, denn jede Riemannsche Summe verschwindet wegen

$$|S(f, Z)| = \left| \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \operatorname{vol}(B_j) \right| \leq \|f\|_{\infty} \sum_{j=1}^k \operatorname{vol}(B_j) = \|f\|_{\infty} \operatorname{vol}(B) = 0. \quad \diamond$$

Man benötigt die Ober- und Untersummen insbesondere um zu zeigen, dass Produkte integrierbarer Funktionen wieder integrierbar sind. Ansonsten folgen viele der folgenden einfachen Eigenschaften wie in Analysis 2 leicht aus Definition 3.7. Sie werden in Abschnitt 7.10 von [Wa] bewiesen.

SATZ 3.9. *Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt und quadrierbar, $A \subseteq B$, sowie $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.*

a) *Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist auch $\alpha f + \beta g : B \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und erfüllt*

$$\int_B (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_B f(x) \, dx + \beta \int_B g(x) \, dx.$$

b) *Sei $f \leq g$ auf B . Dann gilt $\int_B f \, dx \leq \int_B g \, dx$.*

c) *Die Funktionen $\max\{f, g\} : B \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f, g\} : B \rightarrow \mathbb{R}$ und $fg : B \rightarrow \mathbb{R}$ sind integrierbar, und somit auch $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_- = \max\{-f, 0\}$ und $|f| = f_+ - f_-$. Sei $\inf_B |f| > 0$. Dann ist $1/f : B \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Ferner gilt*

$$\left| \int_B f(x) \, dx \right| \leq \int_B |f(x)| \, dx.$$

d) *Sei $B = B_1 \cup B_2$ für quadrierbare Mengen B_1 und B_2 mit disjunkten Innern. Sei $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Genau dann ist h integrierbar, wenn die Einschränkungen $h|_{B_1} : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $h|_{B_2} : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar sind. Dann gilt*

$$\int_B h(x) \, dx = \int_{B_1} h|_{B_1}(x) \, dx + \int_{B_2} h|_{B_2}(x) \, dx.$$

(Meist lässt man hier die Einschränkungszeichen wieder weg.) Zum Beispiel ist h auf B integrierbar, wenn $B_2 = N$ eine Jordan-Nullmenge ist (z.B. ∂B) und h auf $B \setminus N$ integrierbar ist und man erhält

$$\int_B h(x) \, dx = \int_{B \setminus N} h(x) \, dx.$$

Ferner ist $\mathbb{1}_A : B \rightarrow \mathbb{R}$ und damit auch $\mathbb{1}_A f : B \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit

$$\int_A f(x) \, dx = \int_B \mathbb{1}_A(x) f(x) \, dx.$$

Speziell gilt $\operatorname{vol}(A) = \int_B \mathbb{1}_A \, dx$, vergleiche Beispiel 3.8 b).

Man beachte, dass die letzte Aussage uns (im Prinzip) erlaubt Inhalte durch Integrale zu berechnen. Wir fügen noch zwei einfache Konvergenzsätze hinzu.

SATZ 3.10. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt und quadrierbar und $f_n, g_n : B \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar für $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.

a) Die Folge (f_n) konvergiere auf B gleichmäßig gegen eine Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist auch f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(x) \, dx = \int_B f(x) \, dx.$$

b) Die Folge der Partialsummen $\sum_{n=1}^N g_n$ konvergiere auf B gleichmäßig gegen die Reihe $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n : B \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist auch g integrierbar und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_B g_n(x) \, dx = \int_B \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \, dx.$$

Für die Integrierbarkeit der Grenzfunktionen verweisen wir auf Satz 7.11 in [Wa]. Die Grenzwerte zeigt man dann wie in Satz 1.19.

3.3. Berechnung von Integralen und Volumina

Die Integrale reeller Funktionen hat man in Analysis 2 (soweit machbar) über Stammfunktionen berechnet. Im Mehrdimensionalen ist dies nicht möglich. Stattdessen werden wir die Berechnung mehrdimensionaler Integrale auf den eindimensionalen Fall zurückführen. Dazu betrachten wir zunächst *iterierte Integrale* und später den Transformationssatz.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt und quadrierbar. Wir schreiben $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ mit $m = k + l$ und definieren die *Schnitte*

$$B^x = \{y \in \mathbb{R}^l \mid (x, y) \in B\} \quad \text{für jedes feste } x \in \mathbb{R}^k,$$

$$B_y = \{x \in \mathbb{R}^k \mid (x, y) \in B\} \quad \text{für jedes feste } y \in \mathbb{R}^l,$$

vergleiche Abbildung 3.3. (Man beachte, dass diese für große x bzw. y leer sind.) Im einfachen Falle eines kartesischen Produktes $B = B' \times B'' \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ ergibt sich

$$B^x = \begin{cases} B'', & x \in B', \\ \emptyset, & x \in \mathbb{R}^k \setminus B'; \end{cases} \quad B_y = \begin{cases} B', & y \in B'', \\ \emptyset, & y \in \mathbb{R}^l \setminus B''. \end{cases} \quad (3.4)$$

Im folgenden Satz ist es nützlich Funktionen auf Quadern zu betrachten. Wir können einen Quader $Q \in \mathcal{Q}_m$ wählen, der den gegebenen Integrationsbereich B umfasst. Sei $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig (also integrierbar nach Beispiel 3.8 a)). Um f auf $Q \supseteq B$ mit 0 fortzusetzen, definieren wir

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B, \\ 0, & x \in Q \setminus B. \end{cases}$$

Es gilt $\tilde{f} = \mathbb{1}_B \tilde{f}$ auf Q . Mit Q und B ist auch $Q \setminus B$ nach Satz 3.4 a) quadrierbar. Also liefert Satz 3.9 d) die Integrierbarkeit von \tilde{f} und die Gleichungen

$$\int_B f(x, y) \, d(x, y) = \int_Q \tilde{f}(x, y) \, d(x, y) = \int_Q \mathbb{1}_B(x, y) \tilde{f}(x, y) \, d(x, y).$$

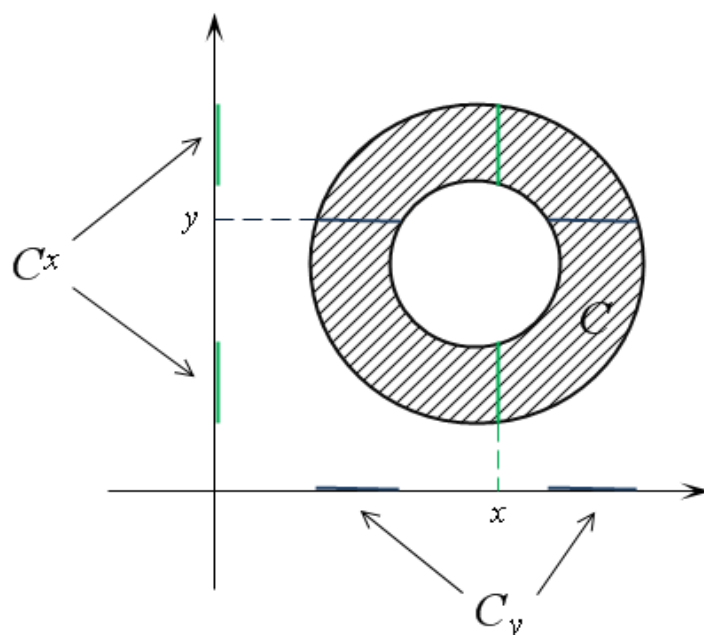


ABBILDUNG 3.1. Schnitte eines Kreisringes C

Wir haben die Zerlegung $Q = P \times R$ für Quader $P \in \mathcal{Q}_k$ und $R \in \mathcal{Q}_l$. Sei $x \in P$ bzw. $y \in R$. Dann sind die *Schnittfunktionen*

$$B^x \rightarrow \mathbb{R}; \quad y \mapsto f(x, y), \quad \text{bzw.} \quad B_y \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(x, y),$$

auch gleichmäßig stetig ($B^x = \emptyset$ bzw. $B_y = \emptyset$ sind möglich). Wir nehmen an, dass B^x quadrierbar ist. Dann folgt wie oben

$$\int_{B^x} f(x, y) \, dy = \int_{B^x} \mathbb{1}_{B^x}(y) \tilde{f}(x, y) \, dy = \int_{B^x} \tilde{f}(x, y) \, dy =: F(x) \quad (3.5)$$

für $x \in P$. Im folgenden *Satz von Fubini* wird nun die Integrierbarkeit von F gezeigt und das Integral über B durch iterierte Integrale über z.B. B^x und P ausgedrückt.

THEOREM 3.11. *Sei $Q = P \times R \in \mathcal{Q}_m$ mit $P \in \mathcal{Q}_k$ und $R \in \mathcal{Q}_l$. Seien $B \subseteq Q$ beschränkt und quadrierbar, sowie $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. (Letzteres gilt für stetige f und abgeschlossene B .)*

a) *Sei B^x für alle $x \in P$ quadrierbar. Dann ist $F : P \rightarrow \mathbb{R}$ aus (3.5) integrierbar und wir erhalten die Formeln*

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) \, d(x, y) &= \int_Q \tilde{f}(x, y) \, d(x, y) = \int_P \left(\int_R \mathbb{1}_B(x, y) \tilde{f}(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_P \left(\int_{B^x} \tilde{f}(x, y) \, dy \right) dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

b) Sei B_y für alle $y \in R$ quadrierbar. Dann gilt analog die Formel

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_R \left(\int_P \mathbb{1}_B(x, y) \tilde{f}(x, y) dx \right) dy = \int_R \left(\int_{B_y} \tilde{f}(x, y) dx \right) dy. \quad (3.7)$$

Wenn alle Schnitte B^x und B_y quadrierbar sind, ergeben sich die Gleichungen

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_P \left(\int_{B^x} \tilde{f}(x, y) dy \right) dx = \int_R \left(\int_{B_y} \tilde{f}(x, y) dx \right) dy.$$

Dieses Theorem folgt aus Satz 7.15 in [Wa] und unseren Vorüberlegungen. In Beispielen kann man P oft so wählen, dass im letzten Term von (3.6) nur f und nicht \tilde{f} auftritt (und analog für (3.7)). Wir geben drei wichtige Folgerungen an.

BEMERKUNG 3.12. a) Seien $B = Q = P \times R \in \mathcal{Q}_k \times \mathcal{Q}_l$ und $f(x, y) = g(x)h(y)$ für gleichmäßig stetige $g : P \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : R \rightarrow \mathbb{R}$. Gemäß (3.6) und Satz 3.9 gilt dann die einfache Produktformel

$$\begin{aligned} \int_Q f(x, y) d(x, y) &= \int_P \left(\int_R g(x)h(y) dy \right) dx = \int_P g(x) \left(\int_R h(y) dy \right) dx \\ &= \int_P g(x) dx \int_R h(y) dy. \end{aligned}$$

b) Man kann Theorem 3.11 iteriert anwenden, wenn alle auftretenden Schnitte quadrierbar sind. Dazu sei $Q = I_1 \times \cdots \times I_m$ für Intervalle I_j . Es folgt zum Beispiel

$$\int_B f(x) dx = \int_{I_1} \cdots \int_{I_{m-1}} \left(\int_{I_m} \mathbb{1}_B(x_1, \dots, x_m) \tilde{f}(x_1, \dots, x_m) dx_m \right) dx_{m-1} \cdots dx_1.$$

c) Sei $f = \mathbb{1}$ in Theorem 3.11. Weiter sei $B \subseteq [a, b] \times Q'$ quadrierbar mit $Q' \in \mathcal{Q}_{m-1}$ und mit quadrierbaren Schnitten B^x für alle $x \in [a, b]$. Beispiel 3.8 b) und Formel (3.6) liefern dann das *Prinzip des Cavalieri*

$$\text{vol}(B) = \int_B 1 d(x, y) = \int_a^b \text{vol}_{m-1}(B^x) dx.$$

Also ist der Inhalt von B in \mathbb{R}^m gleich dem Integral über die $(m-1)$ -dimensionalen Inhalte der Schnitte von B bei $x \in [a, b]$. \diamond

Wir betrachten zuerst den einfacheren Fall von Quadern $B = Q$.

BEISPIEL 3.13. a) Seien $B = [0, 2] \times [1, 3]$ und $f : B \rightarrow \mathbb{R}; f(x, y) = 2x - x^3y$. Offenbar ist B abgeschlossen und quadrierbar, und ist f stetig. Die Formeln (3.6) und (3.4) sowie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung implizieren

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) d(x, y) &= \int_0^2 \left(\int_1^3 (2x - x^3y) dy \right) dx = \int_0^2 \left[2xy - x^3 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^3 dx \\ &= \int_0^2 (4x - 4x^3) dx = \left[2x^2 - x^4 \right]_0^2 = -8. \end{aligned}$$

b) Seien $B = [0, 1] \times [0, \pi]$ und $f : B \rightarrow \mathbb{R}; f(x, y) = y \sin(xy)$. Wieder sind B abgeschlossen und quadrierbar und f stetig. Hier ist es günstiger zuerst in x zu integrieren und somit (3.7) zu verwenden. Wir berechnen mit dem Hauptsatz

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) \, d(x, y) &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 y \sin(xy) \, dx \right) dy = \int_0^\pi \left[-\cos(xy) \right]_{x=0}^1 dy \\ &= \int_0^\pi (-\cos(y) + 1) \, dy = \left[-\sin(y) + y \right]_0^\pi = \pi. \quad \diamond \end{aligned}$$

Nun wenden wir uns krumm berandeten B zu. In der folgenden Bemerkung besprechen wir einfache, aber oft auftretende Spezialfälle für $m = 2$ bzw. $m = 3$.

BEMERKUNG 3.14. a) Seien $g_u, g_o : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g_u(x) \leq g_o(x)$ für $x \in [a, b]$. Dann ist die Fläche zwischen den Graphen

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], g_u(x) \leq y \leq g_o(x)\}$$

quadrierbar. Diese Aussage folgt aus Korollar 3.5 mit der Zerlegung $\partial B = M_a \cup M_u \cup M_b \cup M_o$ in die Graphen M_j der stetigen Funktionen g_j für $j \in \{u, o\}$ und $\varphi_j : [g_u(j), g_o(j)] \rightarrow \mathbb{R}; \varphi_j(y) = j$, mit $j \in \{a, b\}$ für die ‘seitlichen’ Begrenzungen von B . Ferner ist B abgeschlossen, weil Grenzwerte Ungleichungen respektieren.

Sei nun $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Da $B^x = [g_u(x), g_o(x)]$ für $x \in [a, b]$ gilt, liefert (3.6) die Gleichung

$$\int_B f(x, y) \, d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{B^x} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{g_u(x)}^{g_o(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Für die Funktion $f = \mathbb{1}_B$ erhalten wir mit Beispiel 3.8 b) den Flächeninhalt

$$\text{vol}(B) = \int_a^b (g_o(x) - g_u(x)) \, dx.$$

b) Ein *Rotationskörper* ist eine Menge der Form

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [a, b], x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$$

für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wie oben sieht man, dass R abgeschlossen und quadrierbar ist. Hier ist $\partial R = M_a \cup M_- \cup M_b \cup M_+$ mit ‘Boden’ bzw. ‘Deckel’ $M_j = \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0, f(j)) \times \{j\}$ für $j \in \{a, b\}$ und den Graphen M_\pm der Funktionen $f_\pm : A \rightarrow \mathbb{R}; f_\pm(x, z) = \pm \sqrt{f(z)^2 - x^2}$, wobei $A := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in [a, b], x \in [-f(z), f(z)]\}$ nach Teil a) quadrierbar und abgeschlossen ist.

Man erhält hier Kreisscheiben $B_z = \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0, f(z))$ als Schnitte, deren Inhalt gleich $\pi f(z)^2$ ist, vergleiche Beispiel 3.15 a). Das Prinzip des Cavalieri in Bemerkung 3.12 impliziert nun die Volumenformel

$$\text{vol}(R) = \int_a^b \text{vol}(B_z) \, dz = \pi \int_a^b f(z)^2 \, dz. \quad \diamond$$

Mit Hilfe der obigen Beobachtungen berechnen wir zuerst die Volumen gewisser geometrischer Objekte.

BEISPIEL 3.15. a) Wir betrachten die *Kreisfläche* B mit Radius $r > 0$, also $B = \overline{B}(0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Mit den Funktionen $g_{\pm} : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$; $g_{\pm}(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, erhalten wir

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-r, r], g_-(x) \leq y \leq g_+(x)\}.$$

Bemerkung 3.14 a) impliziert somit

$$\text{vol}(B) = \int_{-r}^r (g_+(x) - g_-(x)) dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Wir verfahren nun so wie in Beispiel 1.16 aus Analysis 2 und substituieren $x = r \sin t$ für $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Da $dx/dt = r \cos t$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{vol}(B) &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) dt = r^2 \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi r^2, \end{aligned}$$

wobei wir bekannte Eigenschaften von \cos und \sin ausnutzen.

b) Der *Kreiskegelstumpf* K_b mit Radius $r > 0$ und Höhe $b \in [0, h]$, wobei $h > 0$, ist ein Rotationskörper für die Funktion $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$; $f(z) = r(1 - z/h)$. (K_h ist der volle *Kreiskegel*.) Bemerkung 3.14 b) liefert das Volumen

$$\text{vol}(K_b) = \pi \int_0^b r^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz = \pi r^2 \frac{h}{3} \left(\frac{z}{h} - 1\right)^3 \Big|_0^b = \frac{\pi}{3} r^2 h \left(\left(\frac{b}{h} - 1\right)^3 + 1\right).$$

Der volle *Kegel* K_h hat also den Inhalt $\frac{\pi}{3} r^2 h$.

c) Wir betrachten das *elliptische Paraboloid*

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, h], \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z}{h} \right\}$$

mit Scheitel 0, Höhe $h > 0$ und Halbmessern $a, b > 0$. Außer im Kreisfall $a = b = r$ ist P kein Rotationskörper. Man kann aber ähnlich wie in Bemerkung 3.14 b) die *Quadrirbarkeit* von P zeigen. Zur Volumenberechnung verwenden wir wieder das Prinzip von Cavalieri aus Bemerkung 3.12. Dafür benötigen wir den Schnitt $P_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 \leq h^{-1}z\}$ bei $z \in [0, h]$. Diesen können wir in Hinblick auf Bemerkung 3.14 a) in

$$P_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left[-a\sqrt{\frac{z}{h}}, a\sqrt{\frac{z}{h}}\right], g_-(x) \leq y \leq g_+(x) \right\}$$

mit $g_{\pm}(x) = \pm b\sqrt{h^{-1}z - a^{-2}x^2}$ umschreiben. Wir setzen $\alpha = a\sqrt{\frac{z}{h}}$. Es folgt nun

$$\text{vol}(P) = \int_0^h \text{vol}(P_z) dz = \int_0^h \int_{-\alpha}^{\alpha} (g_+(x) - g_-(x)) dx dz = \int_0^h \int_{-\alpha}^{\alpha} 2b\sqrt{\frac{z}{h} - \frac{x^2}{a^2}} dx dz.$$

Wir substituieren nun $t = x/\alpha \in [-1, 1]$, also $a^{-2}x^2 = h^{-1}zt^2$. Da $dt/dx = \alpha^{-1}$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{vol}(P) &= 2b \int_0^h \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{z}{h} - \frac{z}{h} t^2} a \sqrt{\frac{z}{h}} dt dz = \frac{2ab}{h} \int_0^h \int_{-1}^1 z \sqrt{1-t^2} dt dz \\ &= \frac{2ab}{h} \int_0^h z dz \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2} abh, \end{aligned}$$

wobei Bemerkung 3.12 a) und Teil a) verwendet wurden. ◇

Nun bestimmen wir einige zweidimensionale Integrale, wobei typische Rechen-techniken eingehen.

BEISPIEL 3.16. a) Sei B die Fläche, die zwischen den durch $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$ und $x = 2$ gegebenen Kurven liegt, also

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2], 0 \leq y \leq 1/x\}.$$

Nach Bemerkung 3.14 a) ist B quadrierbar und abgeschlossen. Weiter ist $B^x = [0, 1/x]$ für $x \in [1, 2]$. Wir betrachten die stetige Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y) = \frac{1}{x} \cos(xy)$. Mittels (3.6) und dem Hauptsatz berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) d(x, y) &= \int_1^2 \left(\int_0^{1/x} \frac{1}{x} \cos(xy) dy \right) dx = \int_1^2 \left[\frac{\sin(xy)}{x^2} \right]_{y=0}^{1/x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{\sin 1}{x^2} dx = \sin(1) \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{\sin 1}{2}. \end{aligned}$$

Die Integration in umgekehrter Reihenfolge versagt hier.

b) Sei V das abgeschlossene Viereck mit den Ecken $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 1)$ und $(1, 1)$. Weiter ist $f : V \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y) = xy^2$, stetig. Man könnte V in die Dreiecke mit Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ bzw. $(2, 0)$, $(4, 1)$ und $(2, 1)$, sowie das Quadrat $[1, 2] \times [0, 1]$ mittels Satz 3.9 d) aufteilen, und die drei Summanden zuerst in y und dann in x ausintegrieren. Es ist aber effizienter, die Integrationsreihenfolge zu vertauschen, wobei man die Darstellung

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 1], y \leq x \leq 2y + 2\}$$

ausnutzt. Nach Bemerkung 3.14 a) ist dann V quadrierbar und abgeschlossen. Weiter liefern (3.7) und der Hauptsatz

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y) d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_y^{2y+2} xy^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 x^2 \right]_{x=y}^{2y+2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} y^2 (4y^2 + 8y + 4 - y^2) dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} y^4 + 4y^3 + 2y^2 \right) dy \\ &= \left[\frac{3}{10} y^5 + y^4 + \frac{2}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{59}{30}. \end{aligned}$$

c) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(t) = t^\alpha$ und $h(t) = (1 - t)^\beta$. Wir betrachten das Dreieck D mit Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$, also

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 1], y \leq x \leq 1\}.$$

Hier sind $D^x = [0, x]$ und $D_y = [y, 1]$. Weiter sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y) = g(x - y)h(y)$. Diese Funktion ist stetig. Wie verwenden (3.6), (3.7), Satz 3.9 a) und den Hauptsatz. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x (x - y)^\alpha (1 - y)^\beta \, dy \, dx &= \int_D f(x, y) \, d(x, y) = \int_0^1 \int_y^1 (x - y)^\alpha (1 - y)^\beta \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 (1 - y)^\beta \int_y^1 (x - y)^\alpha \, dx \, dy = \int_0^1 (1 - y)^\beta \left[\frac{1}{1 + \alpha} (x - y)^{\alpha+1} \right]_{x=y}^1 \, dy \\ &= \frac{1}{1 + \alpha} \int_0^1 (1 - y)^{\beta + \alpha + 1} \, dy = \frac{1}{(1 + \alpha)(\beta + \alpha + 2)}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Wir behandeln nun den Transformationssatz. Dazu erinnern wir zuerst an die Substitutionsregel Satz 1.15 aus Analysis 2. Seien $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und ϕ aus $C^1([\alpha, \beta])$ mit $\phi([\alpha, \beta]) = J$. Dann ist J ein kompaktes Intervall und es gilt

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(y) \, dy = \int_\alpha^\beta f(\phi(x)) \phi'(x) \, dx.$$

Man hat dabei die Merkmregel, dass die Substitution $y = \phi(x)$ die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \phi'(x)$ und damit ‘ $dy = \phi'(x)dx$ ’ liefert. Man beachte, dass ϕ nicht injektiv sein muss und $\phi(\beta)$ kleiner als $\phi(\alpha)$ sein kann.

Im \mathbb{R}^m betrachten wir nun eine Transformation $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer beschränkten und quadrierbaren Menge $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Wir nehmen an, dass A im Abschluss von A° liegt und dass die Einschränkung $\Phi : A^\circ \rightarrow \mathbb{R}^m$ injektiv, differenzierbar mit gleichmäßig stetiger Ableitung und Lipschitz-stetig ist; d.h., es gibt so eine Konstante $L \geq 0$, dass für alle $x, y \in A^\circ$ die Ungleichung

$$|\Phi(y) - \Phi(x)|_2 \leq L |y - x|_2$$

gilt. Per Approximation sieht man ein, dass auch $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig ist, siehe Abschnitt 2.19 in [Wa]. Mittels der Definition der Ableitung kann man aus der Lipschitz-Stetigkeit folgern, dass Φ' auf A° beschränkt ist. Wenn umgekehrt Φ' beschränkt und A° konvex sind, dann ist Φ auf A° automatisch Lipschitz-stetig (laut Korollar 3.23 in Analysis 2). Laut Abschnitt 2.19 in [Wa] können wir Φ' gleichmäßig stetig auf A fortsetzen, wobei $A \setminus A^\circ \subseteq \partial A$ nach Satz 3.3 und Satz 3.4 eine Jordan-Nullmenge ist.

Es seien $B = \Phi(A)$ und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. (Stetigkeit von f reicht hier, wenn A abgeschlossen ist, da dies die Abgeschlossenheit von B impliziert, siehe Theorem 2.49 in Analysis 2.) Insbesondere ist f nach Beispiel 3.8 a) beschränkt und integrierbar.

Der folgende *Transformationssatz* wird in Abschnitt 7.18 von [Wa] bewiesen.

THEOREM 3.17. *Es seien $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $B = \Phi(A)$ und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ wie oben eingeführt. Dann ist $B = \Phi(A)$ beschränkt und quadrierbar, und es gilt*

$$\int_B f(y) \, dy = \int_A f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| \, dx = \int_{A^\circ} f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| \, dx$$

Für $f = \mathbb{1}_B$ folgt speziell

$$\text{vol}(B) = \int_A |\det \Phi'(x)| \, dx = \int_{A^\circ} |\det \Phi'(x)| \, dx.$$

Die jeweils zweite Gleichung folgt dabei direkt aus Satz 3.9 d), da wie oben bemerkt $A \setminus A^\circ$ den Inhalt 0 hat und der Integrand auf A beschränkt ist. Weiter zeigen unsere Vorbemerkungen, dass alle Integrale existieren.

Hier gilt die Merkregel, dass aus der Substitution $y = \Phi(x)$ die Formel ‘ $dy = |\det \Phi'(x)| \, dx$ ’ folgt. Diese Determinante rührt letztlich von derjenigen aus Satz 3.4 f) her, der wesentlich in den Beweis von Theorem 3.17 eingeht. Der Betrag tritt im Gegensatz zum eindimensionalen Fall auf, da wir im \mathbb{R}^m ein negatives Vorzeichen nicht mit der Umkehrung der Integralgrenzen verrechnen können.

Wir betrachten zuerst affine Transformationen. Für $f = \mathbb{1}_B$ ergibt sich übrigens wieder Satz 3.4 f).

KOROLLAR 3.18. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt und quadrierbar, $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar, $v \in \mathbb{R}^m$ und $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\Phi(x) = v + Tx$. Weiter sei $B = \Phi(A)$ und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann gelten*

$$\int_B f(y) \, dy = |\det T| \int_A f(v + Tx) \, dx = |\det T| \int_{A^\circ} f(v + Tx) \, dx.$$

BEWEIS. Nach Beispiel 3.10 in Analysis 2 ist Φ auf \mathbb{R}^m differenzierbar mit der konstanten Ableitung $\Phi'(x) = T$. Wegen der Invertierbarkeit von T , ist Φ auf \mathbb{R}^m auch injektiv. Weiter gilt $|\Phi(x) - \Phi(z)|_2 = |T(x - z)|_2 \leq \|T\| |x - z|_2$ für alle $x, z \in \mathbb{R}^m$ und die Operatornorm von T , siehe (2.10) in Analysis 2. Die Behauptung folgt nun aus Theorem 3.17. \square

Die wichtigsten Transformationen Φ werden durch die Polar- und Kugelkoordinaten im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 gegeben.

BEISPIEL 3.19. Wir betrachten die ebenen Polarkoordinaten

$$\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad \Phi_2(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Dann liegt Φ_2 in $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit Ableitung

$$\Phi_2'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Für jedes $R > 0$ ist diese für $(r, \varphi) \in [-R, R] \times \mathbb{R}$ beschränkt und gleichmäßig stetig. Nach Korollar 3.23 in Analysis 2 ist also Φ_2 auf jeder beschränkten Menge Lipschitz-stetig. Weiter ergibt sich $\det \Phi'(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$.

Für einen gegebenen Punkt $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ setzen wir $r = |v|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$. Weiter sei $\varphi \in (-\pi, \pi]$ der (eindeutig bestimmte) Winkel zwischen der positiven x -Achse und v , der wie das Argument in Abschnitt 1.1 gegeben ist. Folglich sind die Einschränkungen

$$\Phi_2 : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \text{und} \quad \Phi_2 : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\})$$

bijektiv. Für $r > 0$ bildet Φ_2 die Strecke $\{r\} \times (-\pi, \pi]$ bijektiv auf die Kreislinie $\partial B(0, r)$ ab. Weiter gelten $\Phi_2(0, \varphi) = (0, 0)$ für jedes φ und $\Phi_2(r, -\pi) = \Phi_2(r, \pi)$ für jedes $r > 0$, sodass die angegebenen Injektivitätsbereiche von Φ_2 scharf sind. Somit erfüllt Φ_2 die Bedingungen von Theorem 3.17 für jedes quadrierbare und beschränkte $A \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $A^\circ \subseteq \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)$ und $A \subseteq \overline{A^\circ}$.

Als Beispiel betrachten wir einen Kreis $\overline{B}(v, R)$ für einen Punkt $v \in \mathbb{R}^2$ und einen Radius $R > 0$. In Beispiel 3.15 haben wir schon die Quadrierbarkeit für den Fall $v = 0$ eingesehen. Mit der Verschiebung $V(w) = w + v$ erhalten wir $V(\overline{B}(0, R)) = \overline{B}(v, R)$ und dass die Kreise $B := \overline{B}(0, R)$ und $\overline{B}(v, R)$ den gleichen Flächeninhalt haben (siehe Korollar 3.18 oder Satz 3.4f)). Nun ist $B = \Phi_2(A)$ mit $A = [0, R] \times (-\pi, \pi]$, und $A^\circ = (0, R) \times (-\pi, \pi)$ liegt in $\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)$ mit Abschluss $[0, R] \times [-\pi, \pi]$. Also liefern Theorem 3.17 und Bemerkung 3.12 a) die Inhaltsformel

$$\text{vol}(\overline{B}(v, R)) = \text{vol}(B) = \int_A r \, d(r, \varphi) = \int_0^R r \, dr \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, d\varphi = \frac{R^2}{2} 2\pi = \pi R^2.$$

Man beachte, dass $\Phi_2(A^\circ)$ gleich der geschlitzten offenen Kreisscheibe $B' = B(0, R) \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\})$ ist, wobei $B \setminus B'$ aus ∂B und dem Schlitz besteht und damit eine Jordan-Nullmenge ist. (Siehe Beispiel 3.2 c) und Satz 3.3.) \diamond

Der dreidimensionale Fall ist aufwändiger.

BEISPIEL 3.20. Wir definieren die Kugelkoordinaten durch

$$\Phi_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \Phi_3(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Wie beobachten zunächst, dass Φ_3 in $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ liegt und die Ableitung

$$\Phi_3'(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) & -r \sin(\varphi) \cos(\theta) & -r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) & r \cos(\varphi) \cos(\theta) & -r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

besitzt. Daraus folgt wie in Beispiel 3.19, dass Φ_3 auf beschränkten Mengen Lipschitzstetig und Φ_3' gleichmäßig stetig sind. Mittels $\cos^2 + \sin^2 = 1$, berechnen wir

$$\begin{aligned} \det(\Phi_3'(r, \varphi, \theta)) &= r^2 \cos^2(\varphi) \cos^3(\theta) + r^2 \sin^2(\varphi) \sin^2(\theta) \cos(\theta) \\ &\quad + r^2 \cos^2(\varphi) \sin^2(\theta) \cos(\theta) + r^2 \sin^2(\varphi) \cos^3(\theta) \\ &= r^2 \cos^3(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) = r^2 \cos \theta. \end{aligned} \tag{3.8}$$

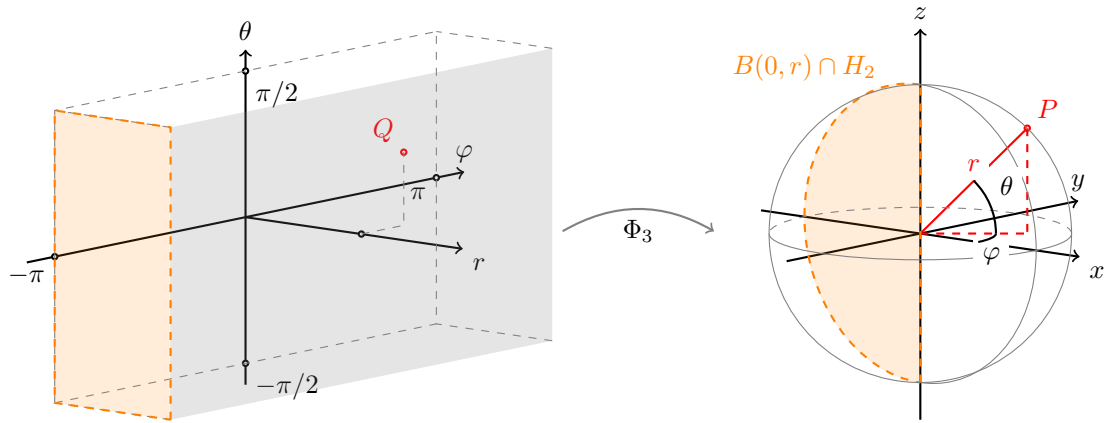


ABBILDUNG 3.2. Kugelkoordinaten im \mathbb{R}^3

Diese Zahl ist für $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ nichtnegativ. Mit einer ähnlichen Rechnung sieht man die Gleichung $|\Phi_3(r, \varphi, \theta)|_2 = r$ für alle $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^2$.

Nun betrachten wir das Abbildungsverhalten von Φ_3 näher. (Siehe Abbildung 3.20.) Sei $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Wir setzen $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, was gerade der Abstand von v zum Ursprung ist. Sei $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ der Winkel von v gegen die x - y -Ebene, also der ‘Breitengrad’. Dann ist die Höhe z von v durch $z = r \sin \theta$ gegeben. Weiter ist (x, y) die Orthogonalprojektion v auf diese Ebene. Dieser Punkt hat den Abstand $r \cos \theta$ zu $(0, 0)$. Wenn v auf der z -Achse liegt, erhalten wir

$$v = (0, 0, z) = \begin{cases} \Phi_3(r, \varphi, \pi/2), & z = r \geq 0, \\ \Phi_3(r, \varphi, -\pi/2), & z = -r < 0, \end{cases}$$

da $\sin(\pm\pi/2) = \pm 1$. Hier ist $\varphi \in (-\pi, \pi]$ beliebig. Wenn v nicht auf der z -Achse liegt, hat $(x, y) \neq (0, 0)$ einen eindeutigen Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ (oder ‘Längengrad’) gegen die positive x -Achse, siehe Beispiel 3.19. Es ergibt sich dann wie in Beispiel 3.19 die Darstellung $(x, y) = (r \cos(\theta) \cos(\varphi), r \cos(\theta) \sin(\varphi))$.

Insgesamt haben wir für $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ solche Koordinaten $(r, \varphi, \theta) \in C := \mathbb{R}_{\geq 0} \times (-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ gefunden, dass $(x, y, z) = \Phi_3(r, \varphi, \theta)$ gilt. Die Koordinaten sind für v außerhalb der z -Achse eindeutig bestimmt und liegen dann in $C_i := \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi] \times (-\pi/2, \pi/2)$. Wir haben somit gesehen, dass die Einschränkungen

$$\begin{aligned} \Phi_3 : C &= \mathbb{R}_{\geq 0} \times (-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3 && \text{surjektiv,} \\ \Phi_3 : C_i &= \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi] \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3 && \text{injektiv,} \\ \Phi_3 : C^\circ &= \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus H_2 && \text{bijektiv} \end{aligned}$$

sind, wobei der Schlitz $H_2 = \mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ gerade die Halbebene über der negativen x -Achse inklusive der z -Achse ist. Man beachte, dass C° im Gegensatz zu C und C_i offen in \mathbb{R}^3 ist. Auf $C \setminus C_i$ ist Φ_3 nicht injektiv.

Weiter bildet Φ_3 das Rechteck $\{r\} \times (-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ auf die Kugelsphäre $\partial B(0, r)$ mit Radius $r > 0$ ab. Für $\theta \in [0, \pi/2]$ liegt dabei $\Phi_3(r, \varphi, \theta)$ in der oberen Halbsphäre und für $\theta \in [-\pi/2, 0]$ in der unteren, wobei $\theta = \pm\pi/2$ gerade den Nord/Südpol entspricht. Bei einem Winkel $\varphi \in [0, \pi/2]$ befindet sich $\Phi_3(r, \varphi, \theta)$ über oder unter dem ersten Quadranten der x - y -Ebene. \diamond

Wir nutzen nun die Kugelkoordinaten um einige Volumina und Integrale zu berechnen.

BEISPIEL 3.21. a) Wir berechnen das *Kugelvolumen*. Zunächst sieht man wie in Beispiel 3.19, dass Kugeln quadrierbar sind und ihr Rauminhalt nicht vom Zentrum abhängt. Wir betrachten also $B = \overline{B}(0, R)$ in \mathbb{R}^3 für $R > 0$. Nach Beispiel 3.20 gilt $B = \Phi_3(A)$ mit $A = [0, R] \times (-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ und Φ_3 erfüllt auf A bzw. $A^\circ = (0, R) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ die Voraussetzungen von Theorem 3.17. Dabei unterscheidet sich $\Phi_3(A^\circ) = B(0, R) \setminus H_2$ von B nur durch eine Jordan-Nullmenge, vergleiche Beispiel 3.19. Mittels (3.8) und Bemerkung 3.12 a) erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{vol}(B) &= \int_{A^\circ} \det(\Phi'_3) \, d(r, \varphi, \theta) = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^R r^2 \, dr \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = \frac{R^3}{3} 2\pi \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

Das Volumen der vorderen oberen Kugelhalbschale S mit Innenradius $R/2$ berechnet man analog mit dem Parameterbereich $A = [R/2, R] \times (-\pi, 0] \times [0, \pi/2]$ zu

$$\begin{aligned} \text{vol}(S) &= \int_{R/2}^R \int_{-\pi}^0 \int_0^{\pi/2} r^2 \cos \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = \int_{R/2}^R r^2 \, dr \int_{-\pi}^0 1 \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} r^3 \Big|_{R/2}^R \pi \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{7\pi}{24} R^3. \end{aligned}$$

b) Nach Beispiel 3.6 ist das Ellipsoid $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1\}$ mit den Halbmessern $a, b, c > 0$ quadrierbar und das Bild $E = D(\overline{B}(0, 1))$ der Einheitskugel unter der Diagonalmatrix D mit der Hauptdiagonale (a, b, c) . Deren Determinante ist gleich abc . Korollar 3.18 und Teil a) liefern also

$$\text{vol}(E) = abc \, \text{vol}(\overline{B}(0, 1)) = \frac{4\pi}{3} abc.$$

c) Es sei O der erste Oktant der Kugel mit Radius $R > 0$ also

$$O = \{(x, y, z) \in \overline{B}(0, R) \mid x, y, z \geq 0\} = \Phi_3(A) \quad \text{mit} \quad A := [0, R] \times [0, \pi/2]^2.$$

Wir berechnen das Integral der stetigen Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y, z) = xyz$. Hierfür muss man nun auch $(x, y, z) = \Phi_3(r, \varphi, \theta)$ in f einsetzen. Theorem 3.17,

(3.8) und Bemerkung 3.12 a) liefern

$$\begin{aligned}
 \int_O xyz \, d(x, y, z) &= \int_A r \cos(\varphi) \cos(\theta) r \sin(\varphi) \cos(\theta) r \sin(\theta) r^2 \cos(\theta) \, d(r, \varphi, \theta) \\
 &= \int_0^R r^5 \, dr \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^3(\theta) \sin(\theta) \, d\theta \\
 &= \frac{1}{6} r^6 \Big|_0^R \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2\varphi) \, d\varphi \int_0^1 t^3 \, dt \\
 &= \frac{1}{6} R^6 \frac{1}{4} \cos(2\varphi) \Big|_{\pi/2}^0 \frac{1}{4} = \frac{R^6}{48}.
 \end{aligned}$$

Hier habe wir die Formel $2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) = \sin(2\varphi)$ und die Substitution $t = \cos \theta$ mit $dt/d\theta = -\sin \theta$ verwendet.

d) Am einfachsten kann man die Kugelkoordinaten anwenden, wenn f radial ist, also die Form $f(x, y, z) = g(r)$ mit $r = |(x, y, z)|_2$ hat. Dann vereinfacht sich das Integral sofort auf ein Eindimensionales. Als Beispiel betrachten wir die Kugelschale S mit Außen- und Innenradius $R_a > R_i > 0$ und die Funktion $g : [R_i, R_a] \rightarrow \mathbb{R}; g(r) = r^{-\alpha}$, für ein festes $\alpha > 0$ mit $\alpha \neq 3$. Es gilt $S = \Phi_3(A)$ mit $A = [R_i, R_a] \times (-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Wie in den Teilen a) und c) berechnen wir

$$\begin{aligned}
 \int_S |(x, y, z)|_2^{-\alpha} \, d(x, y, z) &= \int_A r^{-\alpha} r^2 \cos(\theta) \, d(r, \varphi, \theta) \\
 &= \int_{R_i}^{R_a} r^{2-\alpha} \, dr \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \\
 &= \frac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha} \Big|_{R_i}^{R_a} 2\pi 2 = \frac{4\pi}{3-\alpha} (R_a^{3-\alpha} - R_i^{3-\alpha}).
 \end{aligned}$$

Für $\alpha = 3$ erhält man auf die gleiche Weise

$$\int_S |(x, y, z)|_2^{-3} = \int_{R_i}^{R_a} \frac{dr}{r} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = 4\pi (\ln R_a - \ln R_i)$$

Man beachte, dass diese Werte für $R_i \rightarrow 0$ genau für $\alpha < 3$ konvergieren (und zwar gegen $\frac{4\pi}{3-\alpha} R_a^{3-\alpha}$). In einer Raumdimension gilt dies für $\alpha < 1$, während man mittels Polarkoordinaten im Falle $m = 2$ die Konvergenz für $\alpha < 2$ erhält. \diamond

Bislang haben wir nur beschränkte Funktionen $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ auf beschränkter Menge B integriert. Im eindimensionalen Fall konnte man diese Einschränkung durch Grenzprozesse verallgemeinern (falls die betreffenden Limiten existieren), siehe Abschnitt 1.3 von Analysis 2. In der mehrdimensionalen Situation gehen wir ähnlich vor, verwenden aber ein etwas eingeschränkteres Konzept.

DEFINITION 3.22. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Menge, die eine Ausschöpfung besitzt; d.h., es gibt solche kompakte und quadrierbare Mengen $C_n \subseteq C_{n+1} \subseteq B$ für $n \in \mathbb{N}$, dass für jedes $r > 0$ das äußere Volumen $\text{vol}_a((B \cap \bar{B}(0, r)) \setminus C_n)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Weiter sei $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion f heißt uneigentlich

(Riemann-)integrierbar, wenn es so eine Konstante $K \geq 0$ gibt, dass für alle kompakten und quadrierbaren $C \subseteq B$ die Ungleichung

$$\int_C |f(x)| \, dx \leq K$$

gilt. Dann definiert man das uneigentliche (Riemann-)Integral durch

$$\int_B f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} f(x) \, dx.$$

Man beachte, dass alle Integrale über C oder C_n gemäß Beispiel 3.8 a) existieren. Wir sammeln einige wichtige Eigenschaften des uneigentlichen Integrals, die in Abschnitt 7.20 in [Wa] bewiesen werden.

BEMERKUNG 3.23. a) Der Grenzwert in Definition 3.22 existiert, und er hängt nicht von der Wahl der ausschöpfenden Folge ab.

b) Für beschränkte quadrierbare $B \subseteq \mathbb{R}^m$ und gleichmäßig stetige Funktionen $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stimmen die Integrale in den Definitionen 3.7 und 3.22 überein.

c) Die Menge $B \subseteq \mathbb{R}^m$ besitze eine Ausschöpfung. Dann bilden die stetigen, uneigentlich integrierbaren Funktionen $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ einen Vektorraum, den das Integral linear nach \mathbb{R} abbildet.

d) Typische Ausschöpfungen sind $\overline{B}(0, n)$ oder $[-n, n]^m$ für $B = \mathbb{R}^m$, bzw. $\overline{B}(0, 1) \setminus B(0, 1/n)$ für $B = \overline{B}(0, 1) \setminus \{0\}$. \diamond

Wir diskutieren ein Beispiel von fundamentaler Bedeutung für die Mathematik.

BEISPIEL 3.24. Sei $m \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} \, dx = \pi^{m/2}, \quad \text{speziell} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \, ds = \sqrt{\pi}.$$

BEWEIS. Wir betrachten zuerst $m = 2$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir verwenden den Transformationssatz Theorem 3.17 und die Polarkoordinaten von Beispiel 3.19. Bemerkung 3.12 a) und die Substitution $s = r^2$ liefern den Grenzwert

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B}(0, n)} e^{-|x|^2} \, dx &= \int_0^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2} r \, d\varphi \, dr = \int_0^n r e^{-r^2} \, dr \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{n^2} e^{-s} \, ds \, 2\pi = \pi [-e^{-s}]_0^{n^2} = \pi(1 - e^{-n^2}) \longrightarrow \pi \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Sei $C \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt und quadrierbar. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $C \subseteq \overline{B}(0, n)$. Satz 3.9 impliziert nun

$$\int_C e^{-|x|^2} \, dx \leq \int_{\overline{B}(0, n)} e^{-|x|^2} \, dx \leq \pi,$$

sodass das uneigentliche Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} \, dx = \pi$$

existiert. Bemerkung 3.23 a) und Bemerkung 3.12 a) führen auf

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-n, n]^2} e^{-|x|^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \int_{-n}^n e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} dx_2 dx_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-n}^n e^{-s^2} ds \right)^2.$$

Wurzelziehen impliziert nun

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}.$$

Für $m \geq 3$ berechnen wir schließlich den Grenzwert

$$\int_{[-n, n]^m} e^{-|x|^2} dx = \int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n e^{-x_1^2} \cdots e^{-x_m^2} dx_m \cdots dx_1 = \left(\int_{-n}^n e^{-s^2} ds \right)^m \longrightarrow \pi^{\frac{m}{2}}$$

für $n \rightarrow \infty$ mit Hilfe von Bemerkung 3.12 a) und dem Fall $m = 1$. Die uneigentliche Integrierbarkeit erhält man ähnlich wie für $m = 2$, und so folgt die Behauptung aus Bemerkung 3.23 a). \square

3.4. Oberflächeninhalt und -integral

Wir diskutieren knapp die Definition von (gekrümmten) Flächen im \mathbb{R}^3 , wobei wir Abschnitt 8.3 in [Wa] folgen. Darauf aufbauend führen wir Oberflächeninhalt und -integral ein und berechnen ersteren für wenige elementargeometrische Beispiele.

DEFINITION 3.25. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und quadrierbar, $U \subseteq A \subseteq \bar{U}$, $\Phi : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, und die Einschränkung $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei Lipschitz-stetig, differenzierbar mit gleichmäßig stetiger Ableitung, injektiv und der Rang von $\Phi'(u)$ sei für alle $u \in U$ gleich 2. Weiter seien $\Phi(U)$ und $\Phi(\partial U)$ disjunkt. Dann heißt das Bild $M = \Phi(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ Fläche im \mathbb{R}^3 mit der Parametrisierung Φ .

Nach Abschnitt 2.19 in [Wa] ist dann auch $\Phi : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ Lipschitz-stetig. Außerdem können wir Φ' (gleichmäßig) stetig auf \bar{U} fortsetzen. Ausgehend von der obigen Definition kann man die Tangential- und Normalenvektoren von M an $v = \Phi(u)$ für $u \in U$ einführen.

Sei dazu $\gamma : J \rightarrow U$ stetig differenzierbar für ein Intervall J mit $0 \in J^\circ$ und $\gamma(0) = u$. Dann ist $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\psi = \Phi \circ \gamma$, eine stetig differenzierbare Kurve auf M mit $\psi(0) = v$. Die Richtung der Kurventangente $\psi'(0) = \Phi'(u)\gamma'(0)$ ist somit ein Tangentialvektor an M bei v . Speziell sei $\gamma_k : [-\delta, \delta] \rightarrow U$; $\gamma_k(\tau) = u + \tau e_k$, für $k \in \{1, 2\}$, wobei $\delta > 0$ ist und $u + [-\delta, \delta]^2$ in U liegt. Sei $\psi_k = \Phi \circ \gamma_k$. Dann erhalten wir die Tangentialvektoren $\psi_k(0) = \Phi'(u)e_k = \partial_k \Phi(u)$, die gerade die Spalten der Jacobimatrix von Φ bei u sind. Da diese Rang 2 hat, ist $\Phi'(u)\mathbb{R}^2$ ein zweidimensionaler Teilraum des \mathbb{R}^3 , den wir *Tangentialraum* $T_v M$ nennen. Ein *Normalenvektor* ν steht nun senkrecht auf $T_v M$; d.h.; es gilt $(\nu | \partial_1 \Phi(u)) = 0 = (\nu | \partial_2 \Phi(u))$ für das Euklidische Skalarprodukt.

Wir diskutieren typische Beispiele für Flächen: die Kugel und den Kreiskegel

BEISPIEL 3.26. Die 2-Sphäre mit Radius $r > 0$ ist $\mathbb{S}_2(r) = \partial B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^3$. Wie in Beispiel 3.20 sei

$$\Phi(\varphi, \theta) = \Phi_3(r, \varphi, \theta) = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

für $(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2$ definiert. Dann gilt $\mathbb{S}_2(r) = \Phi(A)$ für $A = (-\pi, \pi) \times [-\pi/2, \pi/2]$, wobei $U = (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ und $\overline{U} = [-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ sind. Nach Beispiel 3.20 ist Φ sogar auf \mathbb{R}^2 beliebig oft differenzierbar mit der beschränkten Ableitung

$$\Phi'(\varphi, \theta) = r \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cos(\theta) & -\cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \cos(\theta) & -\sin(\varphi) \sin(\theta) \\ 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist Φ Lipschitz-stetig und $\Phi'(\varphi, \theta)$ hat auf U den Rang 2. Weiter wissen wir, dass Φ auf U injektiv ist und dass $\Phi(\partial U)$ gleich dem Halbkreis von Nord- zu Südpol beim 'Längengrad' $\varphi = \pi$ ist, der nicht in $\Phi(U)$ liegt.

b) Wir betrachten den geraden *Kreiskegel* K mit Radius $r > 0$ und Höhe $h > 0$. Hier parametrisieren wir den Boden $B = \overline{B}(0, r) \times \{0\}$ und den Mantel M getrennt. Wir setzen $U_1 = B(0, r) - (0, r+1)^\top$ und $\Phi(s, t) = (s, t + r + 1, 0)^\top$ auf \overline{U}_1 , sowie $U_2 = (-\pi, \pi) \times (0, h)$ und

$$\Phi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{z}{h}) \cos \varphi \\ r(1 - \frac{z}{h}) \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

auf \overline{U}_2 . Auf der disjunkten Vereinigung $\overline{U} = \overline{U}_1 \cup \overline{U}_2$ definieren wir Φ stückweise. Man sieht leicht, dass $\Phi : \overline{U}_1 \rightarrow B$ bijektiv ist, und dass es für jeden Punkt $v \in M$ genau so eine Höhe $z \in [0, h]$ und einen Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ gegen die positive x -Achse gibt, dass $v = \Phi(\varphi, z)$ gilt. Insbesondere ist Φ auf U injektiv.

Die Abbildung Φ ist auf U beliebig oft differenzierbar mit beschränkter Ableitung

$$\Phi'(s, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi'(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -r(1 - \frac{z}{h}) \sin \varphi & -\frac{r}{h} \cos \varphi \\ r(1 - \frac{z}{h}) \cos \varphi & -\frac{r}{h} \sin \varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

für $(s, t) \in U_1$ bzw. für $(\varphi, z) \in U_2$. Offenbar hat $\Phi'(u)$ für alle $u \in U$ den Rang 2. Da diese Ableitungen beschränkt sind, ist Φ jeweils auf den konvexen Mengen U_1 und U_2 Lipschitz-stetig (siehe Korollar 3.23 in Analysis 2). Für $u \in U_1$ und $\tilde{u} \in U_2$ gilt ferner

$$|\Phi(u) - \Phi(\tilde{u})|_2 \leq 2r + 1 + \sqrt{r^2 + h^2} \leq (2r + 1 + \sqrt{r^2 + h^2}) |u - \tilde{u}|_2,$$

weil U_1 und U_2 den Abstand 1 haben.

c) Die obere Kugelkappe S_0 mit Radius $r > 0$ und ohne Äquator kann auch als Graph der Abbildung $h : B_{\mathbb{R}^2}(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$; $h(s, t) = \sqrt{r^2 - s^2 - t^2}$, beschrieben

werden. Hier ist $\Phi(s, t) = \Phi_h(s, t) = (s, t, h(s, t))^\top$. Es gilt

$$\Phi'_h(s, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -s/h(s, t) & -t/h(s, t) \end{pmatrix}$$

für $(s, t) \in B_{\mathbb{R}^2}(0, r)$. Diese Ableitung hat zwar Rang 2, aber sie für $(s, t) \rightarrow \partial B_{\mathbb{R}^2}(0, r)$ unbeschränkt, sodass Φ nicht Lipschitz-stetig ist. Somit kann man nur die kleinere Kugelkappe $S_\varepsilon = h(B(0, r - \varepsilon))$ für $\varepsilon \in (0, r)$ auf diese Weise parametrisieren, während die Kugelkoordinaten die ganze Sphäre beschreiben. \diamond

Wir wollen die Definition des Oberflächeninhalts motivieren, wobei $M = \Phi(A)$ wie in Definition 3.25 für ein achsenparalleles Rechteck A gegeben sei. Wir zerlegen A in achsenparallele Rechtecke Q_k der Seitenlängen Δs_k und Δt_k . (Diese haben disjunktes Inneres.) Weiter sei $u_k = (s_k, t_k)$ ein Eckpunkt von Q_k und $v_k = \Phi(u_k)$. Die Vektoren $\partial_1\Phi(u_k)\Delta s_k$ und $\partial_2\Phi(u_k)\Delta t_k$ spannen ein Parallelogramm T_k im Tangentialraum $T_{v_k}M$ auf. Für kleine $h \in \mathbb{R}^2$ ist $\Phi(u_k + h)$ gemäß dem Satz von Taylor ungefähr gleich $\Phi(u_k) + \partial_1\Phi(u_k)h_1 + \partial_2\Phi(u_k)h_2$. Von daher ist plausibel, den zu bestimmenden Inhalt des Flächenstücks $\Phi(Q_k)$ durch die Fläche von T_k zu approximieren. Es ist bekannt, dass diese gleich der Norm $|\partial_1\Phi(u_k)\Delta s_k \times \partial_2\Phi(u_k)\Delta t_k|_2$ ist.

Dazu erinnern wir an das Kreuzprodukt zweier Vektoren $p, q \in \mathbb{R}^3$, das durch

$$p \times q = \begin{pmatrix} p_2q_3 - p_3q_2 \\ p_3q_1 - p_1q_3 \\ p_1q_2 - q_2p_1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Man rechnet die folgenden Eigenschaften leicht nach, wobei $p, \tilde{p}, q \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\theta \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen p und q sind.

- (1) $(\alpha p + \beta \tilde{p}) \times q = \alpha(p \times q) + \beta(\tilde{p} \times q)$.
- (2) $q \times p = -(p \times q)$.
- (3) $(p|p \times q) = (q|p \times q) = 0$.
- (4) $|p \times q|_2^2 = |p|_2^2 |q|_2^2 - (p|q)^2 = |p|_2^2 |q|_2^2 (1 - \cos^2 \theta)$.

Die letzte Eigenschaft liefert $|p \times q|_2 = |p|_2 |q|_2 \sin \theta$, was gerade der Flächeninhalt des von p und q aufgespannten Parallelogramms ist. Diesen Vorbereitungen und die Definition des Riemann-Integrals führen uns auf die Formel

$$\begin{aligned} \sigma(M) &= \sum_k \sigma(\Phi(Q_k)) \approx \sum_k \text{vol}_2(T_k) = \sum_k |\partial_1\Phi(u_k) \times \partial_2\Phi(u_k)|_2 \Delta s_k \Delta t_k \\ &\approx \int_U \sqrt{g(u)} \, du \end{aligned}$$

für den Oberflächeninhalts $\sigma(M)$, wobei wir die *Gramsche Determinante* $g(u) = g_\Phi(u) = |\partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)|_2^2$ von Φ bei $u \in U$ definieren, die wir wie oben stetig auf \overline{U} fortsetzen.

DEFINITION 3.27. Sei $M = \Phi(A)$ wie in Definition 3.25 gegeben und $\sqrt{g} = |\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi|_2$. Weiter sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann definieren wir den Oberflächeninhalt

$$\sigma(M) = \int_U \sqrt{g(u)} \, du = \int_A \sqrt{g(u)} \, du.$$

und das Oberflächenintegral

$$\int_M f \, d\sigma = \int_M f(x) \, d\sigma(x) = \int_U \sqrt{g(u)} \, du = \int_A \sqrt{g(u)} \, du.$$

BEMERKUNG 3.28. Man beachte, dass in den obigen Begriffen rechts ein Riemann-Integral über einen gleichmäßig stetigen Integranden steht und $A \setminus U$ eine Jordansche Nullmenge ist. Hier bei drückt g die Deformierung von M gegenüber der flachen Menge A aus. Die obigen Begriffe hängen nicht von der Wahl der Parametrisierung ab (siehe die Abschnitte 8.4 und 8.5 in [Wa]). Das Oberflächenintegral erbt die elementaren Eigenschaften des Riemann-Integrals, vergleiche Satz 3.9. \diamond

Aufbauend auf Beispiel 3.26 können wir nun leicht den Inhalt der Kugeloberfläche und der Kegeloberfläche berechnen.

BEISPIEL 3.29. a) Wir betrachten die Kugeloberfläche $\mathbb{S}_2(r) = \Phi(A)$ mit $A = (-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ und $U = (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$. In Beispiel 3.26 a) haben wir die Ableitung

$$\Phi'(\varphi, \theta) = r \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cos(\theta) & -\cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \cos(\theta) & -\sin(\varphi) \sin(\theta) \\ 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

berechnet. Mittels der Formel $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_\varphi\Phi(\varphi, \theta) \times \partial_\theta\Phi(\varphi, \theta) &= r^2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos^2(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos^2(\theta) \\ \sin^2(\varphi) \cos(\theta) \sin(\theta) + \cos^2(\varphi) \cos(\theta) \sin(\theta) \end{pmatrix} \\ &= r^2 \cos(\theta) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da der letzte Vektor gleich $\Phi_3(1, \varphi, \theta)$ ist und damit Norm 1 hat, folgt

$$\sqrt{g(\varphi, \theta)} = |\partial_\varphi\Phi(\varphi, \theta) \times \partial_\theta\Phi(\varphi, \theta)|_2 = r^2 \cos \theta.$$

für $(\varphi, \theta) \in U$. Bemerkung 3.12 a) liefert nun

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbb{S}_2(r)) &= \int_A \sqrt{g(\varphi, \theta)} \, d(\varphi, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= r^2 \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = 2\pi r^2 \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Den Inhalt der vorderen oberen Viertelsphäre V berechnen wir analog

$$\sigma(V) = \int_{-\pi}^0 \int_0^{\pi/2} r^2 \cos \theta \, d\theta \, d\varphi = r^2 \int_{-\pi}^0 1 \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = \pi r^2.$$

b) Beim Kreiskegel K aus Beispiel 3.26 b) galt

$$\Phi'(s, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi'(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -r(1 - \frac{z}{h}) \sin \varphi & -\frac{r}{h} \cos \varphi \\ r(1 - \frac{z}{h}) \cos \varphi & -\frac{r}{h} \sin \varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

für $(s, t) \in U_1$ und (φ, z) auf U_2 . Somit ist $g = 1$ auf U_1 und

$$\partial_\varphi \Phi(\varphi, z) \times \partial_z \Phi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{z}{h}) \cos \varphi \\ r(1 - \frac{z}{h}) \sin \varphi \\ \frac{r^2}{h}(1 - \frac{z}{h}) \sin^2 \varphi + \frac{r^2}{h}(1 - \frac{z}{h}) \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$$

auf U_2 . Daraus folgt leicht die Gleichung

$$g(\varphi, z) = r^2(1 - \frac{z}{h})^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \frac{r^4}{h^2}(1 - \frac{z}{h})^2, \\ \sqrt{g(\varphi, z)} = r(1 - \frac{z}{h}) \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}$$

für $(\varphi, z) \in U_2$. Somit erhalten wir wie in a) die Inhaltsformel

$$\begin{aligned} \sigma(K) &= \int_{U_1} 1 \, d(s, t) + \int_{U_2} r \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} (1 - \frac{z}{h}) \, d(\varphi, z) \\ &= \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(B(0, r)) + r \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, d\varphi \int_0^h (1 - \frac{z}{h}) \, dz \\ &= \pi r^2 + 2\pi r \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \left[z - \frac{z^2}{2h} \right]_0^h = \pi r^2 + \pi r \sqrt{h^2 + r^2}. \end{aligned}$$

◇

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir untersuchen Gleichungen, in denen neben einer gesuchten Funktion $u : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ auch ihre Ableitungen vorkommen. Dabei behandeln wir Anfangswertprobleme, die die zeitliche Entwicklung dynamischer Systeme beschreiben.

4.1. Einführung

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Ableitung einer Funktion $v : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ bei $t_0 \in J$ wird wie zu Beginn von Abschnitt 1.3 durch den Differenzenquotient

$$v'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (v(t) - v(t_0))$$

definiert. Dieser Grenzwert existiert genau dann, wenn all Komponenten v_k von v differenzierbar sind und dann gilt $v'(t_0) = (v'_1(t_0), \dots, v'_m(t_0))$.

Seien eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ und ein Vektor $u_0 \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Wir suchen eine *Lösung* $u \in C^1(J, \mathbb{R}^m)$ des *Anfangswertproblems*

$$u'(t) = f(u(t)), \quad t \in J, \quad u(0) = u_0, \quad (4.1)$$

für ein Intervall J mit $\min J = 0$. Die erste Gleichung in (4.1) nennt man *gewöhnliche Differentialgleichung* erster Ordnung. Es sei betont, dass J ein Teil der Lösung ist. Wir werden später versuchen ein möglichst großes J zu finden. Weiter ist die Lösung eine Funktion und nicht nur ein einzelner Vektor. Dies macht es viel schwieriger in Anwendungen Lösungsformeln herzuleiten. Systematisch gelingt dies bestenfalls im Falle $m = 1$ bzw. bei einem linearen Vektorfeld $f(x) = Ax$. Man kann allgemeinere Versionen von (4.1) behandeln, zum Beispiel auch Lösungen für $t \leq 0$ suchen oder Funktionen f zulassen, die nur auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^m$ definiert sind oder selbst explizit von t abhängen, siehe Kapitel 5 in Analysis 2 oder Kapitel 4–6 in Analysis 4. Im Folgenden treten solche Verallgemeinerungen nur gelegentlich am Rande auf.

Mit Hilfe von Anfangswertproblemen wie in (4.1) kann man das Verhalten zeitabhängiger Systeme etwa in den Naturwissenschaften behandeln. Dabei wird der *Zustand* des Systems zur Zeit $t \geq 0$ durch den Vektor $u(t) \in \mathbb{R}^m$ bestimmt. Der Anfangszustand $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m$ ist vorgegeben. Damit schränken wir uns auf Phänomene ein, die durch endlich viele Zahlen angemessen beschrieben werden können. Ein Beispiel wäre eine chemische Reaktion von m Substanzen in einem gut gerührten Container, wobei $u_k(t) \geq 0$ die Stoffmenge der k -ten Spezies angibt.

Hier sieht man, dass die Dimension $m \in \mathbb{N}$ sehr groß sein kann. Die Differentialgleichung in (4.1) bestimmt nun die momentane Änderungsgeschwindigkeit $u'(t)$ der Zustände aus dem aktuellen Zustand $u(t)$ mittels der gegebenen Funktion f . Diese beinhaltet die Struktur des System. (Bei einer chemischen Reaktion kann f aus den Reaktionsgleichungen und -konstanten abgelesen werden.) Es ist dann zu erwarten, dass (4.1) eine eindeutige Lösung u besitzt. Man beachte, dass $u'(t)$ die Tangentenrichtung der Lösungskurve $t \mapsto u(t)$ ist.

Aus dieser Fragestellung ergeben sich die zentralen Fragen der Theorie, die wir später noch verfeinern werden: Gibt es stets genau eine Lösung von (4.1)? Was geschieht für große Zeiten $t \rightarrow \infty$? Kann man sich einen Überblick über das Lösungsverhalten bei variierenden u_0 verschaffen? Wir besprechen zunächst zwei einfache, aber typische Beispiele: das *Räuber-Beute-Modell* und das *Fadenpendel*.

BEISPIEL 4.1. Es seien $u(t)$ die (relative) Anzahl der Beutepopulation und $v(t)$ der Räuberpopulation zur Zeit $t \geq 0$. Man nimmt an, dass die jeweiligen relativen Zuwachsraten zur Zeit $t \geq 0$ durch die Gesetze

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = r_u(u(t), v(t)) \quad \text{und} \quad \frac{v'(t)}{v(t)} = r_v(u(t), v(t))$$

gegeben sind. Wir erinnern an den einfachsten Fall $y'(t)/y(t) = a$ einer konstanten Rate $a \in \mathbb{R}$. Die resultierende Gleichung $y'(t) = ay(t)$ hat die Lösung $y(t) = e^{at}y(0)$, die exponentiell wächst oder fällt (falls $a \neq 0$).

Um die Funktionen r_u und r_v zu bestimmen, postulieren wir die folgenden Eigenschaften.

- Die Beutepopulation wächst ohne Räuber exponentiell, da ihre Ressourcen unbegrenzt sind.
- Die Räuberpopulation fällt ohne Beute exponentiell, da sie keine andere Nahrungsquelle hat.
- Die Beute(Räuber-)population fällt (wächst) proportional zum Produkt $u(t)v(t)$, das der Wahrscheinlichkeit eines 'zufälligen' Aufeinandertreffens entspricht.

Diese Annahmen führen auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) - ru(t)v(t), & t \geq 0, & & u(0) &= u_0, \\ v'(t) &= -cv(t) + su(t)v(t), & t \geq 0, & & v(0) &= v_0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

für fest gegebene Parameter $a, c, r, s > 0$ und die Anfangswerte $u_0, v_0 \geq 0$. Man interpretiert $(u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$ als Zustand des Systems zur Zeit $t \geq 0$. Neben den oben skizzierten Fragen, sollte man in diesem Modell auch zeigen, dass die Zustände $(u(t), v(t))$ nicht-negativ bleiben. \diamond

BEISPIEL 4.2. Ein Punkt der Masse $m > 0$ pendele an einem Stab der Länge l , $\gamma > 0$ sei die Gravitationskonstante und $\varphi(t)$ der Auslenkungswinkel zur Zeit $t \geq 0$. Weiter wirke eine Reibungskraft $-R(\varphi'(t))$, wobei $R \in C^1(\mathbb{R})$ und $-yR(y) \leq 0$

für alle $y \in \mathbb{R}$ gelten sollen. (Zum Beispiel sei $R(y) = r_0 y^{2k+1}$ für Konstanten $r_0 \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$.) Auf den Massenpunkt wirkt dann die Tangentialkomponente $-m\gamma \sin \varphi(t)$ der Schwerkraft $F = -m\gamma$. Weiter ist die Bogenlänge $l\varphi(t)$ gleich dem zurückgelegten Weg des Massenpunkts, und damit ist $l\varphi''(t)$ seine Beschleunigung. Das Newtonsche Gesetz des Kräftegleichgewichts liefert dann die Gleichung

$$ml\varphi''(t) = -m\gamma \sin \varphi(t) - R(\varphi'(t)).$$

Wir geben die Anfangsauslenkung und -geschwindigkeit $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathbb{R}$ vor und erhalten somit das Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= -\frac{\gamma}{l} \sin \varphi(t) - \frac{1}{lm} R(\varphi'(t)) =: g(\varphi(t), \varphi'(t)), \quad t \geq 0, \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad \varphi'(0) = \varphi_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Eine Lösung φ von (4.3) muss zweimal stetig differenzierbar sein. Für unsere Zwecke transformieren wir die Gleichungen (4.3) in ein zweidimensionales System erster Ordnung wie in (4.1).

Sei zunächst $\varphi \in C^2(J, \mathbb{R})$ eine Lösung von (4.3). Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_0 = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Die Funktion $u := (\varphi \ \varphi')^\top : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist dann differenzierbar mit der stetigen Ableitung

$$u'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ g(\varphi(t), \varphi'(t)) \end{pmatrix} = f(u(t))$$

für $t \in J$. Da auch $u(0) = u_0$ ist, löst u das Problem (4.1) für f und u_0 aus (4.4).

Sei umgekehrt $u = (u_1, u_2) \in C^1(J, \mathbb{R}^2)$ eine Lösung von (4.1) mit (4.4). Wir setzen $\varphi = u_1 \in C^1(J, \mathbb{R})$. Dann liefert die erste Zeile in (4.1) die Identität $\varphi' = u_2 \in C^1(J, \mathbb{R}^2)$. Somit liegt φ in $C^2(J, \mathbb{R})$, und aus der zweiten Zeile von (4.1) folgt $\varphi'' = u_2' = g(\varphi(t), \varphi'(t))$. Also löst φ die Pendelgleichung (4.3).

Oben beschreibt der Zustand $(\varphi(t), \varphi'(t))$ den Ort und die Geschwindigkeit des Massenpunkts. Bei einem System mit N frei beweglichen Teilchen müsste man Zustände aus \mathbb{R}^{6N} wählen. \diamond

Wir wiederholen nun die Methode der *Trennung der Variablen*, um (4.1) im Falle $m = 1$ in einigen Fällen explizit zu lösen. Dabei treten auch grundlegende Schwierigkeiten der Theorie schon bei ganz einfachen Beispielen auf.

BEISPIEL 4.3. Für $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m = 1$ betrachten wir das Problem

$$u'(t) = u(t)^2, \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0. \quad (4.5)$$

Wir nehmen an, dass eine Lösung u von (4.5) existiert. Wegen der Stetigkeit von u gibt es so eine Zeit $t_1 > 0$, dass $u(t)$ für alle $t \in [0, t_1]$ nicht 0 ist. Dann liefert (4.5)

die Gleichung $1 = u'(s)/u(s)^2$ und per Integration

$$t = \int_0^t 1 \, ds = \int_0^t \frac{u'(s)}{u(s)^2} \, ds = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{u_0}^{u(t)} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u(t)}$$

für $0 \leq s \leq t \leq t_1$, wobei wir $x = u(s)$ substituiert haben. Diese Identität kann man zu

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{u_0} - t}$$

umformen. Sei $J := [0, 1/u_0)$ für $u_0 > 0$ und $J := \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $u_0 < 0$. Offenbar liegt die eben erhaltene Funktion u in $C^1(J)$ und löst (4.5) auf J . \diamond

Also können die Lösungen schon bei $f(x) = x^2$ in endlicher Zeit explodieren! Man spricht hier von *blowup*. Das nächste Beispiel zeigt, dass man für $f(x) = \sqrt{x}$ und $u_0 = 0$ unendlich viele Lösungen erhält!

BEISPIEL 4.4. Das Anfangswertproblem

$$u'(t) = \sqrt{u(t)}, \quad t \geq 0, \quad u(0) = 0, \quad (4.6)$$

hat die Lösung $v = 0$. Wenn wir andererseits für $t \geq s \geq \varepsilon > 0$ wie in Beispiel 4.3 vorgehen, erhalten wir

$$t - \varepsilon = \int_{\varepsilon}^t 1 \, ds = \int_{u(\varepsilon)}^{u(t)} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{u(\varepsilon)}^{u(t)} = 2\sqrt{u(t)} - 2\sqrt{u(\varepsilon)}.$$

Im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert dies die Funktion $u(t) = t^2/4$. Ein Probe zeigt, dass auch diese Abbildung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ das Problem (4.6) löst. Indem man die Lösungen v und u kombiniert, erhält man sogar für jedes $a > 0$ die Lösung

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a, \\ \frac{1}{4}(t-a)^2, & t \geq a. \end{cases} \quad \diamond$$

Wir betrachten allgemeiner das Problem

$$u'(t) = g(t)h(u(t)), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0, \quad (4.7)$$

für gegebene $g, h \in C(\mathbb{R})$ und $u_0 \in \mathbb{R}$ mit $h(u_0) \neq 0$. Nach Satz 1.31 aus Analysis 2 existiert so eine Zeit $t_1 > 0$, eine Zahl $\delta > 0$ und eine eindeutige Lösung u von (4.7) auf $[0, t_1]$, dass $h(x) \neq 0$ für $x \in (u_0 - \delta, u_0 + \delta)$ gilt, $u(t)$ für $t \in [0, t_1]$ Werte in $(u_0 - \delta, u_0 + \delta)$ annimmt und durch

$$H(u(t)) = G(t), \quad G(t) := \int_{t_0}^t g(s) \, ds, \quad H(y) := \int_{u_0}^y \frac{dx}{h(x)}, \quad (4.8)$$

gegeben ist. Hierbei ist $y \in (u_0 - \delta, u_0 + \delta)$. In Beispiel 4.4 ist die Bedingung $h(u_0) \neq 0$ verletzt. Man beachte, dass man im allgemeiner weder für die Stammfunktionen in (4.8) noch für die Inverse H^{-1} explizite Formeln besitzt. Wir fügen noch ein Beispiel mit einem nichtkonstanten Faktor g an.

BEISPIEL 4.5. Das Anfangswertproblem

$$u'(t) = \cos(t) \cos^2(u(t)), \quad t \geq 0, \quad u(0) = 0, \quad (4.9)$$

hat die Lösung $u(t) = \arctan(\sin t)$ auf \mathbb{R}_+ .

BEWEIS. Hier sind $g(t) = \cos t$ und $h(x) = \cos^2 x$. Man hat $h > 0$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$. Sei u die Lösung von (4.9), die es nach (4.8) auf einem Intervall $[0, t_1]$ gibt. Sei $t \in [0, t_1]$. Wir berechnen

$$G(t) = \int_0^t \cos s \, ds = \sin s \Big|_0^t = \sin t,$$

$$H(u(t)) = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \Big|_0^{u(t)} = \tan u(t).$$

Also gilt $u(t) = \arctan(\sin t)$ auf $[0, t_1]$ gemäß (4.8). Mittels Formeln für die Arcusfunktionen sieht man, dass u das Problem (4.9) sogar auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ löst. \square

4.2. Lineare Probleme

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine Matrix. Wir wollen das lineare System

$$u'(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0, \quad (4.10)$$

lösen. Für $m = 1$ und $A = a \in \mathbb{R}$ gilt dabei $u(t) = e^{at}u_0$ für $t \in \mathbb{R}$ wegen

$$\frac{d}{dt} e^{at}u_0 = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} a^n u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} a^n u_0 = a \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} a^l u_0 = a e^{at}u_0.$$

Diese Rechnung aus Analysis 1 kann man auf den Matrizenfall übertragen. Dazu benötigen wir die *Matrizennorm*

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|Ax|_2}{|x|_2} = \sup_{y \in \mathbb{R}^n, |y|_2=1} |Ay|_2.$$

Nach Satz 2.37 in Analysis 2 definiert dies eine vollständige Norm auf $\mathbb{R}^{m \times m}$. Es gelten $\|I\| = 1$ und $|Ax|_2 \leq \|A\| |x|_2$ für $x \in \mathbb{R}^m$. Sei auch $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Dann erhalten wir $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, denn $|ABx|_2 \leq \|A\| |Bx|_2 \leq \|A\| \|B\| |x|_2$. Es folgt

$$\left\| \frac{t^n}{n!} A^n \right\| \leq \frac{(|t| \|A\|)^n}{n!} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

Da die rechte Seite in n summierbar ist, können wir wie im Falle $m = 1$ argumentieren und erhalten die folgenden Aussagen (siehe Satz 5.21 in Analysis 2).

BEMERKUNG 4.6. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $s, t \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert die Matrizenexponentialreihe

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

absolut in $\mathbb{R}^{m \times m}$ und gleichmäßig für $|t| \leq b$ und jedes $b > 0$. Diese Definition liefert sofort $e^{0A} = I$ und $e^{t\lambda I} = e^{t\lambda}I$, wobei wir auch $\lambda \in \mathbb{C}$ zulassen können. Die obige Reihe ist in t beliebig oft differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Also löst $u(t) = e^{tA}u_0$ das Problem (4.10). Aus $AB = BA$ folgt die Formel $e^{A+B} = e^Ae^B = e^Be^A$ und somit

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = e^{sA}e^{tA}.$$

Mit $s = -t$ sieht man, dass e^{tA} die Inverse e^{-tA} besitzt. \diamond

Um $e^{tA}u_0$ zu berechnen, verwenden wir eine Jordan-Basis $\{b_j \mid j \in \{1, \dots, m\}\}$ von $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, die aus Eigen- und Hauptvektoren von A besteht. Es gibt demnach Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{C}$ mit $u_0 = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m$ und somit

$$e^{tA}u_0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j e^{tA}b_j.$$

Wir müssen also nur die speziellen Lösungen $e^{tA}b_j$ berechnen. Dazu wiederholen wir etwas lineare Algebra, siehe auch Theorem 5.23 in Analysis 2.

Wir haben die (paarweise verschiedenen) *Eigenwerte* $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ von A , die die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$q(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_N)^{m_N}$$

von A sind. Die Exponenten $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N}$ heißen algebraische Vielfachheiten der Eigenwerte, und es gilt $m_1 + \dots + m_N = m$. Jeder Eigenwert λ_j besitzt definitionsgemäß einen *Eigenvektor* $v \in \mathbb{C}^m$; d.h., es gelten

$$v \neq 0 \quad \text{und} \quad Av = \lambda_j v.$$

Der Eigenraum $E_j = \text{Kern}(\lambda_j I - A)$ hat die Dimension $d_j \leq m_j$, die man als die geometrische Vielfachheit von λ_j bezeichnet. Man nennt λ_j *halbeinfach*, wenn $m_j = d_j$ ist. Ein Spezialfall sind *einfache* Eigenwerte mit $m_j = 1$.

Falls $d_j < m_j$ ist, hat λ_j (echte) Hauptvektoren. Dabei heißt $w \in \mathbb{C}^m$ mit

$$(A - \lambda_j I)^l w = 0 \quad \text{und} \quad (A - \lambda_j I)^{l-1} w \neq 0$$

für ein $l \in \mathbb{N}$ *Hauptvektor* l -ter Stufe zu λ_j . Es gilt dann auch $(A - \lambda_j I)^k w \neq 0$ für jedes $k \in \{0, 1, \dots, l-1\}$. Ein Eigenvektor ist Hauptvektor erster Stufe.

Um Hauptvektoren zu λ_j zu bestimmen, startet man mit einem Eigenvektor $v =: w_1$ von λ_j und löst sukzessive die Gleichungen

$$w_1 = (A - \lambda_j I)w_2, \quad \dots, \quad w_{l-1} = (A - \lambda_j I)w_l,$$

bis $(A - \lambda_j I)w = w_l$ nicht mehr lösbar ist. Dann ist w_l ein Hauptvektor l -ter Stufe. Wir berechnen nun $e^{tA}v$, $e^{tA}w_l$ und $e^{tA}u_0$.

1) Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Dann gilt $A^2v = AA v = \lambda A v = \lambda^2 v$ und analog $A^n v = \lambda^n v$. Für $t \in \mathbb{R}$ folgt

$$e^{tA}v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda^n v = e^{t\lambda} v.$$

2) Sei w ein Hauptvektor zweiter Stufe zum Eigenwert λ . Es ist also $v = (A - \lambda I)w$ ein Eigenvektor zu λ und $(A - \lambda I)^n w = 0$ für $n \geq 2$. Mit Hilfe von Bemerkung 4.6 berechnen wir

$$e^{tA}w = e^{t(A-\lambda I)+t\lambda I}w = e^{\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A - \lambda I)^n w = e^{\lambda t}(w + tw).$$

Diese Formel läßt sich leicht auf Hauptvektoren l -ter Stufe w_l verallgemeinern:

$$e^{tA}w_l = e^{\lambda t} \left(w_l + tw_{l-1} + \dots + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} w_1 \right) =: y(t). \quad (4.11)$$

3) Die Lösung in (4.11) muss nicht reell sein. Hierzu erinnern wir daran, dass für Eigenvektoren v oder Hauptvektoren l -ter Stufe w zum Eigenwert λ auch $\bar{v} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$ bzw. \bar{w} Eigen- bzw. Hauptvektoren l -ter Stufe zum Eigenwert $\bar{\lambda}$ sind (da A reell ist). Man erhält dann eine Basis aus den reellen Eigen-/Hauptvektoren zu reellen Eigenwerten, sowie aus den Real- und Imaginärteilen der nicht-reellen v bzw. w zu nicht-reellen λ , wobei wir jeweils die Konjugierten \bar{v} bzw. \bar{w} zu $\bar{\lambda}$ weglassen. Anstelle von $y(t) \neq \bar{y}(t)$ in (4.11) verwenden wir $\operatorname{Re} y(t) = (\operatorname{Re} y_1(t), \dots, \operatorname{Re} y_m(t))$ und $\operatorname{Im} y(t)$. Man sieht leicht, dass diese Funktionen (4.10) mit Anfangswert $\operatorname{Re} w_l$ bzw. $\operatorname{Im} w_l$ lösen.

4) Damit haben wir linear unabhängige, reelle Lösungen y_1, \dots, y_m von (4.10) mit $y_j(0) = b_j$ konstruiert, wobei $\{b_j\}$ eine Jordan-Basis von A ist. Wir setzen $Y(t) = [y_1(t) \ \dots \ y_m(t)]$ für $t \in \mathbb{R}$, sodass die Spalten von $Y(0)$ gleich b_j sind. Der Koeffizientenvektor α von u_0 bezüglich $\{b_j\}$ berechnet sich also durch

$$u_0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j b_j = Y(0)\alpha, \quad \alpha = Y(0)^{-1}u_0.$$

Somit ergibt sich die Lösungsformel

$$e^{tA}u_0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j e^{tA}b_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j y_j(t) = Y(t)\alpha = Y(t)Y(0)^{-1}u_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.12)$$

für (4.10). Man nennt $Y(t)$ *Fundamentallösung* und e^{tA} *Hauptfundamentallösung*.

Mittels der obigen Überlegungen diskutieren wir nun eine lineare Version des gedämpften Pendels aus Beispiel 4.2. Hierbei ersetzen wir $\sin x$ durch x (was für kleine $|x|$ eine gute Näherung ist), wählen eine lineare Reibung $2ry = (ml)^{-1}R(y)$ und schreiben $\omega = \sqrt{\gamma/l}$.

BEISPIEL 4.7. Für gegebene $\omega > 0$, $r \geq 0$ und $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\varphi''(t) = -\omega^2 \varphi(t) - 2r\varphi'(t), \quad t \geq 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi'(0) = \varphi_1. \quad (4.13)$$

Wie in (4.4) setzen wir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2r \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist (4.13) äquivalent zur Gleichung $u'(t) = Au(t)$, $t \geq 0$, mit $u(0) = u_0$. Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

$$q(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2 & \lambda + 2r \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2r\lambda + \omega^2$$

und damit die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega^2}$$

Die Eigenvektoren $v_{1,2} = (x \ y)^\top$ erfüllen

$$0 = (\lambda_{1,2}I - A)v_{1,2} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,2} & -1 \\ \omega^2 & \lambda_{1,2} + 2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = \lambda_{1,2}x.$$

Wir erhalten also Eigenvektoren $v_{1,2} = (1 \ \lambda_{1,2})^\top$, die genau für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ linear unabhängig sind. Wir behandeln nun getrennt die Fälle nichtreeller, reeller und doppelter Eigenwerte.

1. *Fall.* Es sei $0 \leq r < \omega$, sodass keine oder schwache Dämpfung vorliegt. Dann gelten $\lambda_{1,2} = -r \pm i\alpha$ für $\alpha := \sqrt{\omega^2 - r^2} \in (0, \omega]$. (Man beachte, dass $(i\alpha)^2 = r^2 - \omega^2$ ist.) Im Falle $r = 0$ ohne Dämpfung haben wir $\alpha = \omega$. Wir wählen $\lambda = -r + i\alpha$ und den Eigenvektor $v = (1 \ \lambda)^\top$ mit der Lösung

$$y(t) = e^{\lambda t}v = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ \frac{d}{dt}e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

laut (4.11). Wir erhalten damit die reelle Fundamentallösung

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} e^{\lambda t} & \operatorname{Im} e^{\lambda t} \\ \operatorname{Re} \frac{d}{dt}e^{\lambda t} & \operatorname{Im} \frac{d}{dt}e^{\lambda t} \end{bmatrix} = e^{-rt} \begin{bmatrix} \cos(\alpha t) & \sin(\alpha t) \\ -r \cos(\alpha t) - \alpha \sin(\alpha t) & \alpha \cos(\alpha t) - r \sin(\alpha t) \end{bmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R}$. Hier gelten

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{r}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Mit (4.12) ergeben sich die oszillierenden Lösungen

$$e^{tA} = Y(t)Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-rt} \left(\cos(\alpha t) + \frac{r}{\alpha} \sin(\alpha t) \right) & e^{-rt} \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t) \\ * & * \end{pmatrix},$$

$$\varphi(t) = [e^{tA}u_0]_1 = e^{-rt} \cos(\alpha t)\varphi_0 + e^{-rt} \sin(\alpha t) \left(\frac{r}{\alpha}\varphi_0 + \frac{1}{\alpha}\varphi_1 \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Im dämpfungsfreien Fall $r = 0$ mit $\alpha = \omega$ gilt speziell

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{bmatrix}, \quad e^{tA} = Y(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

Für $\omega = 1$ und $r = 0$ ist e^{tA} eine Drehmatrix.

2. *Fall.* Im Falle $r > \omega$ starker Dämpfung sind die Eigenwerte $\lambda_2 < -r < \lambda_1 < 0$ einfach. Die Lösungen $y_{1,2}(t) = e^{\lambda_{1,2}t} v_{1,2}$ liefern dann die Fundamentallösung

$$Y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad Y(0)^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wie in Fall 1 berechnen wir die (nicht oszillierende) Lösung

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= [e^{tA} u_0]_1 = [Y(t)Y(0)^{-1}(\varphi_0 \ \varphi_1)^\top]_1 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[Y(t) \begin{pmatrix} \lambda_2 \varphi_0 - \varphi_1 \\ \varphi_1 - \lambda_1 \varphi_0 \end{pmatrix} \right]_1 \\ &= e^{\lambda_1 t} \frac{\lambda_2 \varphi_0 - \varphi_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + e^{\lambda_2 t} \frac{\varphi_1 - \lambda_1 \varphi_0}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{aligned}$$

3. *Fall* Im ‘aperiodischen Grenzfall’ $r = \omega$ hat der zweifache Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = -r$ die geometrische Vielfachheit 1. Wir bekommen wie im Fall 2 die Lösung $z_1(t) = e^{-rt}$ der Differentialgleichung in (4.13). Weiter besitzt A einen Hauptvektor $w = (x \ y)^\top$ zweiter Stufe, der durch

$$v = (A + rI)w \iff \begin{pmatrix} 1 \\ -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 1 \\ -r^2 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff rx + y = 1$$

bestimmt ist. Wir wählen $w = e_2$ und erhalten aus (4.11) die zweite linear unabhängige Lösung $e^{-rt}(w + tv)$, deren erste Komponente gleich $z_2(t) = te^{-rt}$ für $t \in \mathbb{R}$ ist. Die Funktion z_2 löst (4.13) für $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = 1$.

Man beachte, dass mit Dämpfung $r > 0$ alle Lösungen für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gegen 0 streben. Falls $r = 0$ ist und keine Dämpfung vorliegt, sind die Lösungen periodisch mit Periode $2\pi/\omega$. \diamond

Sei $v \in C([a, b], \mathbb{R}^m)$. Man definiert das Integral $\int_a^b v \, dt$ wie für $m = 1$ mittels Riemannscher Summen. Indem man den Betrag $|\cdot|$ durch die Norm $|\cdot|_2$ ersetzt, zeigt man die Existenz des Integrals und seine einfachen Eigenschaften wie in Analysis 2. Insbesondere gilt

$$\left| \int_a^b v(t) \, dt \right|_2 \leq \int_a^b |v(t)|_2 \, dt.$$

Da der Grenzwert im \mathbb{R}^m gleich dem komponentenweisen ist, erhält man die Darstellung

$$\int_a^b v(t) \, dt = \left(\int_a^b v_k(t) \, dt \right)_{k=1}^m.$$

Für eine Matrix $B = [b_{jk}] \in \mathbb{R}^{l \times m}$ berechnen wir somit

$$B \int_a^b v(t) dt = \left(\sum_{k=1}^m b_{jk} \int_a^b v_k(t) dt \right)_{j=1}^l = \int_a^b Bv(t) dt \quad (4.14)$$

mittels der Linearität des Integrals. Aus dem Hauptsatz für reelle Funktionen (Theorem 1.10 in Analysis 2) folgt seine m -dimensionale Variante

$$\exists \frac{d}{dt} \int_a^t v(s) ds = \left(\frac{d}{dt} \int_a^t v_1(s) ds \quad \dots \quad \frac{d}{dt} \int_a^t v_m(s) ds \right)^\top = v(t), \quad (4.15)$$

$$\int_a^b w'(t) dt = \left(\int_a^b w'_1(t) dt \quad \dots \quad \int_a^b w'_m(t) dt \right)^\top = w(b) - w(a) \quad (4.16)$$

für $t \in [a, b]$ und $w \in C^1([a, b], \mathbb{R}^m)$.

Wir fügen nun der linearen Gleichung (4.10) eine fest gegebene Funktion g hinzu, die man als äußere Kraft interpretieren könnte. Neben Existenz einer Lösung zeigen wir auch ihre Eindeutigkeit und die wichtige *Duhamelsche Formel* (4.18).

SATZ 4.8. *Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $g \in C([0, b], \mathbb{R}^m)$ und $u_0 \in \mathbb{R}^m$. Dann hat das inhomogene Problem*

$$u'(t) = Au(t) + g(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0, \quad (4.17)$$

eine eindeutige Lösung $u \in C^1([0, b], \mathbb{R}^m)$, die durch

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s) ds \quad (4.18)$$

für alle $t \in [0, b]$ gegeben ist.

BEWEIS. Sei u wie in (4.18). Mittels Bemerkung 4.6, (4.14) und (4.15) differenzieren wir

$$u'(t) = Ae^{tA}u_0 + A \int_0^t e^{(t-s)A}g(s) ds + e^{0A}g(t) = Au(t) + g(t)$$

für $t \in [0, b]$. Also liegt u in $C^1([0, b], \mathbb{R}^m)$ und löst (4.17).

Sei $v \in C^1([0, b], \mathbb{R}^m)$ eine weitere Lösung von (4.17). Für $0 \leq s \leq t \leq b$ setzen wir $w(s) = e^{(t-s)A}v(s)$. Die Produktregel, Bemerkung 4.6 und (4.17) implizieren

$$\exists w'(s) = -e^{(t-s)A}Av(s) + e^{(t-s)A}v'(s) = e^{(t-s)A}g(s).$$

(Die Produktregel zeigt man hier wie im skalaren Fall $m = 1$.) Der Hauptsatz (4.16) führt dann auf

$$\int_0^t e^{(t-s)A}g(s) ds = \int_0^t w'(s) ds = w(t) - w(0) = v(t) - e^{tA}u_0,$$

sodass $v = u$ ist. □

Mit Hilfe der Formel (4.18) bestimmen wir die Lösung des inhomogenen Problems, das entsteht, wenn man der linearen Pendelgleichung (4.13) eine äußere ‘Kraft’ h hinzufügt. Dabei beschränken wir uns auf den ungedämpften Fall und regen

das System mit der Eigenfrequenz $\omega/2\pi$ an. Dies führt durch *Resonanz* auf eine unbeschränkte Lösung.

BEISPIEL 4.9. Für eine gegebene ‘Frequenz’ $\omega > 0$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\varphi''(t) = -\omega^2 \varphi(t) + h(t), \quad t \geq 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad (4.19)$$

wobei $h(t) = \sin(\omega t)$ ist. Wie in (4.4) setzen wir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist (4.19) äquivalent zur Gleichung (4.17) mit diesen Daten. Gemäß Beispiel 4.7 gilt

$$e^{(t-s)A} = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t-s)) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t-s)) \\ -\omega \sin(\omega(t-s)) & \cos(\omega(t-s)) \end{pmatrix}.$$

Auf Grund von (4.18) und einer trigonometrischen Formel hat (4.19) die Lösung

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left[\int_0^t e^{(t-s)A} g(s) ds \right]_1 = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega(t-s)) \sin(\omega s) ds \\ &= \frac{1}{2\omega} \int_0^t (\cos(\omega t - 2\omega s) - \cos(\omega t)) ds = -\frac{1}{4\omega^2} \sin(\omega t - 2\omega s) \Big|_0^t - \frac{t}{2\omega} \cos(\omega t) \\ &= \frac{1}{2\omega^2} \sin(\omega t) - \frac{t}{2\omega} \cos(\omega t), \quad t \geq 0. \quad \diamond \end{aligned}$$

Das Langzeitverhalten der Lösung $e^{tA}u_0$ von (4.10) wird wesentlich durch die Eigenwerte von A bestimmt. Eine große Rolle spielt die *Spektralschranke*

$$s(A) = \max\{\operatorname{Re} \lambda_j \mid \lambda_j \text{ Eigenwert von } A\}.$$

THEOREM 4.10. Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\varepsilon > 0$. Für eine Konstante $M_\varepsilon \geq 1$ gilt

$$\|e^{tA}\| \leq M_\varepsilon e^{(s(A)+\varepsilon)t} \quad \text{für alle } t \geq 0. \quad (4.20)$$

Falls alle Eigenwerte λ von A mit $\operatorname{Re} \lambda = s(A)$ halbeinfach sind, kann man hier auch $\varepsilon = 0$ wählen.

a) Genau wenn $s(A) < 0$ gilt, konvergiert $\|e^{tA}\|$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0. In diesem Fall gibt es für jeden Exponenten $\delta \in (0, -s(A))$ eine Konstante $M_\delta \geq 1$ mit

$$\|e^{tA}u_0\|_2 \leq \|e^{tA}\| \|u_0\|_2 \leq M_\delta e^{-\delta t} \|u_0\|_2.$$

b) Genau dann sind alle Lösungen $e^{tA}u_0$ von (4.10) für $t \geq 0$ beschränkt, wenn $s(A) = 0$ gilt und alle Eigenwerte λ von A mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$ halbeinfach sind.

BEWEIS. 1) Seien y_j wie in (4.11) und $\varepsilon > 0$. Somit y_j ist gleich einem Polynom in t (von Ordnung kleiner m) mal $e^{\lambda t}$ für einen Eigenwert λ . Also gibt es Konstanten $c_j, c_\varepsilon > 0$ mit

$$\|y_j(t)\|_2 \leq c_j(1 + t^{m-1}) e^{\operatorname{Re} \lambda t} \leq c_j c_\varepsilon e^{(s(A)+\varepsilon)t}, \quad t \geq 0.$$

Wenn λ halbeinfach ist, gilt $y_j(t) = e^{\lambda t}v$ für einen Eigenvektor v und man kann hier auch $\varepsilon = 0$ zulassen. Sei $x = (x_j) \in \mathbb{R}^m$ mit $|x|_2 = 1$ und $\tilde{c}_\varepsilon := c_\varepsilon \max_j c_j$. Dann erhalten wir

$$|Y(t)x|_2 \leq \sum_{j=1}^m |x_j Y(t)e_j|_2 = \sum_{j=1}^m |x_j y_j(t)|_2 \leq \tilde{c}_\varepsilon e^{(s(A)+\varepsilon)t} \sum_{j=1}^m |x_j| \leq \sqrt{m} \tilde{c}_\varepsilon e^{(s(A)+\varepsilon)t},$$

wobei $|x|_1 \leq \sqrt{m}|x|_2$ aus Satz 2.8 in Analysis 2 eingeht. Mit der Formel (4.12) schließen wir

$$|e^{tA}x|_2 = |Y(t)Y(0)^{-1}x|_2 \leq \|Y(t)\| |Y(0)^{-1}x|_2 \leq \sqrt{m} \tilde{c}_\varepsilon e^{(s(A)+\varepsilon)t} \|Y(0)^{-1}\|.$$

Wir haben also (4.20) gezeigt, woraus die Notwendigkeit der Eigenwertbedingungen in Aussage a) und b), sowie der Zusatz in a) folgen.

2) Sei umgekehrt $s(A) \geq 0$. Dann gibt es einen Eigenvektor $v \neq 0$ zu einem Eigenwert λ mit $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Dann hat die Lösung $e^{tA}v = e^{\lambda t}v$ die Norm $e^{\operatorname{Re} \lambda t} |v|_2$ und konvergiert nicht gegen 0 für $t \rightarrow \infty$. Sei $s(A) = 0$ und ein Eigenwert λ mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$ nicht halbeinfach. Also gibt es einen Hauptvektor w zweiter Stufe und es gilt $e^{tA}w = w + tv$ nach (4.11) für einen Eigenvektor $v \neq 0$. Somit ist $|e^{tA}w|_2 \geq t|v|_2 - |w|_2$ unbeschränkt für $t \rightarrow \infty$.

Dies zeigt die behaupteten Äquivalenzen, wenn die oben verwendeten λ , v und w reell sind. Wenn dies nicht der Fall ist, geht man zum Real- oder Imaginärteil über (vergleiche Theorem 5.26 in Analysis 2). \square

Erfreulicherweise kann man feststellen, ob $s(A) < 0$ ist, ohne alle Eigenwerte zu berechnen.

BEISPIEL 4.11. a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Diese Matrix hat das charakteristische Polynom

$$q(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \operatorname{sp}(A)\lambda + \det(A).$$

Somit sind die Eigenwerte von A durch

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{sp}(A)}{2} \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sp}(A)^2}{4} - \det(A)}$$

gegeben. Man sieht nun leicht, dass genau dann $s(A) < 0$ gilt, wenn $\operatorname{sp}(A) = a + d < 0$ und $\det(A) = ad - bc > 0$ erfüllt sind.

b) Sei $q(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_0$ das charakteristische Polynom von $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Das *Routh-Hurwitz Kriterium* charakterisiert die Negativität von $s(A) < 0$ durch Bedingungen an die Koeffizienten a_j . Siehe Satz 5.4.3 in [PW].

Im Falle $m = 3$ ist dabei $s(A) < 0$ äquivalent zu den Ungleichungen $a_2 > 0$, $a_0 > 0$ und $a_2 a_1 > a_0$. \diamond

4.3. Wohlgestelltheit und globale Existenz

In diesem Abschnitt diskutieren wir das *Theorem von Picard und Lindelöf*, das die Grundlage der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bildet. Seien dazu $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ und $u_0 \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Wir suchen eine Lösung $u \in C^1(J, \mathbb{R}^m)$ des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(u(t)), \quad t \in J, \quad u(0) = u_0, \quad (4.1)$$

für ein Intervall J mit $\min J = 0$. Diese Differentialgleichung beschreibe ein System in einer Anwendung. Um eine überprüfbare Vorhersage über das zeitliche Verhalten des Systems zu machen, benötigen wir die *Wohlgestelltheit* von (4.1); das heißt es muss für jeden (relevanten) Anfangswert u_0 eindeutige Lösung u geben, die stetig von u_0 abhängt. Diese stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten ist erforderlich, da wir u_0 in einer Anwendung immer nur näherungsweise bestimmen können.¹ Darüberhinaus benötigen wir Kriterien für eine *globale* Existenz mit $J = \mathbb{R}_{\geq 0}$ in (4.1). Wenn diese nicht gesichert ist, spricht man von *lokaler* Wohlgestelltheit.

THEOREM 4.12. *Seien $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ und $u_0 \in \mathbb{R}^m$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Es gibt eine maximale Existenzzeit $t_m(u_0) \in (b_0(|u_0|_2), \infty]$ und genau eine maximale Lösung $u = \varphi(\cdot; u_0)$ von (4.1) auf $J_m(u_0) := [0, t_m(u_0))$, wobei die untere Schranke $b_0(|u_0|_2)$ positiv ist und nur $|u_0|_2$ abhängt.*

b) *Seien u_1 und u_2 Lösungen von (4.1) auf Intervallen J_1 und J_2 mit $\min J_i = 0$. Dann stimmen u_1 und u_2 auf $J_1 \cap J_2$ überein.*

c) *Sei $t_m(u_0) < \infty$. Dann streben die Normen $|u(t)|_2$ gegen ∞ für $t \rightarrow t_m(u_0)^-$.*

d) *Sei $b \in (0, t_m(u_0))$. Dann gibt es solche Konstanten $\delta = \delta(b, u_0) > 0$ und $c = c(b, u_0) \geq 0$, dass für alle Anfangswerte $v_0, w_0 \in \overline{B}(u_0, \delta)$ die maximale Existenzzeiten größer als b sind und die Lösungen $v = \varphi(\cdot, v_0)$ und $w = \varphi(\cdot, w_0)$ der Abschätzung*

$$|v(t) - w(t)|_2 \leq c |w_0 - v_0|_2$$

für all $t \in [0, b]$ genügen.

Diese Aussagen werden in Theorem 5.7 aus Analysis 2 unter einer etwas schwächeren Regularitätsannahme formuliert und in einem Spezialfall gezeigt. In Theorem 4.9 aus Analysis 4 werden die Aussagen sogar für t -abhängige f auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^m$ und negative Zeiten bewiesen.

Laut Beispiel 4.3 haben wir im Falle $m = 1$, $f(x) = x^2$ und $u_0 > 1$ die maximale Existenzzeit $t_m(u_0) = 1/u_0$. Es sei betont, dass das *Blowup Kriterium* in Teil c) noch unbefriedigend ist, da es Bedingungen an die unbekannt Lösung u und nicht an die gegebenen Objekte f und u_0 stellt. Wir werden unten aus ihm Eigenschaften von f ableiten, die die globale Existenz garantieren.

¹Aus dem selben Grund sollte u auch stetig von f abhängen. Dies wird in Theorem 5.7 aus Analysis 2 oder in Theorem 4.9 aus Analysis 4 nachgewiesen.

Beweisidee für Theorem 4.12. Wir machen die starke Zusatzbedingung, dass $\|f'(x)\|$ auf \mathbb{R}^m durch eine Konstante $L \geq 0$ beschränkt ist. Dies schließt z.B. Polynome vom Grad größer als 1 aus (und damit das Räuber-Beute Modell aus Beispiel 4.1), zeigt aber doch einige der grundlegenden Ideen. Nach Korollar 3.23 in Analysis 2 gilt dann die globale Lipschitzbedingung

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^m : \quad |f(x) - f(y)|_2 \leq L|x - y|_2. \quad (4.21)$$

Wir formulieren zuerst die Differentialgleichung (4.1) so um, dass keine Ableitung mehr auftaucht. Sei $u \in C^1(J, \mathbb{R}^m)$ eine Lösung von (4.1). Der Hauptsatz (4.16) liefert dann

$$u(t) = u_0 + \int_0^t u'(s) ds = u_0 + \int_0^t f(u(s)) ds, \quad t \in J. \quad (4.22)$$

Umgekehrt ist jede Lösung $u \in C(J, \mathbb{R}^m)$ von (4.1) wegen (4.15) stetig differenzierbar und erfüllt (4.1). Also reicht es stetige Lösungen der Integralgleichung (4.22) zu finden.

Dazu verwenden für Zeiten $b > 0$ den Vektorraum $E(b) = C([0, b], \mathbb{R}^m)$, auf dem $\|v\|_\infty = \max_{t \in [0, b]} |v(t)|$ eine vollständige Norm definiert, siehe Satz 2.13 in Analysis 2. Seien nun $v, w \in E(b)$ und $t \in [0, b]$. Im Hinblick auf (4.22) setzen wir

$$(\Phi v)(t) = (\Phi_{u_0}(v))(t) = u_0 + \int_0^t f(v(s)) ds.$$

Da auch $f \circ v : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig ist, existiert das obige Integral und liefert nach (4.15) eine differenzierbare Funktion auf $[0, b]$ mit stetiger Ableitung $f \circ v$. Somit bildet Φ den Raum $E(b)$ in sich selbst ab. Wie wir eben gesehen haben, sind die Fixpunkte $\Phi v = v$ gerade die Lösungen von (4.1).

Weiter folgern wir aus Eigenschaften des Integrals und (4.21) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |(\Phi v)(t) - (\Phi w)(t)|_2 &= \left| \int_0^t (f(v(s)) - f(w(s))) ds \right|_2 \leq \int_0^t |f(v(s)) - f(w(s))|_2 ds \\ &\leq \int_0^t L |v(s) - w(s)|_2 ds \leq bL \|v - w\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|v - w\|_\infty, \end{aligned}$$

wobei wir $b = (2L)^{-1}$ fixieren. Im Maximum über $t \in [0, b]$, erhalten wir

$$\|\Phi v - \Phi w\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|v - w\|_\infty,$$

sodass $\Phi : E(b) \rightarrow E(b)$ eine strikte Kontraktion ist. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert nun eine eindeutige Lösung $u = \Phi_{u_0} u$ in $E(b)$, siehe Theorem 2.40 in Analysis 2.

Seien $v, w : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lösungen von (4.1) mit Anfangswerten v_0 und w_0 . Mit den obigen Überlegungen folgt

$$\begin{aligned} |v(t) - w(t)|_2 &= |\Phi_{v_0} v(t) - \Phi_{w_0} w(t)|_2 = \left| v_0 - w_0 + \int_0^t (f(v(s)) - f(w(s))) ds \right|_2 \\ &\leq |v_0 - w_0|_2 + \frac{1}{2} \|v - w\|_\infty \end{aligned}$$

für $t \in [0, b]$. Wir nehmen wieder das Maximum über $t \in [0, b]$. Der letzte Term auf der rechten Seite kann dann links abgezogen werden, und wir gewinnen die gewünschte stetige Abhängigkeit

$$|v(t) - w(t)|_2 \leq \|v - w\|_\infty \leq 2|v_0 - w_0|_2$$

für $t \in [0, b]$. Da die Schrittweite $b = (2L)^{-1}$ unabhängig vom Startwert ist, kann man das obige Vorgehen mit dem neuen Anfangswert $u(b)$ wiederholen und folgert so iterativ die Behauptung im Spezialfall einer beschränkten Ableitung f' .

Für allgemeine $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ gilt statt (4.21) nur die *lokale* Lipschitzbedingung

$$\forall r > 0 \exists L(r) \geq 0, \forall x, y \in \overline{B}(0, r) : |f(x) - f(y)|_2 \leq L(r)|x - y|.$$

Das Fixpunktargument kann dann nur in einer Kugel $E(r, b) = \{v \in E(b) \mid \|v\| \leq r\}$ durchgeführt werden, wobei man z.B. $r = 1 + |u_0|_2$ und ein passendes (kleines) $b = b_0(|u_0|_2) > 0$ wählt. Hier ist es möglich (z.B. in Beispiel 4.3), dass $b_0(|u_0|_2)$ für $u_0 \rightarrow 0$ gegen 0 strebt und damit eine endliche maximale Existenzzeit

$$t_m(u_0) := \sup\{t > 0 \mid \exists \text{ Lösung } u \text{ von (4.1) auf } [0, t]\} \in (0, \infty]$$

auftreten kann.

Die folgende *Gronwallsche Ungleichung* ist ein zentrales Hilfsmittel zur Untersuchung des Langzeitverhaltens von (4.1). Sie wird in Satz 5-8 von Analysis 2 bewiesen.

LEMMA 4.13. *Seien J ein Intervall, $\varphi \in C(J)$, $t_0 = \min J$ und $\alpha, \beta \geq 0$. Es gelte*

$$0 \leq \varphi(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^t \varphi(s) \, ds \quad \text{für alle } t \in J.$$

Dann erhalten wir die Ungleichung

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)} \quad \text{für alle } t \in J.$$

Insbesondere ergibt sich $\varphi = 0$, wenn $\alpha = 0$ ist.

Wir können nun Bedingungen an f angeben, die globale Existenz garantieren. Wie wir gleich sehen werden, ist es hierbei oft nützlich sich auf Lösungen einzuschränken, die in gewissen abgeschlossenen Mengen M verlaufen, z.B. $M = \mathbb{R}_{\geq 0}^m$.

KOROLLAR 4.14. *Seien $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $M \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und $u_0 \in M$. Die maximale Lösung u von (4.1) erfülle $u(t) \in M$ für alle $t \in J_m(u_0)$. (Zum Beispiel sei $M = \mathbb{R}^m$.) Es gebe ferner so eine Konstante $c \geq 0$, dass die Bedingung*

$$\forall x \in M : (f(x)|x) \leq c(1 + |x|_2^2) \tag{4.23}$$

gilt. Dann ist $t_m(u_0) = \infty$.

Die Eigenschaft (4.23) liegt vor, wenn f nur linear wächst; d.h., wenn $|f(x)|_2 \leq \tilde{c}(1 + |x|_2)$ für eine Konstante $\tilde{c} \geq 0$ und alle $x \in M$ erfüllt ist.

BEWEIS. 1) Es gelte (4.23). Es seien $0 \leq s \leq t < t_m(u_0)$. Die Differentialgleichung (4.1) und die Voraussetzung (4.23) implizieren

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} |u(s)|_2^2 &= \frac{d}{ds} (u(s)|u(s)) = (u'(s)|u(s)) + (u(s)|u'(s)) \\ &= 2(f(s, u(s))|u(s)) \leq 2c(1 + |u(s)|_2^2). \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass $u(s)$ nach Voraussetzung in M liegt. Wir integrieren nun von 0 nach t und erhalten mit der Anfangsbedingung und dem Hauptsatz (4.16) die Ungleichungen

$$|u(t)|_2^2 - |u_0|_2^2 = \int_0^t \frac{d}{ds} |u(s)|_2^2 ds \leq \int_0^t 2c(1 + |u(s)|_2^2) ds.$$

Wir nehmen an, es gälte $T := t_m(u_0) < \infty$. Dann folgt

$$|u(t)|_2^2 \leq |u_0|_2^2 + 2cT + 2c \int_0^t |u(s)|_2^2 ds.$$

Die Gronwallsche Ungleichung Lemma 4.13 zeigt nun die Abschätzung

$$|u(t)|_2^2 \leq (|u_0|_2^2 + 2cT)e^{2ct} \leq (|u_0|_2^2 + 2cT)e^{2cT}$$

für alle $t \in [0, T)$. Dies widerspricht Theorem 4.12 c), sodass $t_m(u_0) = \infty$ ist.

2) Es gelte nun $|f(x)|_2 \leq \tilde{c}(1 + |x|_2)$ für $x \in M$. Wir verwenden die elementare Abschätzung $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ für $a, b \geq 0$. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt dann die gewünschte Bedingung

$$(f(x)|x) \leq |f(x)|_2 |x|_2 \leq \tilde{c}(|x|_2 + |x|_2^2) \leq \frac{3}{2}\tilde{c}(1 + |x|_2^2). \quad \square$$

Wir illustrieren diese Kriterien mit einfachen Beispielen und behandeln eine unserer anfänglichen Anwendungen.

BEISPIEL 4.15. a) Sei $\|f'(x)\|$ auf \mathbb{R}^m durch L beschränkt. Dann liefert Korollar 3.23 in Analysis 2 die Ungleichung

$$|f(x)|_2 \leq |f(x) - f(0)|_2 + |f(0)|_2 \leq L|x - 0|_2 + |f(0)|_2 \leq c'(1 + |x|_2)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^m$ und $c' := \max\{L, |f(0)|_2\}$. Also gilt $t_m(u_0) = \infty$ für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^m$ gemäß Korollar 4.14.

b) In Beispiel 4.3 haben wir $m = 1$ und $(f(x)|x) = f(x)x = x^3$, sodass die Bedingung (4.23) nicht für alle $x > 0$ gilt. Hier liegt freilich auch Blowup vor.

c) Sei $f(x) = -x^3$ für $x \in \mathbb{R}$. Hier gilt (4.23), da $f(x)x = -x^4 \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Nach Theorem 4.12 und Korollar 4.14 hat also das Problem

$$u'(t) = -u(t)^3, \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0,$$

für jedes $u_0 \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung auf $[0, \infty)$. Mittels Trennung der Variablen erhalten wir im übrigen $u(t) = (2t + u_0^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ für $t \geq 0$.

d) Das Fadenpendel aus Beispiel 4.2 hatten wir mittels des Vektorfeldes

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -\gamma l^{-1} \sin x - (lm)^{-1} R(y) \end{pmatrix},$$

beschrieben, wobei die Reibung $R \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Ungleichung $-yR(y) \leq 0$ für $y \in \mathbb{R}$ genügt. Offenbar ist f stetig differenzierbar. Weiter gilt

$$(f(x, y)|(x, y)) = xy - \frac{\gamma}{l} y \sin x - \frac{1}{lm} R(y)y \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\gamma}{l}|y| \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{\gamma}{l})(1 + |(x, y)|_2^2)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Theorem 4.12, Korollar 4.14 und Beispiel 4.2 zeigen nun die eindeutige globale Lösbarkeit von (4.3) für alle Anfangswerte.

e) Ähnlich wie in Beispiel 4.1, wird im Konkurrenzmodell die Dynamik zweier Arten, die von der gleichen Ressource leben, durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) - bu(t)^2 - ru(t)v(t), & t \geq 0, \\ v'(t) &= cv(t) - dv(t)^2 - su(t)v(t), & t \geq 0, \\ u(t_0) &= u_0, \quad v(0) = v_0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

bestimmt. Hier sind $a, b, c, d, s, r \geq 0$ Konstanten und $u_0, v_0 \geq 0$ Anfangswerte. (Die Terme mit u^2 und v^2 entsprechen der Konkurrenz innerhalb einer Art.) Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ durch die rechte Seite gegeben. Also gibt es eine eindeutige maximale Lösung (u, v) nach Theorem 4.12.

In Hinblick auf (4.23) kann man die quadratischen Terme in f nur mit Hilfe von Positivität behandeln. Sei dazu $(x, y) \in M = \mathbb{R}_{\geq 0}^2$. Dann gilt

$$(f(x, y)|(x, y)) = ax^2 - bx^3 - rx^2y + cy^2 - dy^3 - sxy^2 \leq ax^2 + cy^2 \leq \max\{a, c\} |(x, y)|_2^2.$$

Mittels Korollar 4.14 könnten wir nun auf $t_m(u_0, v_0) = \infty$ für alle $u_0, v_0 \geq 0$ schließen, wenn wir wüssten, dass die Lösung in M verbleibt. \diamond

Wie wir eben gesehen haben, kann die Nicht-Negativität der Lösungen von (4.1) entscheidend zur globalen Existenz beitragen. Auf der anderen Seite ist sie für Probleme unabdingbar, bei denen $u(t)$ Stoffmengen beschreibt. Wir formulieren nun ein sehr einfach zu überprüfendes Kriterium an f , das die Invarianz von $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ sicherstellt. Für Vektoren $x \in \mathbb{R}^m$ schreiben wir dabei $x \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$, wenn alle Komponenten $x_k \geq 0$ sind; sowie $x > 0$ und $x \in \mathbb{R}_+^m$, wenn $x_k > 0$ für jeden Index $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt.

SATZ 4.16. Die Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ erfülle das Positivitätskriterium

$$\text{für alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m \text{ mit } x_k = 0 \text{ für ein } k \in \{1, \dots, m\} \text{ gilt } f_k(x) \geq 0. \quad (4.25)$$

Ferner seien $u_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ und u sei die maximale Lösung von (4.1). Dann erhalten wir $u(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, t_m(u_0))$.

Diese Aussage wird in Satz 5.14 von Analysis 2 und Satz 4.12 in Analysis 4 gezeigt. Die Bedingung (4.25) besagt, dass der Vektor $f(x)$ für $x \in \partial \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ nicht

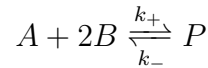
aus $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ hinaus weist. Da $f(u(t))$ die Tangentenrichtung der Lösung u zur Zeit t ist, kann man somit in der Tat erwarten, dass u nicht aus $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ herauslaufen kann. Die Bedingung (4.25) ist im Pendelbeispiel 4.15 d) nicht erfüllt. Dort verliert die Lösung im allgemeinen aber auch eine anfängliche Positivität.

Wir kehren nun zum Konkurrenzmodell (4.24) zurück und diskutieren eine (typische) Reaktionsgleichung,

BEISPIEL 4.17. a) Sei f wie in Beispiel 4.15 e) durch (4.24) gegeben. Für $x, y \geq 0$ gelten dann $f_1(0, y) = 0$ und $f_2(x, 0) = 0$ und damit auch (4.25). Nach Satz 4.16 ist die maximale Lösung (u, v) nicht-negativ, falls $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 = M$ ist. Beispiel 4.15 e) und Korollar 4.14 implizieren nun $t_m(u_0, v_0) = \infty$ für alle $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$.

Auf die gleiche Weise zeigt man, dass das Räuber-Beute Modell (4.2) eindeutige Lösungen in $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ hat, wenn $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ ist. Allerdings muss man hier die globale Existenz anders beweisen, siehe Beispiel 4.21 unten oder Beispiel 4.13 in Analysis 4.

b) Seien $a(t), b(t)$ und $p(t)$ die Konzentrationen der Stoffe A, B und P zur Zeit $t \geq 0$ in der chemischen Reaktion



für Reaktionskonstanten $k_{\pm} \geq 0$. Mit Massenwirkungskinetik erhält man die Reaktionsgleichungen

$$\begin{aligned} a'(t) &= -k_+a(t)b(t)^2 + k_-p(t), & t \geq 0, \\ b'(t) &= -2k_+a(t)b(t)^2 + 2k_-p(t), & t \geq 0, \\ p'(t) &= k_+a(t)b(t)^2 - k_-p(t), & t \geq 0, \\ a(0) &= a_0 \geq 0, \quad b(0) = b_0 \geq 0, \quad p(0) = p_0 \geq 0. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Dieses System hat genau eine nichtnegative beschränkte Lösung (a, b, p) auf $[0, \infty)$.

BEWEIS. Wir bezeichnen die rechte Seite mit $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Nach Theorem 4.12 haben wir also genau eine Lösung (a, b, p) auf dem maximalen Existenzintervall $J_m = [0, t_m(a_0, b_0, p_0))$. Seien $a, b, p \geq 0$. Dann gelten

$$f_1(0, b, p) = k_-p \geq 0, \quad f_2(a, 0, p) = 2k_-p \geq 0, \quad f_3(a, b, 0) = k_+ab^2 \geq 0.$$

Satz 4.16 impliziert die Ungleichungen $a(t), b(t), p(t) \geq 0$ für alle $t \in J_m$.

Wegen des positiven kubischen Terms in der dritten Zeile von (4.26) können wir Korollar 4.14 trotz der Positivität der Lösung nicht verwenden. Wir nutzen stattdessen die Struktur des Systems. Man sieht, dass der kritische Summand k_+ab^2 auch in den ersten beiden Zeilen mit einem ‘guten’ negativen Vorzeichen vorkommt. Deswegen betrachten wir die Funktion $\varphi(t) = a(t) + b(t) + 3p(t)$ für $t \in J$. Die Gleichungen (4.26) liefern die Ableitung

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= a'(t) + b'(t) + 3p'(t) \\ &= -k_+a(t)b(t)^2 + k_-p(t) - 2k_+a(t)b(t)^2 + 2k_-p(t) + 3k_+a(t)b(t)^2 - 3k_-p(t) \end{aligned}$$

$$= 0,$$

sodass $\varphi(t) = \varphi(0)$ für alle $t \in J$ gilt. (Dies entspricht der Massenerhaltung.) Weiter haben wir $0 \leq a(t), b(t), p(t) \leq \varphi(t) = \varphi(0)$. Also ist die Lösung für alle Zeiten beschränkt und damit nach Theorem 4.12 c) global. \square

4.4. Langzeitverhalten

Wir betrachten zuerst die einfachste Klasse von Lösungen von (4.1).

BEMERKUNG 4.18. a) Eine *stationäre Lösung* oder *Equilibrium* von (4.1) ist eine zeitunabhängige Lösung $u(t) = u_*$ für $t \geq 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $f(u_*) = 0$ gilt. In der Tat löst $u(t) = u_*$ für alle $t \in \mathbb{R}$ im Falle $f(u_*) = 0$ das Problem (4.1) mit Anfangswert u_* . Wenn $u(t) = u_*$ eine Lösung von (4.1) ist, dann folgt $0 = u'(0) = f(u_*)$ für $t = 0$.

b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Wenn zwei Lösungen u und v (evt. zu unterschiedlichen Anfangswerten) einen Punkt gemeinsam haben, müssen sie gemäß Theorem 4.12 b) für alle späteren Zeiten übereinstimmen. Nach Theorem 4.9 aus Analysis 4 hat man auch eindeutige Lösungen für frühere Zeiten. Somit können die Lösungen sich nicht schneiden. \diamond

Wir notieren zuerst, dass Grenzwerte von Lösungen Equilibria sein müssen.

LEMMA 4.19. *Seien $f \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $u_0 \in \mathbb{R}^m$ und u löse (4.1) mit $t_m(u_0) = \infty$. Es gelte $u(t) \rightarrow u_*$ für $t \rightarrow \infty$ und ein $u_* \in \mathbb{R}^m$. Dann ist u_* ein Equilibrium.*

BEWEIS. Für $t \geq 0$ folgt aus (4.1) und (4.16) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(u_*)|_2 &= \left| \int_t^{t+1} (f(u_*) - f(u(s))) \, ds + \int_t^{t+1} f(u(s)) \, ds \right|_2 \\ &\leq \int_t^{t+1} |f(u_*) - f(u(s))|_2 \, ds + \left| \int_t^{t+1} u'(s) \, ds \right|_2 \\ &\leq \sup_{s \in [t, t+1]} |f(u_*) - f(u(s))|_2 + |u(t+1) - u(t)|_2. \end{aligned}$$

Die rechte Seite strebt nun für $t \rightarrow \infty$ gegen 0, da f stetig ist. \square

Wir nutzen das obige Lemma aus, um das Verhalten eindimensionaler Probleme sehr einfach zu beschreiben. Dabei beschränken wir uns im wesentlichen auf ein Beispiel.

BEISPIEL 4.20. Wir betrachten die skalare Gleichung

$$u'(t) = u(t)(1 - u(t)), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}.$$

Hier ist also $f(x) = x(1 - x)$ und wir haben genau die Equilibria $u_* = 0$ und $v_* = 1$. Da f stetig differenzierbar ist, gibt es eindeutige maximale Lösung u des Problems. Nach Bemerkung 4.18 kann diese die anderen Lösungen nicht schneiden. Für $u_0 \notin \{0, 1\}$ nimmt also u die Werte 0 und 1 nie an.

a) Sei $u_0 > 1$. Nach der Vorbemerkung und dem Zwischenwertsatz, gilt $u(t) > 1$ für alle $t \in J_m(u_0)$. Aus der Differentialgleichung folgt dann $u'(t) = f(u(t)) < 0$ und u fällt stets strikt. Somit ist u beschränkt (also ist $t_m(u_0) = \infty$ laut Theorem 4.12) und hat demnach einen Grenzwert in $[1, \infty)$. Nach Lemma 4.19 muss der Grenzwert gleich 1 sein.

b) Sei $u_0 \in (0, 1)$. Wie in Teil a) liegt $u(t)$ für alle $t \geq 0$ in $(0, 1)$. Hier erhalten wir $u'(t) = f(u(t)) > 0$, sodass u strikt wächst. Wie in a) folgt $u(t) \rightarrow 1$ für $t \rightarrow \infty$.

c) Sei schließlich $u_0 < 0$. Wie zuvor erhalten wir $u(t) < 0$ für alle $t \in J_m(u_0)$. Aus der Differentialgleichung folgt dann $u'(t) = f(u(t)) < 0$ und u fällt stets strikt. Wenn die Lösung u beschränkt wäre, müsste sie wegen der Monotonie konvergieren. Nach Lemma 4.19 wäre der Grenzwert entweder 0 oder 1, was wieder auf Grund der Monotonie unmöglich ist. Also strebt $u(t)$ für $t \rightarrow t_m(u_0)$ gegen $-\infty$. (Man kann sich überlegen, dass hier $t_m(u_0) < \infty$ ist.)

Insgesamt zieht $v_* = 1$ Lösungen mit Anfangswerten $u_0 > 0$ an und $u_* = 0$ stößt alle u mit $u_0 \neq 0$ ab. Man beachte, dass $f'(1) = -1 < 0$ und $f'(0) = 1 > 0$ sind. \diamond

Man kann die obige Argumentation wie folgt verallgemeinern: Seien $m = 1$ und $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wenn u_0 kein Equilibrium ist (also $f(u_0) \neq 0$), läuft u nach links falls $f(u_0) < 0$ und nach rechts falls $f(u_0) > 0$. Wenn in der jeweiligen Richtung ein Equilibrium liegt, konvergiert u gegen das erste in dieser Richtung, und andernfalls gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$. Siehe Satz 5.2 von Analysis 4.

Für manche zweidimensionale Probleme kann man ähnlich wie im obigen Fall vorgehen. Die ist möglich, wenn man ein ‘erstes Integral’ hat. Seien $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $u_0 \in D$ und u die Lösung von (4.1) auf $J_m(u_0)$. Wir nehmen an, dass $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und *invariant* ist, d.h., für alle $u_0 \in D$ und $t \in J_m(u_0)$ liegt $u(t)$ in D . Eine Funktion $H \in C(D, \mathbb{R})$ heißt dann *erstes Integral* von (4.1) auf D , wenn $H(u(t)) = H(u_0)$ für alle $t \in J_m(u_0)$ und $u_0 \in D$ gilt. Also ist $H(u(t))$ eine Erhaltungsgröße; in physikalischen Beispielen kann sie etwa der Energie entsprechen.

Erste Integrale H in $C^1(D, \mathbb{R})$, können wir leicht charakterisieren. Die Funktion $H \circ u$ ist genau dann konstant, wenn

$$0 = \frac{d}{dt}H(u(t)) = \left(\nabla H(u(t)) \middle| u'(t) \right) = \left(\nabla H(u(t)) \middle| f(u(t)) \right)$$

für alle $t \in J_m(u_0)$ gilt, wobei (4.1) eingeht. Da durch jeden Punkt $x \in D$ eine Lösung verläuft, ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\forall x \in D : \quad (\nabla H(x) \middle| f(x)) = 0. \tag{4.27}$$

Also steht $\nabla H(u(t))$ senkrecht auf der Tangentenrichtung $f(u(t)) = u'(t)$ der Lösung. Ferner läuft die Lösung in der Niveaumenge $N_c = \{x \in D \mid H(x) = H(u_0) =: c\}$. Soweit $\nabla H(x) \neq 0$ gilt, ist N_c eine C^1 -Kurve. Deswegen kann man im Grunde wie in Beispiel 4.20 argumentieren. Dieses Vorgehen wird in Satz 5.6 in Analysis 4 ausgeführt. Im Folgenden wollen wir es anhand des Räuber-Beute Systems erläutern.

BEISPIEL 4.21. Wir betrachten wie in Beispiel 4.1 das System

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) - ru(t)v(t), & t \geq 0, & & u(0) &= u_0, \\ v'(t) &= -cv(t) + su(t)v(t), & t \geq 0, & & v(0) &= v_0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

für die Anzahlen u und v der Beute- bzw. Räuberpopulation, fest gegebene Parameter $a, c, r, s > 0$ und die Anfangswerte $u_0, v_0 \geq 0$. Die rechte Seite werde mit $f(u(t), v(t))$ bezeichnet.

Nach Beispiel 4.17 gibt es genau eine nichtnegative maximale Lösung (u, v) für alle $t \in J_m(u_0, v_0) = [0, t_m)$. In (4.2) haben wir den Fixpunkt $(0, 0)$ und auf den beiden positiven Halbachsen die Lösungen $(e^{at}u_0, 0)$ und $(0, e^{-ct}v_0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $u_0 > 0$ bzw. $v_0 > 0$. Also besteht $\partial\mathbb{R}_+^2$ aus Lösungen. Sei nun $u_0, v_0 > 0$. Dann kann die Lösung $(u(t), v(t))$ den Rand $\partial\mathbb{R}_+^2$ nicht schneiden, siehe Bemerkung 4.18 b). Wegen des Zwischenwertsatzes bleibt sie somit für alle $t \in [0, t_m)$ in $D := \mathbb{R}_+^2$.

Man sieht leicht ein, dass $(u_*, v_*) = (c/s, a/r)$ die einzige Nullstelle von f in \mathbb{R}_+^2 ist. Seien $0 \leq \tau \leq t < t_m$. Wir erweitern nun die erste Gleichung in (4.2) mit $(su - c)/u$ sowie die zweite mit $(a - rv)/u$ und berechnen

$$u'(\tau) \frac{su(\tau) - c}{u(\tau)} = (a - rv(\tau))(su(\tau) - c) = v'(\tau) \frac{a - rv(\tau)}{v(\tau)}.$$

Mittels Integration und den Substitutionen $x = u(s)$ und $y = v(s)$ folgern wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \frac{su(\tau) - c}{u(\tau)} u'(\tau) \, d\tau + \int_0^t \frac{rv(\tau) - a}{v(\tau)} v'(\tau) \, d\tau \\ &= \int_{u_0}^{u(t)} \left(s - \frac{c}{x} \right) dx + \int_{v_0}^{v(t)} \left(r - \frac{a}{y} \right) dy = [sx - c \ln x]_{u_0}^{u(t)} + [ry - a \ln y]_{v_0}^{v(t)}. \end{aligned}$$

Wir erhalten demnach das erste Integral

$$H(x, y) := sx - c \ln x + ry - a \ln y \quad \text{für } x, y > 0.$$

für (4.1) auf (4.1), da $H(u(t), v(t)) = H(u_0, v_0)$ für alle $t \in J_m$ gilt. Wir untersuchen diese Funktion. Es gelten

$$\nabla H(x, y) = \begin{pmatrix} s - cx^{-1} \\ r - ay^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D^2 H(x, y) = \begin{pmatrix} cx^{-2} & 0 \\ 0 & ay^{-2} \end{pmatrix}$$

für $x, y > 0$. Somit ist (u_*, v_*) die einzige Nullstelle von ∇H und die Hessematrix $D^2 H$ ist auf \mathbb{R}_+^2 positiv definit. Weiter konvergiert $H(x, y) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow 0$ oder $y \rightarrow \infty$. Also nimmt die Funktion H bei (u_*, v_*) ihr globales und striktes Minimum $\kappa_* := H(u_*, v_*)$ an. Es sei nun $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(u_*, v_*)\}$. Dann gilt $\kappa = H(u_0, v_0) > \kappa_*$.

In Beispiel 5.8 von Analysis 4 wird nachgerechnet, dass die Niveaumenge $N_\kappa = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid H(x, y) = \kappa\}$ eine einfache, geschlossene C_1 -Kurve ist, die um (u_*, v_*) verläuft. Auf ihr liegt kein Equilibrium. Deswegen zeigt Satz 5.6 von Analysis 4, dass (u, v) periodisch die ganze Niveaulinie durchläuft. Wegen der Richtungen $f(x, y)$ geschieht dies im Gegenuhrzeigersinn. \diamond

Wir haben in Theorem 4.10 gesehen, dass genau dann alle Lösungen des linearen Problems $u' = Au$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren, wenn die Spektralschranke

$$s(A) = \max\{\operatorname{Re} \lambda_j \mid \lambda_j \text{ Eigenwert von } A\}$$

negativ ist. Das folgende *Prinzip der linearisierten Stabilität* überträgt dieses Resultat in eine Umgebung eines Equilibriums von (4.1).

THEOREM 4.22. *Seien $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ und $u_* \in \mathbb{R}^m$ mit $f(u_*) = 0$. Setze $A := f'(u_*) \in \mathbb{R}^{m \times m}$.*

a) Sei $s(A) < 0$. Wähle $\alpha \in (0, -s(A))$. Dann gibt es solche Konstanten $\rho > 0$ und $c \geq 1$, dass $\overline{B}(u_, \rho)$ in D liegt und für jedes $u_0 \in \overline{B}(u_*, \rho)$ die Aussagen*

$$t_m(u_0) = \infty \quad \text{und} \quad |u(t) - u_*|_2 \leq ce^{-\alpha t} |u_0 - u_*|_2$$

für alle $t \geq 0$ gelten, wobei u die Lösung von (4.1) auf $[0, \infty)$ ist.

b) Sei $s(A) > 0$. Dann existiert so ein Radius $r > 0$ und solche Folgen $u_{0,n} \rightarrow u_$ und (t_n) , dass $|u_n(t_n) - u_*|_2 \geq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wobei u_n das Problem (4.1) mit $u_n(0) = u_{0,n}$ löst.*

Den Beweis findet man in Theorem 5.28 aus Analysis 2 und in Theorem 6.6 aus Analysis 4. Das Prinzip der linearisierten Stabilität lässt sich oft leicht anwenden wie etwa im folgenden Räuber-Beute-Modell mit Sättigung (vgl. Beispiel 4.1) und danach beim gedämpften Pendel aus Beispiel 4.2, vergleiche auch Beispiel 4.20.²

BEISPIEL 4.23. Für Konstanten $a, b, c, r, s > 0$ und Anfangswerte $u_0, v_0 \geq 0$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) - bu(t)^2 - ru(t)v(t), & t \geq 0, \\ v'(t) &= -cv(t) + su(t)v(t), & t \geq 0, \\ u(0) &= u_0, \quad v(0) = v_0. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Die rechte Seite definiert eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Wir suchen ein 'Koexistenzgleichgewicht' $(u_*, v_*) \in \mathbb{R}_+^2$. Für $u_*, v_* > 0$ gilt genau dann $f(u_*, v_*) = 0$, wenn $a - bu_* - rv_* = 0$ und $-c + su_* = 0$ sind. Dieses System wird nur von

$$(u_*, v_*) = \left(\frac{c}{s}, \frac{1}{r} \left(a - \frac{bc}{s} \right) \right)$$

gelöst. Genau für $as > bc$ liegt dieser Punkt in \mathbb{R}_+^2 und ist dann das einzige positive Gleichgewicht von (4.28). Ferner erhalten wir

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} a - 2bx - ry & -rx \\ sy & -c + sx \end{pmatrix}, \quad f'(u_*, v_*) = \begin{pmatrix} -\frac{bc}{s} & -\frac{rc}{s} \\ \frac{s}{r} \left(a - \frac{bc}{s} \right) & 0 \end{pmatrix} =: A.$$

Wir nehmen die Beziehung $as > bc$ an. Dann gelten $\operatorname{sp}(A) < 0$ und $\det(A) > 0$, sodass die Ungleichung $s(A) < 0$ aus Beispiel 4.11 folgt. Theorem 4.22 liefert nun

²In der Vorlesung wurde nur Beispiel 4.24 behandelt.

so eine Kugel B um (u_*, v_*) , dass für alle Anfangswerte (u_0, v_0) in B die Lösung $(u(t), v(t))$ für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gegen (u_*, v_*) konvergiert. \diamond

BEISPIEL 4.24. Für Konstanten $\gamma, l, r > 0$ und Anfangswerte $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v(t) \\ -\frac{\gamma}{l} \sin u(t) - rv(t) \end{pmatrix} =: f(u(t), v(t)), \quad t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Dieses korrespondiert dem Pendel aus Beispiel 4.2 mit linearer Dämpfung. Die Nullstellen von f sind $(k\pi, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Für diese Gleichgewichte gilt

$$f'(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\gamma}{l}(-1)^k & -r \end{pmatrix} =: A.$$

Wir haben $\text{sp}(A) < 0$, sowie $\det(A) > 0$ für gerade k und $\det(A) < 0$ für ungerade k . Nach Beispiel 4.11 ist also $s(A) < 0$ für gerade k und hier lässt sich Theorem 4.22 a) anwenden. Dieses Gleichgewicht entspricht dem gerade herabhängenden Pendel. Für ungerade k ist $s(A) > 0$. In diesem Fall steht das Pendel aufrecht, und dieses Gleichgewicht ist ‘instabil’ nach Theorem 4.22 b). \diamond

Das Prinzip der linearisierten Stabilität liefert nur eine ‘lokale’ Aussage nahe u_* . Man erhält globale Konvergenzaussagen, wenn (4.1) eine ‘strikte Laypunovfunktion’ Φ besitzt,; d.h., $t \mapsto \Phi(u(t))$ fällt strikt für alle $t \in J_m(u_0)$ entlang allen nichtkonstanten Lösungen u . Siehe Abschnitt 6.3 von Analysis 4.

Literaturverzeichnis

- [PW] J.W. Prüss und M. Wilke, *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*. Birkhäuser, 2010.
- [Wa] W. Walter, *Analysis 2*. Fünfte, erweiterte Auflage. Springer-Verlag, 2002.