Analysis 1

Skriptum Wintersemester 2015/16

Dieses Skriptum folgt meiner Vorlesung im Wintersemester 2015/16, wobei gelegentlich kleinere Korrekturen und Ergänzungen vorgenommen wurden. Die Nummerierung blieb bis auf einige Gleichungen unverändert. Die Beweise und Rechnungen im Skriptum sind typischerweise etwas knapper gehalten als in der Vorlesung. Es fehlen darüber hinaus die Schaubilder und die Mehrzahl der mündlichen Erläuterungen aus der Vorlesung.

Ich bedanke mich herzlich bei Lars Machinek und Esther Bleich für ihre Unterstützung bei der Erstellung dieses Skriptums, bzw. einer früheren Variante.

Karlsruhe, 24. April 2017 Roland Schnaubelt

Inhaltsverzeichnis

0.1. Bezeichnungen

Die ersten beiden Abschnitten haben einführenden Charakter. Wir gehen dabei von einem naiven Verständnis der Mengenlehre und Logik aus. Weiter verwenden wir die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ bzw. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die Brüche $\mathbb{Q}$ aus der Schulmathematik samt ihrer Rechenregeln.

Zur Abkürzung benützen wir in manchen Formeln die Symbole $\neg$ (“nicht”), $\vee$ (“oder”), $\wedge$ (“und”), $\Longrightarrow$ (“impliziert”), $\Longleftrightarrow$ (“äquivalent”), $\exists$ (“es existiert”), $:=$ (“gleich per Definition”), $\exists!$ (“es existiert genau ein”) und $\forall$ (“für alle”). Beweise werden mit dem Symbol $\square$ beendet. Behauptungen und Beispiele, auf die kein Beweis folgt, werden mit dem Zeichen $\Diamond$ abgeschlossen.

Eine *Aussage* ist ein feststellender Satz, der entweder wahr oder falsch ist. So sind etwa $7 + 5 = 12$ und $n + n = 3n$ Aussagen, hingegen ist $5 + n$ keine Aussage.

Mengen werden durch die Angabe der in ihnen enthaltenen *Elemente* definiert. Zur Erläuterung geben wir einige Beispiele an.

$D = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$ hat die Elemente $1, 2$ und 3.
$\mathbb{N}$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen.
$G = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ ist gerade}\}$.
$\emptyset = \{\ \}$ ist die *leere Menge*, die kein Element enthält.

Für Mengen M und N verwenden wir die folgenden Bezeichnungen.

$x \in M$	bedeutet, dass x ein Element von M ist, also in M liegt; z.B. $2 \in D$.
$x \notin M$	bedeutet, dass x kein Element von M ist; z.B. $3 \notin G$.
$M \subseteq N$	bedeutet, dass alle $x \in M$ auch in N enthalten sind, M heißt dann *Teilmenge* von N. Ein Beispiel ist $\{2, 6, 8\} \subseteq G$.
$M = N$	bedeutet, dass $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gelten. Die Mengen M und N heißen dann *gleich*, wie z.B. $G = \{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
$M \neq N$	bedeutet, dass M und N nicht gleich sind.
$M \subset N$	oder $M \subsetneqq N$ bedeutet, dass $M \subseteq N$ und $M \neq N$ gelten. Dann M heißt *echte Teilmenge* von N.
$M \cap N$	ist die Menge aller x, die in M und in N enthalten sind, und heißt *Schnittmenge* oder *Durchschnitt*. Ein Beispiel ist $D \cap G = \{2\}$.
$M \cup N$	ist die Menge aller x, die in M oder in N enthalten sind, und heißt *Vereinigungsmenge*. Ein Beispiel ist $D \cup G = \{1, 2, 3, 4, 6, \ldots\}$.
$M \setminus N$	ist die Menge aller x, die in M aber nicht in N enthalten sind, und heißt *Differenzmenge*. Ein Beispiel ist $G \setminus D = \{4, 6, \ldots\}$.
$M \times N$	ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$ und heißt *Produktmenge*. Weiter schreiben wir M^2 statt $M \times M$. Entsprechend definiert man n-fache Produktmengen.

Wir verweisen auf die Vorlesung Lineare Algebra für die Rechenregeln der Logik und der Mengenlehre. Soweit nötig gehen wir später noch auf einzelne Regeln ein.

Eine *Abbildung* oder *Funktion*

$$f : M \to N; \quad x \longmapsto f(x),$$

besteht aus einem Definitionsbereich M, einer Bildmenge N und einer Abbildungsvorschrift, die jedem *Urbild* $x \in M$ genau ein *Bild* $f(x) \in N$ zuordnet. Ein Beispiel ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $x \longmapsto 2x$. Man schreibt auch $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $f(x) = 2x$. Häufig verwendet man abkürzend nur das Symbol f für die Funktion. Diese Begriffe werden später vertieft und ergänzt. Sie werden ferner in der Linearen Algebra behandelt.

0.2. Vollständige Induktion

Wir diskutieren in diesem Abschnitt ein wesentliches Beweisprinzip der Mathematik. Dieses beruht auf der folgenden Eigenschaft der natürlichen Zahlen.

Prinzip der vollständigen Induktion.
Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ erfülle die beiden folgenden Bedingungen.

(IA) 1 *sei ein Element von* M.
(IS) Wenn eine natürliche Zahl n zu M gehört, so liegt auch ihr Nachfolger $n+1$ in M.

Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Beweis. Wir führen den Beweis *indirekt* und nehmen an, die Behauptung wäre falsch. Dann gibt es eine Zahl k in $\mathbb{N} \setminus M$. Nach (IA) liegt 1 in M. Gemäß (IS) folgt, dass $2 = 1 + 1$ ein Element von M ist. Für $k \leq 2$, hätte man schon einen Widerspruch erzielt. Andernfalls wendet man (IS) weitere $k - 2$ Mal an und erhält den Widerspruch $k \in M$. Somit muss die obige Annahme falsch gewesen sein und folglich ihr Gegenteil (also die Behauptung) wahr sein. □

Um eine Familie von Aussagen $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen, wenden wir dieses Induktionsprinzip auf die Menge

$$M := \{m \in \mathbb{N} \,|\, A(m) \text{ ist wahr}\}$$

an. Daraus ergibt sich das folgende Beweisprinzip.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion.
Es sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Man geht in zwei Schritten vor.

(IA) Induktionsanfang: Man zeigt, dass $A(1)$ wahr ist.
(IS) Induktionsschluss: Man nimmt an, dass für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr sei (Induktionsvoraussetzung, IV). Dann zeigt man, dass auch $A(n+1)$ wahr ist.

Wenn (IA) und (IS) nachgewiesen sind, dann sind alle Aussagen $A(n)$ wahr.

Man kann hier die Indexmenge $\mathbb{N}$ durch $\{k, k+1, \ldots\}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ersetzen. Wir diskutieren einige typische Beispiele für die vollständige Induktion.

Beispiel 0.1. Es gilt $1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir bezeichnen die behauptete Aussage mit $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir haben $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$, sodass (IA) wahr ist. Um (IS) zu zeigen, nehmen wir als (IV) an, dass $A(n)$ für ein (festes, aber beliebiges) $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgern wir

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+n+(n+1) &= \tfrac{1}{2}n(n+1)+(n+1) = (n+1)(\tfrac{1}{2}n+1) \\ &= \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2). \end{aligned}$$

Somit ist $A(n+1)$ und damit (IS) bewiesen. Per vollständiger Induktion ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, was die Behauptung ist. $\square$

Um die Schreibweise "$1+\ldots+n$" zu präzisieren, *definieren* wir *rekursiv* das Summenzeichen $\sum$. Gegeben seien Zahlen $a_j \in \mathbb{Q}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ mit $j \geq m$, wobei $m \in \mathbb{Z}$ fest gewählt ist. Wir definieren zunächst

$$\sum_{j=m}^{m} a_j := a_m.$$

Wir nehmen dann an, dass die Summe $\sum_{j=m}^{m+n} a_j$ für ein (festes, aber beliebiges) $n \in \mathbb{N}_0$ schon definiert worden ist. Dann setzen wir

$$\sum_{j=m}^{m+n+1} a_j := a_{m+n+1} + \sum_{j=m}^{m+n} a_j$$

für dieses n. Nun wenden wir das Induktionsprinzip auf die Menge

$$M := \left\{ n \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, \sum_{j=m}^{m+n} a_j \text{ ist definiert} \right\}$$

an. Dadurch wird die Summe

$$\sum_{j=m}^{p} a_j$$

für jedes $p \in \mathbb{Z}$ mit $p \geq m$ definiert. Man schreibt stattdessen auch $a_m + \ldots + a_p$. Entsprechend erklärt man das Produkt

$$\prod_{j=m}^{p} a_j = a_m \cdot \ldots \cdot a_p.$$

Man schreibt dabei abkürzend

$$a^n := \prod_{k=1}^{n} a \quad \text{und} \quad a^0 := 1$$

für alle $a \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Per Induktion kann man die Rechenregeln der Bruchrechnung auf die durch $\sum$ und $\prod$ definierten Summen und Produkte ausdehnen. Zum Beispiel gilt

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)$$

für alle $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$ mit $j \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir bezeichnen wieder die behauptete Gleichung mit $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zunächst gilt A(1), da die obige Definition die Identitäten

$$\sum_{j=1}^{1} a_j + \sum_{j=1}^{1} b_j = a_1 + b_1 = \sum_{j=1}^{1} (a_j + b_j)$$

impliziert. Um (IS) nachzuweisen, nehmen wir als (IV) an, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr sei. Indem wir die Definition und in der zweiten Gleichung (IV) verwenden, berechnen wir

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n+1} b_j\right) &= a_{n+1} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) + b_{n+1} + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) \\ &= a_{n+1} + b_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j) = \sum_{j=1}^{n+1} (a_j + b_j).\end{aligned}$$

Also ist $A(n+1)$ und somit (IS) gezeigt. Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion impliziert, dass $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. $\square$

Wir lassen im Folgenden meist die äußeren Klammern weg, wenn klar sein sollte worauf sich die Summe oder das Produkt bezieht. Die folgende 'geometrische Summe' wird später eine wichtige Rolle spielen.

Beispiel 0.2. Für alle $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Gleichung

$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Beweis. Wieder bezeichne $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die behauptete Identität. Die Aussage $A(1)$ ergibt sich sofort aus der Gleichung

$$\sum_{j=0}^{0} q^j = q^0 = 1 = \frac{q - 1}{q - 1}.$$

Um (IS) zu zeigen, nehmen wir als (IV) an, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte. Mittels der Definition der Summe und mit (IV) in der zweiten Gleichung, folgern wir

$$\sum_{j=0}^{n+1} q^j = q^{n+1} + \sum_{j=0}^{n} q^j = q^{n+1} + \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+1}(q - 1) + q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}.$$

Also ist $A(n+1)$ und somit (IS) wahr. Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung. $\square$

Weiter definiert man die *Fakultät* $n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$0! := 1 \qquad \text{und} \qquad n! := \prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für $n, j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \leq n$ ist ferner der *Binomialkoeffizient* durch

$$\binom{n}{j} := \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

gegeben. Ein Beispiel ist

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Für $j, n \in \mathbb{N}_0$ mit $j \leq n$ genügt der Binomialkoeffizient den Rechenregeln

$$\binom{n}{n-j} = \frac{n!}{(n-j)!(n-n+j)!} = \binom{n}{j}, \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1, \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned}\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} &= \frac{n!}{(j-1)!\,(n-j+1)!}\,\frac{j}{j} + \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\,\frac{n-j+1}{n-j+1} \\ &= \frac{n!\,(j+n-j+1)}{j!\,(n+1-j)!} = \frac{(n+1)!}{j!\,(n+1-j)!} = \binom{n+1}{j} \qquad \text{für } \; j \geq 1.\end{aligned} \tag{0.2}$$

Die nächste wichtige Aussage verallgemeinert die einfachen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad \text{und} \qquad (a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Beispiel 0.3. Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt der *binomische Satz*

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

Mit $a = b = 1$ folgt insbesondere die (überraschende) Gleichung $2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$.

Beweis. Es sei $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die abgesetzte Identität in der Behauptung. (IA) ergibt sich aus der Beobachtung

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} a^{0-j} b^j.$$

Um (IS) zu zeigen, nehmen wir als (IV) an, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte. Diese Annahme impliziert

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j. \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j+1} b^j + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^{j+1}.\end{aligned}$$

In der letzten Summe setzen wir nun $l = j+1$ (bzw. $j = l-1$). Danach schreiben wir wieder j statt l und wenden (0.2) an. Dies liefert die Gleichungen

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j+1} b^j + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^{n+1-l} b^l$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{n-j} \right) a^{n-j+1} b^j + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j.
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir am Ende auch (0.1) ausgenutzt. Man beachte, dass die Summationsgrenzen der Summe in l verschoben werden und dass beim Zusammenziehen der Summen die nicht passenden Terme mit $j = 0$ und $l = n+1$ getrennt auftreten. Also gilt $A(n+1)$ und somit (IS). Die Behauptung folgt nun mittels vollständiger Induktion. $\square$

Die obigen Aussagen gelten nicht nur in $\mathbb{Q}$ sondern allegmeinern in *Körpern*, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden.

KAPITEL 1

Reelle und komplexe Zahlen

Wir definieren die reellen Zahlen in drei Schritten, indem wir zuerst die für sie geltenden Regeln (*Axiome*) für die algebraischen Verknüpfungen und für die Ordnungsstruktur festlegen und dann die sogenannte Ordnungsvollständigkeit verlangen. Es wird sich in Beispiel 3.18 zeigen, dass die so eingeführten reellen Zahlen mit denen der Schulmathematik übereinstimmen.

1.1. Geordnete Körper

Sei M eine nichtleere Menge. Eine Abbildung

$$* : M \times M \to M; \quad (x, y) \longmapsto x * y,$$

heißt *Verknüpfung* auf M.

Definition 1.1. *Es sei K eine Menge mit Elementen $0 \neq 1$ und Verknüpfungen $+$ und $\cdot$. Das Quintupel $(K, 0, 1, +, \cdot)$ heißt* Körper, *falls die folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in K$ erfüllt sind.*

(AG+) $(x + y) + z = x + (y + z)$. *(Assoziativgesetz)*
(NE+) $x + 0 = x$.
(IE+) $\forall\, x \in K \quad \exists\, u \in K \quad$ *mit* $\quad x + u = 0$.
(KG+) $x + y = y + x$. *(Kommutativgesetz)*
(AG·) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. *(Assoziativgesetz)*
(NE·) $x \cdot 1 = x$.
(IE·) $\forall\, x \in K \setminus \{0\} \quad \exists\, v \in K \quad$ *mit* $\quad x \cdot v = 1$.
(KG·) $x \cdot y = y \cdot x$. *(Kommutativgesetz)*
(DG) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$. *(Distributivgesetz)*

Man schreibt oft K statt $(K, 0, 1, +, \cdot)$ und xy statt $x \cdot y$.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind mit den üblichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Körper, $\mathbb{Z}$ ist es nicht (da es z.B. kein $v \in \mathbb{Z}$ mit $2v = 1$ gibt). Der kleinste Körper ist $\mathbb{F}_2 = \{\underline{0}, \underline{1}\}$ mit den Verknüpfungen

$$\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}, \quad \underline{0} + \underline{1} = \underline{1} + \underline{0} = \underline{1}, \quad \underline{1} + \underline{1} = \underline{0}, \quad \underline{0} \cdot \underline{0} = \underline{0}, \quad \underline{0} \cdot \underline{1} = \underline{1} \cdot \underline{0} = \underline{0}, \quad \underline{1} \cdot \underline{1} = \underline{1}.$$

Man schreibt für die inversen Elemente $u =: -x$ bzw. $v =: \frac{1}{x}$ (falls $x \neq 0$), sowie $x - y$ anstelle von $x + (-y)$ und $\frac{x}{y}$ anstelle von $x \cdot \frac{1}{y}$ (falls $y \neq 0$). Man lässt meist überflüssige Klammern weg, wobei "$\cdot$ vor +" gilt, z.B. verwenden wir $x + y + z$ statt $x + (y + z)$ oder $x + yz$ statt $x + (yz)$.

Man kann zeigen, dass die neutralen und inversen Elemente in (NE+), (IE+), (NE$\cdot$) und (IE$\cdot$) eindeutig bestimmt sind. Weiter gelten Rechenregeln wie in der Bruchrechnung, so etwa $0 \cdot x = 0$, $-(-x) = x$ und $-x = (-1)x$ für alle $x \in K$, sowie $(x^{-1})^{-1} = x$ für alle $x \in K \setminus \{0\}$. Für diese und verwandte Ausssagen verweisen wir auf die Lineare Algebra und verwenden sie ohne weiteren Kommentar.

In den Aussagen und Beweisen in Abschnitt 0.2 kann man $\mathbb{Q}$ durch jeden Körper K ersetzen.

Definition 1.2. *Sei M eine nichtleere Menge. Eine* Relation *R auf M ist eine nichtleere Teilmenge von $M \times M$. Man schreibt $x \underset{R}{\sim} y$, falls (x, y) in $R \subseteq M \times M$ liegt. Eine Relation R heißt* Ordnung *auf M, wenn für alle $x, y, z \in M$ die folgenden Aussagen gelten.*

(R) $x \underset{R}{\sim} x$. (Reflexivität)

(T) Aus $x \underset{R}{\sim} y$ und $y \underset{R}{\sim} z$ folgt $x \underset{R}{\sim} z$. (Transitivität)

(AS) Wenn $x \underset{R}{\sim} y$ und $y \underset{R}{\sim} x$, dann gilt $x = y$. (Antisymmetrie)

Die Ordnung heißt total*, wenn für alle $x, y \in M$ stets $x \underset{R}{\sim} y$ oder $y \underset{R}{\sim} x$ gilt.*

Die Relation $R = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \,|\, m \text{ teilt } n\}$ ist eine nicht totale Ordung auf $\mathbb{N}$, da z.B. 2 nicht 3 und 3 nicht 2 teilt.

Bei einer Ordnung schreibt man statt $\sim_R$ meist "$\leq_R$" oder "$\leq$" und sagt "kleiner gleich". Man schreibt "$x < y$" und sagt "x kleiner y", wenn $x \leq y$ und $x \neq y$. Weiter haben $y \geq x$ und $x \leq y$, sowie $y > x$ und $x < y$, jeweils die gleiche Bedeutung.

In der folgenden Definition werden die algebraischen und die ordnungtheoretischen Strukturen miteinander verbunden.

Definition 1.3. *Ein* geordneter Körper $(K, \leq)$ *besteht aus einem Körper $K = (K, 0, 1, +, \cdot)$ und einer totalen Ordnung $\leq$ auf K derart, dass für alle $x, y, z \in K$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.*

(O+) Wenn $x < y$, dann gilt auch $x + z < y + z$.

(O$\cdot$) Wenn $x > 0$ und $y > 0$, dann gilt auch $xy > 0$.

Man schreibt meist K statt $(K, \leq)$. Ein $x \in K$ heißt positiv *(*negativ*), wenn $x > 0$ ($x < 0$) gilt, und* nichtnegativ *(*nichtpositiv*), wenn $x \geq 0$ ($x \leq 0$) gilt. Man setzt*

$$K_+ = \{x \in K \,|\, x > 0\} \qquad \textit{und} \qquad K_- = \{x \in K \,|\, x < 0\}.$$

Aus (AS) und der Totalität der Ordnung folgen

$$K_+ \cap K_- = \emptyset \qquad \text{und} \qquad K_+ \cup K_- \cup \{0\} = K.$$

Die Brüche $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Ordnung $\leq$ bilden einen geordneten Körper.

Wir zeigen nun einige direkte Folgerungen aus den obigen Definitionen; in den Übungen werden weitere Rechenregeln hergeleitet.

Satz 1.4. *Es seien K ein geordneter Körper und $x, y, z \in K$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Die Ungleichung $y > x$ ist äquivalent zu $y - x > 0$.
b) Die Ungleichungen $x < 0$ und $-x > 0$ sind äquivalent, und ebenso $x > 0$ und $-x < 0$.
c) Aus den Relationen $x > 0$ und $y < 0$ folgt $xy < 0$.
d) Für $x \neq 0$ haben wir $x^2 > 0$, sodass insbesondere $1 = 1^2 > 0$ gilt.
e) Wenn $x > 0$ ist, dann gilt auch $\frac{1}{x} > 0$.
f) Aus $y > x$ und $z > 0$ folgen $yz > xz$.[1]

In a), b), c) und f) kann man ferner "$>$" durch "$\geq$" ersetzen.

Beweis. a) Es gelte $y > x$. Wenn wir zu beiden Seiten $-x$ addieren, folgt $y - x > x - x = 0$ aus (O+). Nun gelte $y - x > 0$. Hier addieren wir x und erhalten mit (O+) die gewünschte Ungleichung $y = y - x + x > 0 + x = x$.

b) Die erste Äquivalenz folgt aus Teil a) mit $y = 0$. Wenn wir sie auf $-x$ anwenden, ergibt sich die zweite Teilaussage.

c) Seien $x > 0$ und $y < 0$. Mit b) erhalten wir die Ungleichung $-y > 0$. Aus (O·) schließen wir dann $0 < x(-y) = -xy$, was nach b) die Behauptung $xy < 0$ liefert.

d) Sei $x \neq 0$. Aufgrund der Totalität der Ordnung und b) gilt dann entweder $x > 0$ oder $-x > 0$. Aus (O·) folgt dann $x^2 > 0$, bzw. $x^2 = (-x)^2 > 0$.

e) Sei $x > 0$. Da $1 = x \cdot x^{-1} \neq 0$, muss x^{-1} ungleich 0 sein. Wenn $x^{-1} < 0$ wäre, ergäbe sich mit c) der Widerspruch $0 > xx^{-1} = 1$.

f) Seien $y > x$ und $z > 0$. Gemäß a) haben wir dann $y - x > 0$, sodass (O·) die Ungleichung $0 < (y - x)z = yz - xz$ impliziert. Wieder mit a) folgt Teil f).

Die letzte Aussage zeigt man dann durch Betrachtung des Gleichheitsfalls. $\square$

Aus dem obigen Satz kann man z.B. schließen, dass es keine Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{F}_2$ so gibt, dass $(\mathbb{F}_2, \leq)$ ein geordneter Körper ist. In der Tat, müssten dann $\underline{1} > \underline{0}$ und $-\underline{1} < \underline{0}$ gelten, was aber der in $\mathbb{F}_2$ gültigen Gleichung $\underline{1} = -\underline{1}$ widerspräche.

Den folgenden Begriff benötigen wir wesentlich für die Definition und Untersuchung von Grenzwerten. In $\mathbb{Q}$ entspricht er gerade dem üblichen Betrag.

Definition 1.5. *Es seien K ein geordneter Körper und $x \in K$. Dann heißt*

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

der Betrag *von x.*

Im nächsten Satz sammeln wir die grundlegenden Eigenschaften des Betrags.

Satz 1.6. *Es seien K ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) $|x| \geq 0. \qquad |x| = 0 \iff x = 0.$

[1] Nicht in der Vorlesung, sondern in einer Übung behandelt.

b) $x \leq |x|, \qquad -x \leq |x|, \qquad |x| = |-x|.$
c) $|xy| = |x|\,|y|.$
d) $|x+y| \leq |x| + |y|.$
e) $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|.$

Beweis. Die Aussagen a) und b) folgen aus Definition 1.5 mittels Fallunterscheidungen und Satz 1.4.

c) Seien $x \geq 0$ und $y \leq 0$. Nach Satz 1.4 gilt dann $xy \leq 0$. Definition 1.5 liefert also $|xy| = -xy = x(-y) = |x|\,|y|$. Die anderen drei Fälle behandelt man ähnlich.

d) Nach b) haben wir die Ungleichungen $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$. Mit (O+) folgern wir die Abschätzung $x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|$. Genauso schließen wir $-(x+y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$. Zusammen ergibt sich die Behauptung aus Definition 1.5.

e) Teil d) impliziert $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$, sodass (O+) die Ungleichung $|x| - |y| \leq |x-y|$ liefert. Genauso sieht man, dass $|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|$ gilt, wobei wir auch b) verwendet haben. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Die folgenden Teilmengen geordneter Körper werden ein zentrale Rolle spielen.

Definition 1.7. *Es seien K ein geordneter Körper und $a, b \in K$ mit $a < b$. Dann definiert man die* beschränkten Intervalle *durch*

$$[a,b] = \{x \in K \,|\, a \leq x \leq b\}, \qquad (a,b) = \{x \in K \,|\, a < x < b\}, \qquad [a,a] = \{a\},$$
$$[a,b) = \{x \in K \,|\, a \leq x < b\}, \qquad (a,b] = \{x \in K \,|\, a < x \leq b\},$$

und die unbeschränkten Intervalle *durch*

$$[a,\infty) = \{x \in K \,|\, x \geq a\}, \qquad (-\infty,a] = \{x \in K \,|\, x \leq a\},$$
$$(a,\infty) = \{x \in K \,|\, x > a\}, \qquad (-\infty,a) = \{x \in K \,|\, x < a\}.$$

Die Intervalle $[a,b]$, $[a,a]$, $[a,\infty)$ und $(-\infty,a]$ heißen abgeschlossen *und (a,b), $(-\infty,a)$ und (a,∞) heißen* offen*.*

Wir diskutieren ein Zahlenbeispiel: Die Menge aller $x \in \mathbb{Q}$ mit $|2x-3|+2 > 3x-5$ ist das Intervall $(-\infty, 4)$ in $\mathbb{Q}$. Um dies zu zeigen, löst man zunächst den Betrag auf und erhält

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & x \geq 3/2, \\ 3-2x, & x < 3/2. \end{cases}$$

Demgemäß unterscheidet man nun zwei Fälle.

1. Fall. Sei $x \geq 3/2$. Dann wird aus $|2x-3| + 2 > 3x - 5$ die Ungleichung

$$3x - 5 < 2x - 3 + 2 = 2x - 1.$$

Nach (O+) ist diese Relation äquivalent zu $3x < 2x + 4$ (wobei man 5, bzw. -5 für die umgekehrte Implikation, addiert), und diese gleichwertig zu $x < 4$ (wobei man $-2x$, bzw. $2x$, addiert). Also gilt die behauptete Ungleichung für alle $x \in [3/2, 4)$, und sie ist falsch für alle $x \geq 4$.

2. Fall. Sei $x < 3/2$. Nun ist die Ungleichung $|2x-3|+2 > 3x-5$ zu

$$3x - 5 < 3 - 2x + 2 = 5 - 2x$$

äquivalent. Wie oben schließen wir aus (O+), dass diese Relation gleichwertig zu $5x < 10$ ist. Mit Satz 1.4f) formt man dies äquivalent zu $x < 2$ um, indem man $1/5$, bzw. 5, multipliziert. Somit gilt die Aussage für alle $x < 3/2$.

Wenn man die beiden Fälle zusammenfügt, folgt die Behauptung. $\Diamond$

Wir ergänzen zwei Aussagen, die wir später einige Male verwenden werden.

Satz 1.8 (Bernoulli-Ungleichung). *Es seien K ein geordneter Körper, $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion. Für $n = 1$ gilt sie offensichtlich. Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Mit dieser Induktionsvorraussetzung und Satz 1.4f) erhalten wir

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x,$$

wobei wir auch $1 + x \geq 0$, sowie am Ende (O+) und $nx^2 \geq 0$ (nach Satz 1.4) verwendet haben. $\square$

Lemma 1.9. *Es seien K ein geordneter Körper und $a, b \in K$ mit $a < b$. Setze $2 := 1 + 1 \in K$. Dann gilt $a < \frac{1}{2}(a + b) < b$.*

Beweis. Mittels (O+) schließen wir aus $a < b$ auf die Relationen $2a = a + a < a + b < b + b = 2b$. Nach Satz 1.4f) bleiben diese Ungleichungen unter der Multiplikation mit $1/2$ erhalten. $\square$

1.2. Suprema und reelle Zahlen

Die Ordnung erlaubt es uns von Minima und Maxima in K zu sprechen.

Definition 1.10. *Es seien K ein geordneter Körper und M eine nichtleere Teilmenge von K.*

a) Ein Element a aus K ist eine obere *(bzw.* untere*)* Schranke *von M, wenn $a \geq m$ (bzw. $a \leq m$) für alle $m \in M$ gilt. Wenn so eine Schranke a existiert, dann heißt M* von oben *(bzw.* unten*)* beschränkt*.*

b) Die Menge M heißt beschränkt*, wenn sie von oben und von unten beschränkt ist. Andernfalls heißt M* unbeschränkt*.*

c) Ein Element x von K ist ein Maximum *(bzw.* Minimum*) von M, wenn x in M liegt und x eine obere (bzw. untere) Schranke von M ist. Man schreibt dann $x = \max M$ (bzw. $x = \min M$).*

Beispiel 1.11. Sei K ein geordneter Körper und $b \in K$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Das Intervall $M = (-\infty, b]$ besitzt das Maximum b und ist nicht nach unten beschränkt.

Beweis. Die erste Behauptung folgt direkt aus den Definitionen 1.7 und 1.10. Für die zweite nehmen wir an, dass M eine untere Schranke $a \in K$ hätte. Also gilt $a \le m$ für alle $m \in M$ und speziell $a \le b$. Da -1 nach Satz 1.4 negativ ist, schließen wir dann aus (O+) auf die Ungleichungen $a - 1 < a \le b$. Also liegt $a - 1$ in M und somit ist $a \le a - 1$, was falsch ist. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung. □

b) Das Intervall $N = (-\infty, b)$ hat die obere Schranke b und kein Maximum.

Beweis. Wieder ist die erste Behauptung klar. Wir nehmen an, dass N ein Maximum a besäße. Da dann a in N liegt, gilt $a < b$. Lemma 1.9 liefert dann die Ungleichungen $a < \frac{1}{2}(a+b) < b$, sodass auch $\frac{1}{2}(a+b)$ in N enthalten ist. Dies widerspricht aber der Maximalität von a. Also hat N kein Maximum. □

Aufgrund der folgenden Beobachtung bezeichnen $\max M$ und $\min M$ tatsächlich einzelne Elemente von K (und nicht größere Teilmengen).

Bemerkung 1.12. Eine nichtleere Teilmenge M eines geordneten Körpers hat höchstens ein Maximum und höchstens ein Minimum.

Beweis. Seien etwa x und y zwei Maxima von M. Da beide in M liegen und obere Schranken sind, erhalten wir $x \le y$ und $y \le x$. Also sind x und y gleich. Minima behandelt man genauso. □

Wir kommen zu zwei zentralen Begriffen der Vorlesung, die allgemeiner als Minimum und Maximum sind und z.B. in Beispiel 1.11b) verwendet werden können.

Definition 1.13. *Es seien K ein geordneter Körper und M eine nichtleere Teilmenge von K.*

a) Sei M nach oben beschränkt. Wenn es eine kleinste obere Schranke b von M gibt, so heißt diese Supremum *von M, und man schreibt $b = \sup M$.*

b) Sei M nach unten beschränkt. Wenn es eine größte untere Schranke a von M gibt, so heißt diese Infimum *von M, und man schreibt $a = \inf M$.*

Beispiel 1.14. Es gilt in Beispiel 1.11b), dass $b = \sup(-\infty, b)$.

Beweis. Wir wissen aus Beispiel 1.11, dass b eine obere Schranke von $(-\infty, b)$ ist. Wir nehmen an, es gäbe eine obere Schranke $x < b$ von $(-\infty, b)$. Nach Lemma 1.9 gilt dann $x < \frac{1}{2}(x+b) < b$, sodass $\frac{1}{2}(x+b)$ in $(-\infty, b)$ liegt. Somit kann x keine obere Schranke sein. □

Wir sammeln einige einfache, aber wichtige Eigenschaften der obigen Konzepte.

Bemerkung 1.15. Sei M eine nichtleere Teilmenge eines geordneten Körpers K. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Wenn das Supremum von M existiert, dann ist es das Minimum der oberen Schranken von M. Entsprechend ist $\inf M$ das Maximum der unteren Schranken von M. Diese Charakterisierungen folgen aus den Definitionen 1.10 und 1.13.

b) Wegen a) und Bemerkung 1.12 besitzt M höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum.

c) Wenn $\max M$ bzw. $\min M$ existieren, dann sind sie (aufgrund der Definitionen und b)) schon das Supremum bzw. das Infimum von M.

d) Wenn Supremum und Infimum von M existieren, dann gilt $\inf M \leq m \leq \sup M$ für alle $m \in M$.

e) Setze $-M = \{-x \,|\, x \in M\}$. Genau dann hat M eine untere Schranke, wenn $-M$ eine obere hat. Weiter existiert $\inf M$ genau dann, wenn $\sup(-M)$ existiert, und dann gilt $\inf M = -\sup(-M)$.

Beweis. Seien $m \in M$ und $x, y \in K$. Nach einer Übung ist $x \leq y \leq m$ äquivalent zu $-x \geq -y \geq -m$. Somit ist x genau dann eine untere Schranke von M, wenn $-x$ eine obere Schranke von $-M$ ist. Weiter hat M genau dann eine größere untere Schranke als x, wenn $-M$ eine kleinere obere Schranke als $-x$ besitzt. Mit a) folgt dann die Behauptung. □

f) Sei $M \subseteq N \subseteq K$. Wenn $\sup N$ und $\sup M$ existieren, dann ist $\sup N$ eine obere Schranke von M und somit $\sup M \leq \sup N$. Entsprechend gilt $\inf M \geq \inf N$, wenn $\inf N$ und $\inf M$ existieren. ◊

Im folgenden verwenden wir oft, dass für Aussagen A und B aus der Folgerung $A \Rightarrow B$ die (umgekehrte) Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ der negierten Aussagen folgt.

Beispiel 1.16. Die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q}_+ \,|\, x^2 \leq 2\}$ ist nach oben beschränkt und hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Beweis. 1) Wenn $x \geq 2$ ist, folgen die Ungleichungen $x^2 \geq 2x \geq 4$. Somit liegt x nicht in M. Per Negation sehen wir, dass jedes Element x von M kleiner als 2 sein muss. Also ist 2 eine obere Schranke von M.

2) Wir nehmen an, dass $s := \sup M$ in $\mathbb{Q}$ existierte. Dann gibt es teilerfremde $p, q \in \mathbb{N}$ mit $s = p/q$. Gemäß Lemma 1.24 unten gilt nun $s^2 = 2$ und also $p^2 = 2q^2$, sodass p^2 gerade ist. Folglich ist p gerade (für ein ungerades p wäre auch p^2 ungerade) und es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ mit $p = 2r$. Wir schließen daraus, dass $q^2 = 2r^2$ gerade ist. Damit sind p und q gerade, was ihrer Teilerfremdheit widerspricht. □

Wir fügen ein letztes Axiom hinzu, um Körper wie $\mathbb{Q}$ auszuschließen, in denen Suprema fehlen.

Definition 1.17. *Ein geordneter Körper K, in dem jede nach oben beschränkte nichtleere Menge ein Supremum besitzt, heißt* ordnungsvollständig. *(Nach Bemerkung 1.15e) hat dann auch jede nach unten beschränkte nichtleere Menge ein Infimum.) Die* reellen Zahlen $\mathbb{R}$ *sind ein ordnungsvollständiger geordneter Körper.*

Nach Beispiel 1.16 ist $\mathbb{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig. Wir besprechen die obige Definition noch ein wenig.

Man kann $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$ auffassen. Dies geschieht dadurch, dass man ausgehend von 0 und 1 in $\mathbb{R}$, induktiv die Elemente $2 := 1+1$, $3 := 2+1$ usw. definiert, womit man $\mathbb{N}_0$ erhält. Die Operationen $-n$ und m/n für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ führen dann auf $\mathbb{Z}$, bzw. $\mathbb{Q}$. Man kann nachrechnen, dass neben den

Elementen 0 und 1 auch die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, sowie die Ordnung $\leq$ von $\mathbb{R}$ mit den bekannten Strukturen auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ übereinstimmen.

Ferner kann man $\mathbb{R}$ wie in Definition 1.17 ausgehend von der Mengentheorie konstruieren. Dabei ist $\mathbb{R}$ durch Definition 1.17 "eindeutig bestimmt". Diese Sachverhalte sind nicht Gegenstand dieser Vorlesung, da sie recht umfangreich und begrifflich anspruchsvoll sind. Verwandte allgemeinere Konstruktionen werden in späteren Vorlesungen besprochen. Gleichwohl sei hier auf Theorem I.1.10 in [**1**] für eine Beweisskizze und auf die Monographien [**5**] und [**2**] für eine detaillierte Darstellung verwiesen.

Wir zeigen nun eine wichtige Charakterisierung von Suprema und Infima, sowie einige Eigenschaften den reellen Zahlen.

Satz 1.18. *Sei $s \in \mathbb{R}$. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Genau dann ist s das Supremum von M, wenn s eine obere Schranke von M ist und*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in M \quad \textit{mit} \quad s - \varepsilon < x_\varepsilon \leq s.$$

Sei stattdessen M nach unten beschränkt. Genau dann ist s das Infimum von M, wenn s eine untere Schranke von M ist und

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in M \quad \textit{mit} \quad s \leq x_\varepsilon < s + \varepsilon.$$

Beweis. 1) Sei $s = \sup M$. Gemäß Definition 1.13 ist dann s eine obere Schranke von M und für alle $\varepsilon > 0$ ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von M. Somit existiert wie behauptet ein $x_\varepsilon \in M \cap (s-\varepsilon, s]$. Es gelten umgekehrt diese beiden Eigenschaften und $r \in (-\infty, s)$ sei eine weitere obere Schranke von M. Setze $\varepsilon = s - r > 0$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein Element x_ε von M mit $r = s - \varepsilon < x_\varepsilon$, was ein Widerspruch ist. Dies zeigt die erste Äquivalenz.

2) Sei $s = \inf M$. Nach Definition 1.13 ist s eine untere Schranke von M und für alle $\varepsilon > 0$ ist $s+\varepsilon$ keine untere Schranke von M. Also gibt es ein $x_\varepsilon \in M \cap [s, s+\varepsilon)$. Es gelten umgekehrt diese beiden Eigenschaften und $r > s$ sei eine weitere untere Schranke von M. Setze $\varepsilon = r - s > 0$. Dann existiert ein Element x_ε von M mit $r = s + \varepsilon > x_\varepsilon$. Dieser Widerspruch impliziert die zweite Behauptung. $\square$

Satz 1.19. *Sei M eine nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$. Dann hat M ein Minimum. Insbesondere hat eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Minimum (da sie die untere Schranke 1 besitzt). Wenn $\emptyset \neq N \subset \mathbb{Z}$ nach oben beschränkt ist, dann hat es in Maximum.*

Beweis. Gemäß Definition 1.17 existiert $x := \inf M$. Satz 1.18 mit $\varepsilon = 1/2$ liefert dann eine Zahl $m_0 \in M \cap [x, x + \frac{1}{2})$. Somit ist m_0 kleiner als $m + \frac{1}{2}$ für jedes $m \in M$, woraus $m > m_0 - \frac{1}{2}$ folgt. Da für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{m_0\}$ stets $|m - m_0| \geq 1$ gilt, erhalten wir $m_0 \leq m$ für alle $m \in M$. Also ist m_0 das Minimum von M. Die zweite Behauptung zeigt man genauso. $\square$

Das nächste Resultat ist bei Konvergenzuntersuchungen von großem Nutzen.

Satz 1.20. *a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $n_x \in \mathbb{N}$ mit $n_x > x$.*
b) Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existiert eine Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $1/n_\varepsilon < \varepsilon$.
c) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wenn $x \leq 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist $x \leq 0$.

Beweis. a) Wir nehmen an, es gäbe eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.19 hätte dann $\mathbb{N}$ ein Maximum N. Diese Eigenschaft steht aber im Widerspruch zu $N < N + 1 \in \mathbb{N}$, sodass a) gezeigt ist.

b) Nach a) mit $x = 1/\varepsilon > 0$, gibt es eine Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon > x$, also $\varepsilon > 1/n_\varepsilon$.

c) Wenn $x > 0$ wäre, gäbe es nach b) eine natürliche Zahl n_0 mit $x > 1/n_0$, was der Voraussetzung in c) widerspricht. $\square$

Ein erster Ausflug ins Unendliche. Wir beginnen mit einigen allgemeinen Definitionen, die wir später vertiefen werden.

Definition 1.21. *Seien M, N und P nichtleere Mengen. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt* injektiv*, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ stets $f(x) \neq f(y)$ gilt. Sie heißt* surjektiv*, wenn es für alle $z \in N$ ein $x \in M$ mit $f(x) = z$ gibt. Eine injektive und surjektive Abbildung heißt* bijektiv*.*

Für ein bijektives $f : M \to N$ existiert die Umkehrabbildung *$f^{-1} : N \to M$; $f^{-1}(y) = x$, wobei $x \in M$ das eindeutig bestimmte Element mit $f(x) = y$ ist.*

Für Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$, ist die Komposition *von f und g durch $g \circ f : M \to P$; $g \circ f(x) = g(f(x))$, gegeben.*

In einer Übung wird gezeigt, dass die Umkehrabbildung einer bijektiven Abbildung wieder bijektiv ist. Ferner ist die Komposition bijektiver Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$ bijektiv mit der Umkehrabbildung $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Wir nutzen nun die obige Definition, um unendliche Mengen zu erklären.

Definition 1.22 (Cantor). *Zwei nichtleere Mengen M und N heißen* gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt. Wenn M und $\{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gleichmächtig sind, so schreibt man $\#M = n$ und nennt M* endlich*. Wenn dies für kein $n \in \mathbb{N}$ gilt, so heißt M* unendlich*. Dann schreibt man $\#M = \infty$.*

Wenn $\#M = n \in \mathbb{N}$, so können wir $x_k = f^{-1}(k)$ für die Abbildung f aus Definition 1.22 und $k \in \{1, \ldots, n\}$ setzen. Daraus erhalten wir $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Per Widerspruch folgt dann, dass eine Obermenge einer unendlichen Menge auch unendlich ist. Mittels der oben erwähnten Eigenschaften bijektiver Abbildungen sieht man leicht ein, dass $\#M = \#N$ für gleichmächtige Mengen M und N gilt. Wir beweisen die Unendlichkeit einiger Mengen.

Satz 1.23. *a) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\{j \in \mathbb{N} \,|\, j \geq m\}$ unendlich.*
b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > a$ ist auch $\{x \in \mathbb{Q} \,|\, a < x < b\}$ unendlich.

Beweis. a) Wir nehmen an, es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\#\{j \in \mathbb{N} \,|\, j \geq m\} = n$. Wie oben gesehen, können wir dann $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ schreiben. Dann liegt die

Zahl $y := |x_1| + \ldots + |x_n| + 1 > x_k \geq m$ in $\mathbb{Z}$. Sie ist also ein Element von M, was unmöglich ist, da y größer als jedes x_k ist.

b) Nach Satz 1.20 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < b - a$. Also gilt $nb > 1 + na$. Satz 1.19 liefert ein minimales $m \in \mathbb{Z}$ mit $m > na$, woraus $na < m \leq 1 + na < nb$ folgt. Somit liegt $x_1 := m/n$ in (a, b). Aus Satz 1.20 erhalten wir ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1/k < x_1 - a$. Damit genügt der Bruch $x_2 := x_1 - 1/k$ den Ungleichungen $a < x_2 < x_1 < b$. Iterativ erhalten wir eine Teilmenge $N_0 = \{x_1, x_2, \ldots\}$ von $N := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, a < x < b\}$. Wegen der Bijektivität der Abbildung $f : \mathbb{N} \to N$; $f(n) = x_n$, ist die Menge N_0 gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ und damit nach a) unendlich. Aus einer der obigen Anmerkungen folgt nun die Unendlichkeit der Obermenge N. □

1.3. Potenzen mit rationalen Exponenten

Wir werden in Definition 4.39 allgemeine Potenzen einführen. Da wir aber zuvor zumindest Wurzeln benötigen, definieren wir schon jetzt Potenzen mit rationalen Exponenten. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir zunächst $a^n = \prod_{k=1}^n a$ und $a^0 = 1$, sowie $a^{-n} := (a^n)^{-1}$ wenn $a \neq 0$. Die Rechenregeln für diese ganzzahlige Potenzen verwenden wir ohne Beweis, der leicht per Induktion zu führen ist. Ferner benötigen wir für $a, b \in [0, \infty)$ die ordnungstheoretischen Eigenschaften

$$a < b \iff a^n < b^n \qquad \text{und} \qquad a \leq b \iff a^n \leq b^n. \tag{1.1}$$

Beweis. Es seien $a, b \geq 0$.

1) Sei $a < b$. Dann folgt $a^2 < ab < b^2$ und per Induktion auch $a^n < b^n$. Genauso zeigt man diese Implikation für $\leq$.

2) Wenn wir in 1) für $<$ die Rollen von a und b vertauschen, erhalten wir per Negation, dass aus $a^n \leq b^n$ die Ungleichung $a \leq b$ folgt. Somit ist die behauptete Äquivalenz für $\leq$ gezeigt. Die andere ergibt sich entsprechend. □

Um die n-te Wurzel von $a > 0$ zu definieren, lösen wir die Gleichung $w^n = a$.

Lemma 1.24. *Es sei $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $M = \{x \in [0, \infty) \,|\, x^n \leq a\}$ besitzt ein Supremum w in $\mathbb{R}$. Dieses ist die einzige Lösung von $w^n = a$ in $\mathbb{R}_+$.*

Beweis. 1) Die Menge M ist nichtleer, da 0 in M liegt. Für $x \geq 1 + a$ folgen aus (1.1) und Satz 1.8 die Ungleichungen $x^n \geq (1 + a)^n \geq 1 + na > a$, sodass x nicht in M liegt. Per Negation sehen wir, $1 + a$ eine obere Schranke von M ist. Somit existiert nach Definition 1.17 das Supremum $w := \sup M \geq 0$.

2) Wir nehmen an, dass $w^n < a$ gälte. Dann setzen wir

$$\varepsilon := \min\left\{1, \frac{a - w^n}{(1 + w)^n}\right\} \in (0, 1].$$

Mit dem binomischen Satz aus Beispiel 0.3 und den Formeln (0.1) und (1.1) erhalten wir

$$(w + \varepsilon)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j} = w^n + \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j-1}$$

$$\le w^n + \varepsilon \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} w^j 1^{n-j-1} = w^n + \varepsilon(w+1)^n \le a.$$

Am Ende haben wir die Definition von ε ausgenützt. Damit gehört $w+\varepsilon$ zu M. Weiter gilt $w+\varepsilon > w$, was der Definition von w widerspricht. Also erhalten wir $w^n \ge a > 0$, woraus auch $w > 0$ folgt.

3)[2] Wir nehmen an, dass $w^n > a$ gälte. Wir setzen nun

$$\varepsilon := \min\left\{1, w, \frac{w^n - a}{(1+w)^n}\right\} \in (0,1].$$

Wie in Teil 2) berechnen wir

$$\begin{aligned}(w-\varepsilon)^n &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j} \ge w^n - \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j-1} \\ &\ge w^n - \varepsilon \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} w^j 1^{n-j-1} = w^n - \varepsilon(w+1)^n \ge a.\end{aligned}$$

Andererseits liefert Satz 1.18 ein $x_\varepsilon \in M$ mit $0 \le w - \varepsilon < x_\varepsilon \le w$. Mit (1.1) folgt dann der Widerspruch $(w-\varepsilon)^n < x_\varepsilon^n < a$, da x_ε in M liegt. Somit gilt $w^n = a$.

4) Es gelte auch $v^n = a$ für ein $v \in \mathbb{R}_+$. Also haben wir sowohl $v^n \le w^n$ als auch $w^n \le v^n$. Nach (1.1) impliziert dies $v \le w$ und $w \le v$, und somit $v = w$. □

Definition 1.25. *Es seien $a \in \mathbb{R}_+$ und $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei w wie in Lemma 1.24 gegeben. Dann definieren wir die n-te* Wurzel *von a durch $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} := w$ und die q-te* Potenz *durch $a^q := (a^{\frac{1}{n}})^m$. Wir schreiben $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$. Insbesondere gilt $(\sqrt[n]{a})^n = a$.*

Wir ziegen nun einige Rechenregeln für die Potenzen.

Satz 1.26. *Für $a, b \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ gelten die folgenden Aussagen.*

a) $a^p b^p = (ab)^p$.
b) $a^p a^q = a^{p+q}$.
c) $(a^p)^q = a^{pq} = (a^q)^p$.
d) Sei $b > a > 0$. Dann gilt $b^p > a^p > 0$ für $p > 0$, und $0 < b^p < a^p$ für $p < 0$.
e) $|x| = \sqrt{x^2}$.

Beweis. Es seien $a, b \ge 0$, $p = m/n$ und $q = k/l$ für $l, n \in \mathbb{N}$ und $k, m \in \mathbb{Z}$.

a) Wir berechnen

$$(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^n (b^{\frac{1}{n}})^n = ab,$$

wobei die Punkte für ein n-faches Produkt stehen und wir am Ende Definition 1.25 verwendet haben. Also liefert Definition 1.25 die Gleichung $a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$. Indem wir die m-te Potenz bilden, erhalten wir a).

[2] Nicht in der Vorlesung behandelt.

b)[3] Ähnlich wie in a) berechnen wir

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = ((a^{\frac{1}{n}})^m)^n = ((a^{\frac{1}{n}})^n)^m = a^m,$$

und somit $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$. Daraus folgt

$$(a^p a^q)^{ln} = (a^{\frac{m}{n}})^{ln}(a^{\frac{k}{l}})^{ln} = (a^m)^{\frac{ln}{n}}(a^k)^{\frac{ln}{l}} = a^{ml}a^{kn} = a^{lm+kn}.$$

Wenn wir nun die ln-te Wurzel ziehen, ergibt sich b).

c) Die erste Gleichung in c) erhalten wir wie in b) aus der Rechnung

$$[(a^p)^q]^{ln} = [(a^p)^{\frac{k}{l}}]^{ln} = [(a^p)^k]^n = (a^{\frac{m}{n}})^{kn} = (a^m)^k = a^{km}$$

und dem Ziehen der ln-ten Wurzel. Die zweite Gleichung in c) ist eine Konsequenz der ersten, da $pq = qp$ gilt.

d) Sei $b > a$. Wenn $b^{\frac{1}{n}} \leq a^{\frac{1}{n}}$ wäre, dann folgte mit (1.1) der Widerspruch $b = (b^{\frac{1}{n}})^n \leq (a^{\frac{1}{n}})^n = a$. Also gilt die Ungleichung $b^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{1}{n}}$. Die Behauptung ergibt sich dann durch m-faches Potenzieren.

e) Nach Definition 1.5 haben wir $|x|^2 = x^2$ für $x \geq 0$ und $|x|^2 = (-x)^2$ für $x < 0$. Also gilt $|x|^2 = x^2$, woraus die Behauptung mit Definition 1.25 folgt. □

1.4. Komplexe Zahlen

Wir wollen die Gleichung $x^2 = -1$ lösen. Nach Satz 1.4 hat diese Gleichung in einem geordneten Körper keine Lösung, also insbesondere nicht in $\mathbb{R}$. Wir erweitern nun $\mathbb{R}$ zu einem (nicht geordneten) Körper, um eine Lösung zu erhalten. Dazu versehen wir im Grunde nur $\mathbb{R}^2$ auf folgende Weise mit einer Multiplikation. Für Elemente $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir die Addition und die Multiplikation

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v), \qquad (x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Es ergibt sich speziell $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$. Wir schreiben nun 1 statt $(1, 0)$, i statt $(0, 1)$ und $x + \mathrm{i}y = z$ statt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Insbesondere gilt dann $\mathrm{i}^2 = -1$.

Wir definieren demzufolge die komplexen Zahlen $\mathbb{C} := \{z = x + \mathrm{i}y \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$. Dabei fassen wir $\mathbb{R}$ als die Teilmenge $\{z = x + \mathrm{i} \cdot 0 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{C}$ auf. Für $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ erklären wir die Verknüpfungen

$$z + w := (x + u) + \mathrm{i}(y + v) \in \mathbb{C}, \qquad zw = z \cdot w := (xu - yv) + \mathrm{i}(xv + yu) \in \mathbb{C},$$

wobei in den Klammern nur reelle Operationen stehen. In der Vorlesung Lineare Algebra wird gezeigt, dass $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$ ein Körper ist. Wir haben die Inversen

$$-z = -x - \mathrm{i}y \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{für} \quad z \neq 0.$$

Definition 1.27. *Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt $x = \operatorname{Re} z$ der* Realteil *von z, $y = \operatorname{Im} z$ der* Imaginärteil *von z, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der* Betrag *von z und $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ das* komplex Konjugierte *von z.*

[3] Die Teile b) und c) wurden in der Vorlesung nicht bewiesen.

Der komplexe Betrag $|z|$ ist gleich der euklidischen Länge des Vektors (x, y) in $\mathbb{R}^2$. Wenn $z = x$ in $\mathbb{R}$ liegt, dann stimmt der komplexe Betrag $|z| = \sqrt{x^2}$ nach Satz 1.26 mit dem reellen Betrag $|x|$ überein. Wir definieren schließlich für den Mittelpunkt $z \in \mathbb{C}$ und den Radius $r > 0$ die Mengen

$$\begin{aligned} B(z,r) &:= \{w \in \mathbb{C} \,|\, |z-w| < r\} && \text{(die offene Kreisscheibe)}, \\ \overline{B}(z,r) &:= \{w \in \mathbb{C} \,|\, |z-w| \le r\} && \text{(die abgeschlossene Kreisscheibe)}, \\ S(z,r) &:= \{w \in \mathbb{C} \,|\, |z-w| = r\} && \text{(die Kreislinie)}. \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt hierbei etwa $B(x,r) \cap \mathbb{R} = (x-r, x+r)$. Im folgenden Satz sammeln wir wichtige Eigenschaften der Operationen in $\mathbb{C}$. Man beachte, dass der komplexe Betrag sich im wesentlichen wie der reelle verhält, vgl. Satz 1.6.

Satz 1.28. *Für $w, z \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Aussagen.*

a) $\overline{\overline{z}} = z$; $\quad |z|^2 = z\overline{z}$; $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, *wenn* $z \neq 0$.
b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.
c) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$.
d) $|\operatorname{Re} z| \le |z|$, $\quad |\operatorname{Im} z| \le |z|$, $\quad |\overline{z}| = |z|$.
e) $|z| \ge 0$; $\quad z = 0 \iff |z| = 0$.
f) $|zw| = |z||w|$. *Insbesondere gilt* $|-z| = |z|$.
g) $|z+w| \le |z| + |w|$. *(Dreiecksungleichung)*
h) $|z-w| \ge \big||z| - |w|\big|$.

Beweis. Es seien $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$ für $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

a) Es gelten $\overline{\overline{z}} = \overline{x - \mathrm{i}y} = x + \mathrm{i}y$ und $z\overline{z} = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = x^2 - \mathrm{i}^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$, woraus auch die dritte Gleichung folgt.

b) Wir haben $\overline{z+w} = x + u - \mathrm{i}y - \mathrm{i}v = \overline{z} + \overline{w}$ und

$$\overline{z}\,\overline{w} = (x - \mathrm{i}y)(u - \mathrm{i}v) = xu - \mathrm{i}xv - \mathrm{i}yu + \mathrm{i}^2yv = (xu - yv) - \mathrm{i}(xv + yu) = \overline{zw}.$$

c) Aus den Gleichungen $z + \overline{z} = x + \mathrm{i}y + x - \mathrm{i}y = 2x = 2\operatorname{Re} z$ folgt die erste Behauptung, und aus $z - \overline{z} = x + \mathrm{i}y - x + \mathrm{i}y = 2\mathrm{i}y = 2\mathrm{i}\operatorname{Im} z$ die zweite.

d) Satz 1.26 liefert $|\operatorname{Re} z| = |x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ und analog die zweite Aussage. Für die letzte berechnen wir $|\overline{z}| = |x + \mathrm{i}(-y)| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |z|$.

e) Nach d) impliziert $|z| = 0$ schon $z = 0$. Die anderen Teile sind klar.

f) Aus a) und b) schließen wir $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2\,|w|^2$. Die Behauptung erhalten wir, indem wir die Wurzel ziehen.

g) Die Aussagen a), b), c), d) und f) liefern

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \le |z|^2 + 2\,|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Wurzelziehen die Aussage.

h) ist wie in Satz 1.6 eine Konsequenz von g). $\square$

Wir schließen mit einem Zahlenbeipiel. Es gilt

$$z := \frac{2+3\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}} = \frac{(2+3\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(-1+2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} = \frac{2+4\mathrm{i}+3\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2}{-1+4\mathrm{i}^2} = \frac{-4+7\mathrm{i}}{-5} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}\mathrm{i}.$$

Daraus folgen

$$\operatorname{Re} z = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{7}{5}, \quad -z = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}\mathrm{i}, \quad \overline{z} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}\mathrm{i},$$

$$|z| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{65}}{5}, \quad \frac{1}{z} = \frac{-1+2\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{25}{65}\Big(\frac{4}{5} + \frac{7}{5}\mathrm{i}\Big) = \frac{1}{13}(4+7\mathrm{i}).$$

KAPITEL 2

Konvergenz von Folgen

Die Konvergenz ist der zentrale Begriff der Analysis. In diesem Kapitel wird er in der einfachsten Situation definiert und untersucht.

2.1. Einfache Eigenschaften

DEFINITION 2.1. *Eine Abbildung* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *heißt (komplexe)* Folge. *Man schreibt* a_n *statt* $\varphi(n)$ *für* $n \in \mathbb{N}$, *sowie* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(a_n)_n$ *oder* (a_n) *statt* φ. *Wenn* a_n *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *in* $\mathbb{R}$ *liegt, dann heißt* $(a_n)_{n\geq 1}$ reelle Folge *oder* Folge in $\mathbb{R}$.

Man schreibt für eine Folge (a_n) manchmal auch suggestiv $(a_1, a_2, \dots)$. Das folgende Konzept ist die Grundlage der gesamten Vorlesung.

DEFINITION 2.2. *Sei* $(a_n)_{n\geq 1}$ *eine Folge und* $a \in \mathbb{C}$. *Die Folge* (a_n) konvergiert gegen a, *wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *so ein* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *gibt, dass* $|a_n - a| \leq \varepsilon$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq N_\varepsilon$ *gilt; also wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N_\varepsilon : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon. \tag{2.1}$$

Die Zahl a *ist dann der* Grenzwert *der Folge* (a_n), *und man schreibt*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Wenn $a_n \to 0$ *für* $n \to \infty$, *so heißt* (a_n) Nullfolge. *Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt* divergent.

Also liegen im Falle einer konvergenten Folge (a_n) mit Grenzwert a für jedes gegebene $\varepsilon > 0$ alle Folgenglieder bis auf endlich viele in der Kugel $\overline{B}(a, \varepsilon)$.

Wir bemerken, dass eine Folge (a_n) genau dann divergiert, wenn

$$\forall\, a \in \mathbb{C} \quad \exists\, \varepsilon_a > 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{N} \quad \exists\, n = n_{N,a} \geq N : \quad |a_n - a| > \varepsilon_a. \tag{2.2}$$

Wenn eine Aussage mit den Quantoren $\forall$ und $\exists$ verneint wird, dann vertauscht man diese beiden überall und negiert die eigentliche Aussage. Man beachte, dass das Objekt einer Existenzaussage immer von den (im logischen Sinne) davor stehenden Allquantoren abhängt.

Es folgen Beispiele, bei denen man (2.1) oder (2.2) direkt nachprüfen kann.

BEISPIEL 2.3. a) Sei $z \in \mathbb{C}$ fest gegeben. Dann konvergiert die konstante Folge mit $a_n = z$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) gegen z. Hier gilt $(a_n) = (z, z, \dots)$.

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben. Wähle $N_\varepsilon = 1$. Für alle $n \geq 1$ gilt $|a_n - z| = |z - z| = 0 \leq \varepsilon$. □

b) Sei $p \in \mathbb{Q}_+$ fest gegeben und $a_n = n^{-p}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Hier haben wir $(a_n) = (1, 2^{-p}, 3^{-p}, \ldots)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben. Nach Satz 1.20 gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $N_\varepsilon \geq \varepsilon^{-1/p} > 0$. Sei $n \geq N_\varepsilon$. Dann impliziert Satz 1.26 die Ungleichungen

$$|a_n - 0| = n^{-p} \leq N_\varepsilon^{-p} \leq (\varepsilon^{-1/p})^{-p} = \varepsilon. \qquad \square$$

c) Sei $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (a_n) divergiert. Dabei gilt $(a_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$.

Beweis. Wir zeigen (2.2). Sei zuerst $a = 1$. Wähle $\varepsilon_1 = 1$. Sei $N \in \mathbb{N}$ (beliebig) gegeben. Für jedes ungerade $n \geq N$ erhalten wir $|a_n - a| = |-1-1| = 2 > \varepsilon_1$. Den Fall $a = -1$ behandelt man genauso mit geraden n. Schließlich liege a in $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Nun wählen wir $\varepsilon_a := \frac{1}{2} \min\{|1-a|, |-1-a|\} > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$ (beliebig) gegeben. Dann folgt

$$|a_n - a| = \left.\begin{cases} |1-a|, & n \geq N \text{ gerade}, \\ |-1-a|, & n \geq N \text{ ungerade}, \end{cases}\right\} > \varepsilon_a. \qquad \square$$

Im folgenden Satz zeigen wir erste wichtige Eigenschaften von konvergenten Folgen, insbesondere die Eindeutigkeit des Grenzwertes.

Satz 2.4. *Die Folge (a_n) konvergiere gegen ein $a \in \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) (a_n) ist beschränkt*; d.h., es gibt ein $M \geq 0$ mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

b) Sei $a_n \to b$ für $n \to \infty$ und ein $b \in \mathbb{C}$. Dann gilt die Gleichheit $a = b$.

Beweis. a) Wähle $\varepsilon = 1$. Nach (2.1) existiert eine Index $N_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - a| \leq 1$ für alle $n \geq N_1$ gilt. Somit erhalten wir für diese n die Schranke

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|,$$

wobei wir Satz 1.28 ausgenutzt haben. Also folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \cdots, |a_{N_1 - 1}|, 1 + |a|\} =: M.$$

b) Sei $\varepsilon > 0$. Aus den Voraussetzungen erhalten wir Indizes $N_{\varepsilon,a}$ und $N_{\varepsilon,b}$ in $\mathbb{N}$ so, dass die Ungleichungen $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_{\varepsilon,a}$ und $|a_n - b| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_{\varepsilon,b}$ erfüllt sind. Wir setzen nun $N_\varepsilon := \max\{N_{\varepsilon,a}, N_{\varepsilon,b}\} \in \mathbb{N}$, um beide Abschätzungen verwenden zu können. Wieder mit der Dreiecksungleichung aus Satz 1.28 folgt

$$0 \leq |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| \leq 2\varepsilon$$

für all $n \geq N_\varepsilon$. Da hier $\varepsilon > 0$ beliebig ist, impliziert Satz 1.20 die Gleichung $|a - b| = 0$, also $a = b$. $\square$

Man beachte, dass die Folge $((-1)^n)_n$ beschränkt, aber divergent ist. Man kann Divergenz nachweisen, indem man zeigt, dass notwendige Bedingungen für Konvergenz wie in Satz 2.4a) verletzt sind.

Beispiel 2.5. Sei $p \in \mathbb{Q}_+$ und $a_n = n^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (a_n) unbeschränkt und divergent.

Beweis. Nach Satz 2.4 reicht es zu zeigen, dass $(n^p)_n$ unbeschränkt ist. Dazu nehmen wir an, es gäbe eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ mit $0 \le n^p \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.26 gilt dann $n \le M^{1/p}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was Satz 1.20 widerspricht. Also ist $(n^p)_n$ unbeschränkt. □

Wir diskutieren einige Varianten der Konvergenzdefinition.

Bemerkung 2.6. a) Sei (a_n) eine Folge, $a \in \mathbb{C}$ und $c > 0$ so eine (von n und ε unabhängige!) Konstante, dass

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \ge N_\varepsilon : \quad |a_n - a| \le c\varepsilon. \tag{2.3}$$

Dann konvergiert (a_n) gegen a.

Beweis. Sei $\eta > 0$ (beliebig) vorgegeben. Setze $\varepsilon := \eta/c > 0$ und $N_\eta := N_\varepsilon$ für $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aus (2.3). Da dann $c\varepsilon = \eta$ gilt, folgt (2.1) mit η statt ε direkt aus (2.3). □

b) Wenn (a_n) gegen a konvergiert, dann gilt auch

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \ge N_\varepsilon : \quad |a_n - a| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Umgekehrt ist klar, dass (2.1) aus (2.4) folgt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben. Mit $\varepsilon/2 > 0$ in (2.1) erhalten wir einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - a| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$ für alle $n \ge N_\varepsilon$ gilt. □

c) Die Folge (a_n) habe den Grenzwert a. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert auch die *verschobene* Folge $(a_{n+k})_n = (a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$ gegen a. Dies folgt direkt aus (2.1).

d) Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$. Eine Abbildung $\psi : \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \ge n_0\} \to \mathbb{C}$ bezeichnet man auch als Folge, und man schreibt $(b_n)_{n \ge n_0}$ statt ψ, wobei $b_n := \psi(n)$. Indem man $a_k := b_{k+n_0-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ betrachtet, kann man diesen Fall auf die in Definitionen 2.1 und 2.2 behandelte Situation zurückführen. Die hier entwickelte Theorie überträgt sich somit auf Folgen $(a_n)_{n \ge n_0}$. ♢

Es folgen nun eine Reihe von Rechenregeln für Grenzwerte, die wir samt späterer Varianten ständig verwenden werden. Die ersten Grenzwertsätze zeigen, dass die Konvergenz die Körperverknüpfungen respektiert.

Satz 2.7. *Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten a bzw. b. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Es existiert $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

b) Es existiert $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

c) Sei auch $a \ne 0$. Dann existiert so ein $N \in \mathbb{N}$, dass $a_n \ne 0$ für alle $n \ge N$ gilt und $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$ für $n \to \infty$ und $n \ge N$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben. Nach Voraussetzung existieren Indizes $N_{\varepsilon,a}$ und $N_{\varepsilon,b}$ in $\mathbb{N}$ derart, dass die Ungleichungen

$$|a_n - a| \le \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge N_{\varepsilon,a} \qquad \text{und} \qquad |b_n - b| \le \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge N_{\varepsilon,b} \tag{2.5}$$

gelten. Wir setzen $N_\varepsilon := \max\{N_{\varepsilon,a}, N_{\varepsilon,b}\} \in \mathbb{N}$.

a) Sei $n \geq N_\varepsilon$. Nach (2.5) und Bemerkung 2.6 folgt a) aus der Abschätzung

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq 2\varepsilon.$$

b) Satz 2.4 liefert eine Zahl $M \geq 0$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $n \geq N_\varepsilon$. Indem wir wieder Satz 1.28 und (2.5) verwenden, berechnen wir

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a|\,|b_n| + |a|\,|b_n - b| \leq (M + |a|)\varepsilon.$$

Bemerkung 2.6 impliziert dann die Behauptung.

c) Wir wählen in (2.5) speziell $\varepsilon_0 = |a|/2 > 0$ und erhalten einen zugehörigen Index $N := N_{\varepsilon_0,a} \in \mathbb{N}$. Für $n \geq N$ liefern (2.5) und die Sätze 1.28 und 1.6b) die untere Abschätzung

$$|a_n| = |a_n - a - (-a)| \geq \Big|\, |a_n - a| - |a| \,\Big| \geq |a| - |a_n - a| \geq |a| - |a|/2 = |a|/2.$$

Dies zeigt den ersten Teil von c). Sei nun $n \geq \max\{N, N_\varepsilon\}$. Wenn wir die eben bewiesene Abschätzung ausnutzen, folgt wie oben die Behauptung aus

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a a_n}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a|\,|a_n|} \leq \frac{2}{|a|^2}\,\varepsilon. \qquad \square$$

Das Beispiel der Nullfolge $(a_n) = (1/n)$ mit der divergenten Folge der Kehrwerte $(1/a_n) = (n)$ zeigt, dass man in Satz 2.7c) nicht auf die Bedingung $a \neq 0$ verzichten kann. Mit den obigen Gesetzen können wir zahlreiche Grenzwerte bestimmen, ohne explizit Definition 2.2 nachprüfen zu müssen.

Beispiel 2.8. Die Folge $(a_n) = \left(\dfrac{\mathrm{i}n^2 + 2n}{3n^2 + 5n + 1}\right)$ hat den Grenzwert $\dfrac{\mathrm{i}}{3}$.

Beweis. Wir kürzen den Bruch mit der höchsten Potenz n^2 des Nenners zu

$$a_n = \frac{\mathrm{i} + 2n^{-1}}{3 + 5n^{-1} + n^{-2}}.$$

Beispiel 2.3 und Satz 2.7 zeigen, dass der Zähler für $n \to \infty$ gegen i konvergiert und der Nenner gegen 3. Da $3 \neq 0$ ist, liefert Satz 2.7 die Behauptung. $\square$

Der nächste Satz sichert die Verträglichkeit des Konvergenzbegriffs mit den komplexen Strukturen inklusive des Betrages.

Satz 2.9. *Für jede Folge (a_n) gelten die folgenden Aussagen.*

a) Wenn $a_n \to a$ für $n \to \infty$, dann konvergieren $(\overline{a}_n)$ gegen $\overline{a}$, $(\operatorname{Re} a_n)$ gegen $\operatorname{Re} a$, $(\operatorname{Im} a_n)$ gegen $\operatorname{Im} a$ und $(|a_n|)$ gegen $|a|$. Insbesondere hat eine konvergente reelle Folge einen reellen Grenzwert.

b) Wenn $\operatorname{Re} a_n \to b$ und $\operatorname{Im} a_n \to c$ für $n \to \infty$, dann strebt (a_n) gegen $a = b + \mathrm{i}c$.

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ der Index aus (2.1). Sei $n \geq N_\varepsilon$. Zusammen mit (2.1) liefert dann Satz 1.28 die Abschätzung

$$|\overline{a}_n - \overline{a}| = |\overline{a_n - a}| = |a_n - a| \leq \varepsilon$$

und damit $\overline{a}_n \to \overline{a}$ für $n \to \infty$. Wegen der Formeln für Real- und Imaginärteil aus Satz 1.28 folgen die Konvergenzaussagen für diese dann aus Satz 2.7. Die untere Dreiecksungleichung und (2.1) implizieren die Abschätzung

$$\Big| |a_n| - |a| \Big| \le |a_n - a| \le \varepsilon,$$

sodass $|a_n|$ gegen $|a|$ konvergiert. Wenn $a_n \in \mathbb{R}$, dann ergibt sich $0 = \operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a$ für $n \to \infty$ und somit $a \in \mathbb{R}$. Behauptung b) ist eine Konsequenz von Satz 2.7. $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass der Grenzwert Ungleichungen erhält, und liefert ein wichtiges Hilfsmittel für Konvergenzuntersuchungen. Dabei genügt es hier (und in vielen ähnlichen Situationen), dass die Vorausssetzungen nur ab einem gewissen Index gelten. Das Beispiel der positiven Nullfolge $(1/n)_n$ belegt, dass im Grenzwert *strikte* Ungleichungen verloren gehen können.

Satz 2.10. *Es seien $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, (a_n), (b_n) und (c_n) reelle Folgen und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Wenn $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$, dann folgt $a \le b$.

b) Wenn $a = b$ und $a_n \le c_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_1$, dann konvergiert (c_n) gegen a. (Sandwichlemma)

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $N_\varepsilon := \max\{N_{\varepsilon,a}, N_{\varepsilon,b}, n_0, n_1\}$ für $N_{\varepsilon,a}$ und $N_{\varepsilon,b}$ aus (2.5). Sei $n \ge N_\varepsilon$.

a) Mittels der Ungleichung $a_n - b_n \le 0$, Satz 1.6b) und (2.5) berechnen wir

$$a - b = a - a_n + a_n - b_n + b_n - b \le |a - a_n| + |b_n - b| \le 2\varepsilon.$$

Satz 1.20 impliziert nun $a - b \le 0$, also $a \le b$.

b) Auf die gleiche Weise liefert die Voraussetzung in b), dass

$$|c_n - a| = \left.\begin{cases} c_n - a \le b_n - a \le |b_n - a|, & c_n \ge a, \\ a - c_n \le a - a_n \le |a - a_n|, & c_n < a, \end{cases}\right\} \le \varepsilon. \qquad \square$$

Beispiel 2.11. a) Sei $a_n = \frac{\sqrt[3]{1+n}}{\sqrt{2+n}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert (a_n) gegen 0.

Beweis. Wir schätzen den Bruch nach oben ab und erhalten

$$0 \le a_n \le \frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n}} = \sqrt[3]{2}\, n^{-\frac{1}{6}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die rechte Seite ist eine Nullfolge nach Beispiel 2.3 und Satz 2.7, sodass die Behauptung aus Satz 2.10b) folgt. $\square$

b) Sei $x \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt $a_n = x^{\frac{1}{n}} \to 1$ für $n \to \infty$.

Beweis. Sei zuerst $x \ge 1$. Nach Satz 1.26 gilt dann $a_n \ge 1$ und Satz 1.8 liefert

$$x = a_n^n = (1 + (a_n - 1))^n \ge 1 + n(a_n - 1).$$

Daraus ergeben sich die Ungleichungen $0 \le a_n - 1 \le (x-1)/n$, die nach Satz 2.10b) die Behauptung implizieren. Wenn $x \in (0,1)$, dann ist $1/x > 1$ und wir erhalten $a_n^{-1} = (1/x)^{\frac{1}{n}} \to 1$ für $n \to \infty$. Hieraus folgt dann mit Satz 2.7 die Aussage. $\square$

2.2. Monotone Folgen

In diesem Abschnitt diskutieren wir eine Klasse von Folgen, für die man sehr einfach Konvergenz nachweisen kann.

Definition 2.12. *Es sei $(a_n)_{n\ge 1}$ eine reelle Folge.*

a) (a_n) ist wachsend (strikt wachsend), *wenn $a_{n+1} \ge a_n$ ($a_{n+1} > a_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

b) (a_n) ist fallend (strikt fallend), *wenn $a_{n+1} \le a_n$ ($a_{n+1} < a_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

c) (a_n) *ist* (strikt) monoton, *wenn sie (strikt) wachsend oder (strikt) fallend ist.*

Diese Definition impliziert, dass eine Folge (a_n) genau dann (strikt) fallend ist, wenn $(-a_n)$ (strikt) wachsend ist.

Beispiel 2.13. a) Sei $p \in \mathbb{Q}_+$. Dann ist die Folge $(n^{-p})_{n\ge 1}$ strikt fallend, da $(n+1)^{-p} < n^{-p}$ nach Satz 1.26 gilt.

b) Die Folge $(a_n)_{n\ge 1}$ mit

$$a_n = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big)$$

ist ähnlich wie in a) strikt wachsend.

c) Die Folge $((-1)^n)_{n\ge 1}$ ist nicht monoton, da $a_{2n+1} = -1 < 1 = a_{2n}$ und $a_{2n} = 1 > -1 = a_{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. $\Diamond$

Es folgt unser erster Satz, der Konvergenz aus einfacher nachzuweisenden Eigenschaften schließt.

Theorem 2.14 (Konvergenzsatz für monotone Folgen). *Es sei $(a_n)_{n\ge 1}$ eine reelle Folge. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Sei (a_n) wachsend und nach oben beschränkt. Dann existiert $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\ge 1} a_n := \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

b) Sei (a_n) fallend und nach unten beschränkt. Dann existiert $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\ge 1} a_n := \inf\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. a) Aufgrund der Beschränktheitsannahme gibt es die reelle Zahl $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Satz 1.18 liefert einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \le a$. Da (a_n) wächst und a das Supremum ist, erhalten wir

$$a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \le a_n \le a$$

und somit $|a_n - a| \le \varepsilon$ für alle $n \ge N_\varepsilon$. Also ist a) gezeigt.

b) Nach Teil a) für $(-a_n)$ und Bemerkung 1.15 existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} -a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} -a_n = -\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n,$$

woraus mit Satz 2.7 auch Behauptung b) folgt. $\square$

Man beachte, dass die beschränkte und nicht monotone Folge $((-1)^n)_n$ sowie die strikt monotone und unbeschränkte Folge $(n)_n$ beide divergieren. Die nächsten beiden Beispiele werden später wieder aufgegriffen werden. In ihnen folgern wir aus dem obigen Theorem recht erstaunliche Resultate.

Beispiel 2.15 (Heron Verfahren). Für ein gegebenes $x > 0$ definiert man rekursiv $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$. Dann folgt $a_n \to \sqrt{x}$ für $n \to \infty$.

Beweis. 1) Zunächst zeigen wir induktiv, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (und somit die Folge überhaupt definiert ist). Für $n = 1$ ist dies klar. Wenn $a_n > 0$ gilt, so folgt die Positivität des Nachfolgers a_{n+1} direkt aus seiner Definition.

2) Wir zeigen als nächstes die Konvergenz von (a_n) mittels Theorem 2.14. Für $n \in \mathbb{N}$ liefert die Definition die Gleichungen

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{x}{2a_n} - a_n = \frac{1}{2a_n}(x - a_n^2)$$

Nach 1) ist $\frac{1}{2a_n}$ positiv. Für $n \geq 2$ berechnen wir weiter

$$a_n^2 - x = \frac{1}{4}\Big[a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}\Big]^2 - x = \frac{1}{4}\Big[a_{n-1}^2 + 2x + \frac{x^2}{a_{n-1}^2} - 4x\Big] = \frac{1}{4}\Big[a_{n-1} - \frac{x}{a_{n-1}}\Big]^2 \geq 0.$$

Somit fällt (a_n) und erfüllt $a_n \geq \sqrt{x}$ (nach Satz 1.26) für alle $n \geq 2$. Theorem 2.14 und Satz 2.10 zeigen nun, dass (a_n) gegen eine Zahl $a \geq \sqrt{x} > 0$ für $n \to \infty$ strebt.

3) Wir nutzen die Konvergenz aus 2) nun aus, um den Grenzwert zu berechnen. Wenn wir Bemerkung 2.6c) und Satz 2.7 auf die Definition von a_n anwenden, erhalten wir

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{x}{a_n}\Big) = \frac{1}{2}\Big(a + \frac{x}{a}\Big).$$

Aus dieser Gleichung folgt $x = a^2$ und damit die Behauptung. □

Beispiel 2.16 (Eulersche Zahl). Wir setzen $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ und $b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: \mathrm{e}$ $(\approx 2,71828)$.

Beweis. 1) Wir zeigen zuerst, dass (a_n) wächst. Mittels der Definition und Satz 1.8 erhalten wir die untere Abschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)\frac{\big(1 + \frac{1}{n+1}\big)^n}{\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n} = \frac{n+2}{n+1}\,\frac{\big(\frac{n+2}{n+1}\big)^n}{\big(\frac{n+1}{n}\big)^n} = \frac{n+2}{n+1}\Big(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\Big)^n \\
&= \frac{n+2}{n+1}\Big(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\Big)^n \geq \frac{n+2}{n+1}\Big(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\Big) = \frac{n+2}{n+1}\,\frac{(n+1)^2 - n}{(n+1)^2} \\
&= \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} > 1
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei am Ende auch der binomische Satz aus Beispiel 0.3 einging.

2) Aufgrund ihrer Definition wächst auch die Folge (b_n). Wir beweisen nun die Ungleichungen $a_n \leq b_n \leq 3$. Zunächst bemerken wir, dass $j! \geq 2^{j-1}$ für $j \in \mathbb{N}$ gilt.

Damit und mit den Beispielen 0.3 und 0.2 berechnen wir

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j} = 1+\sum_{j=1}^{n}\frac{n!}{(n-j)!\,j!\,n^j}\\
&= 1+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-j+1}{n} \le 1+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!} = b_n\\
&\le 1+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^{j-1}} = 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = 1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < 3
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

3) Die ersten beiden Teile kombiniert mit Theorem 2.14 und Satz 2.10 implizieren, dass (a_n) und (b_n) jeweils Grenzwerte a und b haben und dass $a \le b$ gilt. Um die verbleibende Ungleichung $a \ge b$ nachzuweisen, gehen wir von der zweiten Zeile in der abgesetzten Rechnung in 2) aus. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $n \ge m$. Dann folgt

$$a_n \ge 1+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{j-1}{n}\right) =: c_{nm}.$$

Für festes m liefern hier die Sätze 2.7 und 2.10 im Grenzwert $n \to \infty$ die Aussage

$$a \ge \lim_{n\to\infty} c_{nm} = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j!} = b_m.$$

Für $m \to \infty$ ergibt sich nun die gewünschte Relation $a \ge b$. □

2.3. Teilfolgen und Vollständigkeit

Die Folge $((-1)^n)_=(-1,1,-1,1,\dots)$ divergiert zwar, hat aber doch konvergente "Anteile". Der folgenden beiden Definitionen dienen dazu, dies präzise zu fassen.

Definition 2.17. *Es seien $(a_n)_{n\ge1}$ eine Folge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine* strikt wachsende Abbildung *(d.h., $\varphi(j+1) > \varphi(j)$ für jedes $j \in \mathbb{N}$). Setze $b_j = a_{\varphi(j)}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann heißt $(b_j)_{j\ge1}$* Teilfolge *von $(a_n)_{n\ge1}$. Man schreibt meist $(a_{n_j})_{j\ge1}$ statt $(b_j)_{j\ge1}$.*

Eine Teilfolge entsteht also aus einer gegebenen Folge durch Weglassen von Folgengliedern, wobei aber unendlich viele Gleider übrig bleiben müssen. Jede Folge ist eine Teilfolge von sich selbst (wähle $\varphi(j) = j$). Für $a_n = (-1)^n$ und $\varphi(j) = 2j$ für $j \in \mathbb{N}$ erhält man die (konstante) Teilfolge $(b_j) = (a_{2j})_j = (1,1,1,\dots)$.

Wenn $a_n \to a$ für $n \to \infty$, dann konvergiert jede Teilfolge $(a_{n_j})_j$ von $(a_n)_n$ auch gegen a für $j \to \infty$. Um das einzusehen, sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir haben den Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aus (2.1). Dann existiert eine natürliche Zahl J_ε mit $n_j \ge N_\varepsilon$ und folglich $|a_{n_j} - a| \le \varepsilon$ für alle $j \ge J_\varepsilon$.

Definition 2.18. *Sei $(a_n)_{n\ge1}$ eine Folge. Eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ heißt* Häufungspunkt *von (a_n), wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele a_n mit $|a_n - a| \le \varepsilon$ gibt.*

Die durch $a_n = n$ gegebene Folge hat keinen Häufungspunkt, da nur a_n selbst in z.B. $\overline{B}(a_n, 1/2)$ liegt. Für $(a_n) = ((-1)^n)$ erhalten wir die Häufungspunkte -1 und 1, da für jedes $\varepsilon > 0$ alle geraden Folgenglieder in $\overline{B}(1, \varepsilon)$ und alle ungeraden in $\overline{B}(-1, \varepsilon)$ liegen. Durch den nächsten Satz werden die beiden obigen Begriffe direkt miteinander verknüpft.

Satz 2.19. *Eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ ist genau dann der Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_j})_{j\geq 1}$ gibt, die gegen a konvergiert.*

Beweis. 1) Sei a ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Wir definieren rekursiv eine Teilfolge $(a_{n_j})_j$ mit $|a - a_{n_j}| \leq 1/j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dazu verwenden wir die Aussage

$$A(j): \quad \exists\, n_1 < n_2 < \cdots < n_j \ \text{ in } \mathbb{N} \ \text{ mit } \ |a - a_{n_l}| \leq 1/l \ \text{ für alle } l \in \{1, 2, \ldots, j\}$$

Nach Voraussetzung (mit $\varepsilon = 1$) gilt $A(1)$. Es gelte $A(j)$ für ein $j \in \mathbb{N}$. Da a ein Häufungspunkt ist, existieren unendlich viele a_n in $\overline{B}(a, 1/(j+1))$. Somit finden wir einen Index $n_{j+1} > n_j$ mit $|a - a_{n_{j+1}}| \leq 1/(j+1)$. Also ist $A(j+1)$ gezeigt. Per Induktion erhalten wir somit eine Teilfolge $(a_{n_j})_j$ mit $|a - a_{n_j}| \leq 1/j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.10 konvergiert dann $(a_{n_j})_j$ gegen a für $j \to \infty$.

2) Es gelte $a_{n_j} \to a$ für $j \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es einen Index $J_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|a - a_{n_j}| \leq \varepsilon$ für alle $j \geq J_\varepsilon$ gilt. Nach Satz 1.23 und den Anmerkungen davor sind $\{j \,|\, j \geq J_\varepsilon\}$ und damit die gleichmächtige Menge $\{n_j \,|\, j \geq J_\varepsilon\}$ unendlich. (Betrachte die Bijektion $j \mapsto n_j$.) □

Korollar 2.20. *Wenn die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ den Grenzwert a besitzt, dann ist a ihr einziger Häufungspunkt.*

Beweis. Nach Satz 2.19 ist a ein Häufungspunkt. Sei $b \in \mathbb{C}$ ein weiterer. Dann existiert gemäß Satz 2.19 eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit Grenzwert b. Es gilt aber auch $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$. Satz 2.4 impliziert nun die Gleichheit von a und b. □

Das nächste Lemma kann dazu dienen, in Beispielen die Existenz weiterer Häufungspunkte auszuschließen.

Lemma 2.21. *Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit den Häufungspunkten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ und zugehörigen Teilfolgen mit $a_{\varphi_k(j)} \to \alpha_k$ für $j \to \infty$ und $k \in \{1, \ldots, m\}$. Wenn jedes Folgenglied a_n in (mindestens) einer dieser Teilfolgen liegt, dann hat (a_n) keinen weiteren Häufungspunkt.*

Beweis. Wir nehmen an, (a_n) besäße einen weiteren Häufungspunkt $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Nach Satz 2.19 gibt es dann eine Teilfolge $(a_{n_l})_l$ mit Grenzwert α. Setze $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\min\{|\alpha - \alpha_1|, \ldots, |\alpha - \alpha_m|\} > 0$. Nach Voraussetzung liegen unendlich viele der a_{n_l} in einer Teilfolge $(a_{\varphi_k(j)})_j$. Somit konvergiert eine Teilteilfolge $(a_{n_{l_i}})_i$ gegen α_k. Andererseits gibt es einen Index $L \in \mathbb{N}$ so, dass $|\alpha - a_{n_l}| \leq \varepsilon_0$ für alle $l \geq L$ gilt. Für das obige k und alle $l \geq L$ erhalten wir

$$|\alpha_k - a_{n_l}| = |\alpha_k - \alpha + \alpha - a_{n_l}| \geq |\alpha_k - \alpha| - |\alpha - a_{n_l}| \geq 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0,$$

was der Konvergenz von $(a_{n_{l_i}})_i$ widerspricht. □

Beispiel 2.22. Die durch

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{n}, & n \text{ gerade}, \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\dfrac{2n^2+3}{3n^2-1}, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

gegebene Folge hat genau die Häufungspunkte $-\frac{2}{3}$, 0 und $\frac{2}{3}$.

Beweis. Wir setzen

$$b_j = a_{2j} = \frac{(-1)^j}{2j}, \quad c_j = a_{4j+1} = -\frac{2(4j+1)^2+3}{3(4j+1)^2-1}, \quad d_j = a_{4j+3} = +\frac{2(4j+3)^2+3}{3(4j+3)^2-1}.$$

für $j \in \mathbb{N}$. Es gelten $b_j \to 0$ (da $|b_j| = \frac{1}{2j}$), $c_j \to -2/3$ und $d_j \to 2/3$ für $j \to \infty$ (vgl. Beispiel 2.8). Da jedes a_n in (genau) einer dieser Teilfolgen vorkommt, gibt es nach Lemma 2.21 keine weiteren Häufungspunkte. □

Wir diskutieren nun, wie man den größten und kleinsten Häufungspunkt einer reellen Folge beschreibt. Es sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge. Wir setzen $A_n := \{a_j \,|\, j \geq n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da A_n beschränkt ist, liefern Definition 1.17 und Bemerkung 1.15 die Ungleichung

$$b_n := \sup A_n \geq \inf A_n =: c_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $A_{n+1} \subseteq A_n$, folgen aus Bemerkung 1.15 und der obigen Ungleichung die Abschätzungen

$$b_1 \geq b_n \geq b_{n+1} \geq c_{n+1} \geq c_n \geq c_1 \tag{2.6}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Gemäß Theorem 2.14 existieren somit der *Limes superior*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{j\geq n} a_j = \inf_{n\geq 1} \sup_{j\geq n} a_j = \lim_{n\to\infty} b_n \tag{2.7}$$

und der *Limes inferior*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{j\geq n} a_j = \sup_{n\geq 1} \inf_{j\geq n} a_j = \lim_{n\to\infty} c_n. \tag{2.8}$$

Aus (2.6) und Satz 2.10 erhalten wir dabei die Relation

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n. \tag{2.9}$$

Das folgende Theorem ist eines der wichtigsten Resultate dieser Vorlesung. Aus der recht schwachen Voraussetzung der Beschränktheit wird hier die Konvergenz zumindest einer Teilfolge gewonnen. (Die Beispiele $((-1)^n)_n$ und $(n)_n$ zeigen zum einen, dass nicht die ganze Folge konvergieren muss, und zum anderen, dass die Beschränktheit benötigt wird.) Wir werden den Hauptsatz oft in zentralen Beweisteilen benötigen. Varianten des Theorems sind ein wesentliches Instrument auch in der aktuellen angewandten Analysis (aber das ist Stoff des Masterstudiums).

Theorem 2.23 (Bolzano–Weierstraß). *a) Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ hat eine konvergente Teilfolge und damit einen Häufungspunkt.*

b) Wenn die Folge (a_n) auch reell ist, dann ist $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ das Maximum und $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ das Minimum aller Häufungspunkte von (a_n).

Beweis. b) Sei (a_n) reell und beschränkt. Setze $L = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Wir definieren nun rekursiv eine Teilfolge von (a_n), die gegen L konvergiert. Zunächst existiert nach (2.7) ein Index $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|L - b_{N_1}| \leq 1/2$. Da $b_{N_1} = \sup\{a_j \,|\, j \geq N_1\}$, liefert Satz 1.18 eine natürliche Zahl $n_1 \geq N_1$ mit $|b_{N_1} - a_{n_1}| \leq 1/2$. Zusammen folgt die Abschätzung

$$|L - a_{n_1}| = |L - b_{N_1} + b_{N_1} - a_{n_1}| \leq |L - b_{N_1}| + |b_{N_1} - a_{n_1}| \leq 1.$$

Es seien nun Zahlen $n_1 < n_2 < \cdots < n_{j-1}$ in $\mathbb{N}$ so gefunden, dass $|L - a_{n_l}| \leq 1/l$ für alle $l \in \{1, 2, \ldots, n_{j-1}\}$ gilt. Wegen $b_n \to L$, gibt es einen Index $N_j > n_{j-1}$ mit $|L - b_{N_j}| \leq \frac{1}{2j}$. Aus Satz 1.18 erhalten wir ferner eine natürliche Zahl $n_j \geq N_j > n_{j-1}$ mit $|b_{N_j} - a_{n_j}| \leq \frac{1}{2j}$. Wie oben ergibt sich daraus die Ungleichung $|L - a_{n_j}| \leq 1/j$. Per Induktion (und Satz 2.10) gewinnen wir so eine Teilfolge mit $a_{n_j} \to L$ für $j \to \infty$. Entsprechend findet man eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$, die gegen $\ell = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ strebt. Nach Satz 2.19 sind also L und ℓ Häufungspunkte von (a_n).

Sei schließlich $(a_{n_m})_m$ eine weitere Teilfolge mit Häufungspunkt α. Die Formeln (2.7) und (2.8) implizieren dann $c_{n_m} \to \ell$ und $b_{n_m} \to L$ für $m \to \infty$, wobei

$$c_{n_m} = \inf\{a_n \,|\, n \geq n_m\} \leq a_{n_m} \leq \sup\{a_n \,|\, n \geq n_m\} = b_{n_m}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Mit Satz 2.10 folgt $\ell \leq \alpha \leq L$, wie in b) behauptet.

a) Sei (a_n) beschränkt. Dann ist $(x_n) := (\operatorname{Re} a_n)$ eine beschränkte reelle Folge und besitzt somit nach b) eine konvergente Teilfolge $x_{n_l} \to x$ für $l \to \infty$. Genauso ist $(y_{n_l})_l := (\operatorname{Im} a_{n_l})_l$ reell und beschränkt, sodass nach b) eine Teilfolge $(y_{n_{l_j}})_j$ mit Grenzwert y existiert. Satz 2.9 zeigt nun, dass $a_{n_{l_j}} \to x + iy$ für $j \to \infty$. □

In Beispiel 2.22 gelten folglich $-\frac{2}{3} = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ und $\frac{2}{3} = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Wenn man den Satz von Bolzano–Weierstraß anwendet, muss man zu Teilfolgen übergehen. Die folgende Aussage zeigt, wie man trotzdem Informationen über die gesamte Folge gewinnen kann.

Korollar 2.24. *Sei (a_n) eine beschränkte Folge.*

a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

i) (a_n) konvergiert.

ii) (a_n) hat genau einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{C}$.

iii) Es gibt ein $b \in \mathbb{C}$ derart, dass jede Teilfolge von (a_n) eine Teilfolge mit Grenzwert b besitzt.

In diesem Fall gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a = b$.

b) Sei (a_n) reell. Genau dann konvergiert (a_n), wenn ihr Limes superior und Limes inferior übereinstimmen. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

Beweis. Es sei (a_n) beschränkt.

a) Es gelte i). Die Aussage ii) und die Gleichung $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgen dann aus Korollar 2.20.

Es gelte ii). Sei $(a_{n_l})_l$ eine Teilfolge von (a_n). Da auch $(a_{n_l})_l$ beschränkt ist, liefert Theorem 2.23 eine Teilteilfolge $(a_{n_{l_j}})_j$ mit einem Grenzwert $\alpha \in \mathbb{C}$. Nach Satz 2.19 ist α ein Häufungspunkt von (a_n) und somit nach ii) gleich der Zahl a. Also gilt iii) mit $b := a$.

Es gelte iii). Wie nehmen an, (a_n) konvergierte nicht gegen b. Nach (2.2) existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ so, dass es für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen Index $n_m \geq m$ mit $|a_{n_m} - b| > \varepsilon_0$ gibt. Wir wählen nun iterativ $m_1 = 1$ und $m_{l+1} = n_{m_l} + 1$ für $l \in \mathbb{N}$. Es folgt also $n_{m_{l+1}} > n_{m_l}$. Dann setzen wir abkürzend $n_l := n_{m_l}$. So erhalten wir eine Teilfolge $(a_{n_l})_l$ mit $|a_{n_l} - b| > \varepsilon_0$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Gemäß iii) gibt es aber eine Teilteilfolge $(a_{n_{l_j}})_j$, die gegen b konvergiert. Dieser Widerspruch impliziert i).

Damit sind die Aussagen i), ii) und iii) äquivalent und die in a) behaupteten Gleichungen sind gezeigt.

b) Nach a) konvergiert (a_n) genau dann, wenn sie genau einen Häufungspunkt hat. Da (a_n) reell ist, bedeutet dies nach Theorem 2.23b), dass Limes superior und inferior (als Maximum und Minimum der Häufungspunkte) übereinstimmen. $\square$

Man kann in dieser Folgerung nicht auf die Beschränktheit der Folge verzichten, wie das divergente Beispiel

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ gerade}, \\ 1, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

mit genau einem Häufungspunkt zeigt.

Mit dem folgenden Begriff will man Konvergenz ohne Rückgriff auf einen Grenzwert erfassen. Dies ist nötig, wenn man (wie im nächsten Kapitel) ein noch *unbekanntes* Objekt als Limes einer Folge definieren will.

Definition 2.25. *Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt* Cauchyfolge, *wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ so ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, dass $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N_\varepsilon$ gilt; also wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \geq N_\varepsilon : \quad |a_n - a_m| \leq \varepsilon. \tag{2.10}$$

Bei einer Cauchyfolge sind also für jedes $\varepsilon > 0$ alle Folgenglieder bis auf endlich viele nur höchstens ε voneinander entfernt.

Theorem 2.26. *Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist. (Man nennt deswegen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$* vollständig.*)*

Beweis. 1) Es konvergiere (a_n) gegen a. Für $\varepsilon > 0$ finden wir also einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt für alle $n, m \geq N_\varepsilon$ die Ungleichung

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq 2\varepsilon,$$

sodass (a_n) eine Cauchyfolge ist (vgl. Bemerkung 2.6).

2) Sei (a_n) eine Cauchyfolge. Aus (2.10) mit $\varepsilon = 1$ erhalten wir eine natürliche Zahl N mit $|a_n - a_N| \leq 1$ für alle $n \geq N$. Somit gilt $|a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + |a_N|$ für diese n und es folgt $|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da somit (a_n) beschränkt ist, liefert Theorem 2.23 eine Teilfolge $(a_{n_j})_j$ mit Grenzwert a. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt dann einen Index $J_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_j} - a| \leq \varepsilon$ für alle $j \geq J_\varepsilon$. Sei weiter N_ε durch (2.10) gegeben. Sei $n \geq N_\varepsilon$. Wir wählen ein festes $j \geq J_\varepsilon$ mit $n_j \geq N_\varepsilon$. Mittels (2.10) und der Konvergenzaussage für a_{n_j}, schätzen wir nun

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_j} + a_{n_j} - a| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - a| \leq 2\varepsilon$$

ab. Also konvergiert (a_n) gegen a. □

Folglich haben Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die gleichen Eigenschaften wie konvergente Folgen. Die Folge $(\sqrt{n})_n$ erfüllt (2.10) mit $m = n + 1$ (da nach einer Übung $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt), ist aber keine Cauchyfolge (weil sie divergiert). Die Folge (a_n) in Beispiel 2.15 ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, deren Grenzwert $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegt (vgl. Beispiel 1.16). Aus diesem Grunde ist es wenig sinnvoll, in $\mathbb{Q}$ Analysis zu betreiben. Hingegen zeigt das obige Theorem, dass die reellen und komplexen Zahlen für die Analysis geeignet sind.

Wir fügen einige Rechenregeln zum Limes superior und inferior und für Supremum und Infimum hinzu. Das erste Lemma zeigt, dass alle Folgenglieder bis auf endlich viele durch lim sup und lim inf mit einem ε-Fehler beschränkt sind.

Lemma 2.27. *Seien (a_n) eine beschränkte reelle Folge und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein Index $J_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass*

$$-\varepsilon + \varliminf_{n\to\infty} a_n \leq a_j \leq \varepsilon + \varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

für alle $j \geq J_\varepsilon$ gilt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 1.18 und (2.7) gibt einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{j\geq n} a_j \geq -\varepsilon + \sup_{j\geq N_\varepsilon} a_j \geq -\varepsilon + a_k,$$

also $a_k \leq \varepsilon + \varlimsup_{n\to\infty} a_n$, für alle $k \geq N_\varepsilon$. Ebenso findet man eine natürliche Zahl M_ε mit $a_k \geq -\varepsilon + \varliminf_{n\to\infty} a_n$ für alle $k \geq M_\varepsilon$. Die Behauptung folgt nun mit $J_\varepsilon := \max\{M_\varepsilon, N_\varepsilon\}$. □

Satz 2.28. *Es seien (a_n) und (b_n) reelle beschränkte Folgen. Dann erhalten wir die folgenden Aussagen.*

a) $\varliminf_{n\to\infty} a_n = -\varlimsup_{n\to\infty}(-a_n)$.

b) Sei $a_n \le b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*. Dann gelten* $\varliminf_{n\to\infty} a_n \le \varliminf_{n\to\infty} b_n$, $\varlimsup_{n\to\infty} a_n \le \varlimsup_{n\to\infty} b_n$.

c) $\varlimsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n$, $\varliminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \ge \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n$.

d) Sei $a_n, b_n \ge 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*. Dann gelten* $\varlimsup_{n\to\infty}(a_nb_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} b_n$ *und* $\varliminf_{n\to\infty}(a_nb_n) \ge \varliminf_{n\to\infty} a_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} b_n$.

e) Es konvergiere (a_n) *oder* (b_n)*. Dann gelten c) und d) mit Gleichheit.*

Beweis. a) Aus (2.8), Bemerkung 1.15 und (2.7) folgt

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\ge 1}\inf_{j\ge n} a_j = \sup_{n\ge 1}\Big(-\sup_{j\ge n}(-a_j)\Big) = -\inf_{n\ge 1}\sup_{j\ge n}(-a_j) = -\varlimsup_{n\to\infty}(-a_n).$$

b) Sei $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sup_{j\ge n} b_j$ eine obere Schranke für $(a_j)_{j\ge n}$ und somit gilt $\sup_{j\ge n} a_j \le \sup_{j\ge n} b_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen (2.7) folgt daraus auf die gleiche Weise die erste Behauptung $\varlimsup_{n\to\infty} a_n \le \varlimsup_{n\to\infty} b_n$. Da $-b_n \le -a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, liefern Teil a) und die Ungleichung für den Limes superior, dass

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = -\varlimsup_{n\to\infty}(-a_n) \le -\varlimsup_{n\to\infty}(-b_n) = \varliminf_{n\to\infty} b_n.$$

c) Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 2.27 existieren Indizes $J_\varepsilon^a, J_\varepsilon^b \in \mathbb{N}$ mit

$$a_j \le \varepsilon + \varlimsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{für alle } \ j \ge J_\varepsilon^a, \qquad b_j \le \varepsilon + \varlimsup_{n\to\infty} b_n \quad \text{für alle } \ j \ge J_\varepsilon^b. \tag{2.11}$$

Sei $J_\varepsilon = \max\{J_\varepsilon^a, J_\varepsilon^b\}$. Die Summe der rechten Seiten in (2.11) ist eine obere Schranke der Summe der linken Seiten für $j \ge J_\varepsilon$. Diese Beobachtung und (2.7) liefern die Ungleichungen

$$\varlimsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \sup_{j\ge J_\varepsilon}(a_j + b_j) \le 2\varepsilon + \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die erste Behauptung in c). Die zweite zeigt man wie in b) mittels Teil a).

d) Sei $\varepsilon \in (0,1]$. Wir verwenden (2.11) und J_ε aus c). Wie oben ergibt sich

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} a_nb_n \le \sup_{j\ge J_\varepsilon} a_jb_j &\le \Big(\varepsilon + \varlimsup_{n\to\infty} a_n\Big)\Big(\varepsilon + \varlimsup_{n\to\infty} b_n\Big)\\ &\le \varepsilon\Big(1 + \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n\Big) + \varlimsup_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

Hierbei nutzen wir aus, dass die Folgenglieder nichtnegativ sind. Wir erhalten die erste Behauptung, da $\varepsilon \in (0,1]$ beliebig ist. Die zweite zeigt man ähnlich. Dabei wählt man $0 < \varepsilon < \min\{\varliminf_{n\to\infty} a_n, \varliminf_{n\to\infty} b_n\}$ für das Analogon von (2.11), wenn dieses Minimum positiv ist. Falls etwa $\varliminf_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt, ist Behauptung klar.

e) Wir betrachten exemplarisch den ersten Teil in c) und nehmen an, dass (a_n) den Grenzwert a besitzt. Nach Theorem 2.23 und Satz 2.19 gibt es eine Teilfolge mit $b_{n_j} \to b := \varlimsup_{n\to\infty} b_n$ für $j \to \infty$. Somit konvergieren $a_{n_j} + b_{n_j}$ gegen $a + b$. Da

$\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ nach Theorem 2.23 der größte Häufungspunkt der Folge (a_n+b_n) ist, folgt $a+b \le \overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ und daraus mit c) die behauptete Gleichheit. $\square$

Das Beispiel $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ mit $a_n + b_n = 0$ zeigt, dass z.B. in Satz 2.28c) strikte Ungleichungen gelten können.[1]

Um analoge Rechenregeln für das Supremum und das Infimum zu formulieren (siehe auch Bemerkung 1.15), benötigen wir einige Definitionen. Für nichtleere Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ setzt man

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, a \in A, \exists\, b \in B \text{ mit } \; x = a + b\},$$
$$A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, a \in A, \exists\, b \in B \text{ mit } \; x = ab\}.$$

Speziell schreibt man $a + B$ und $a \cdot B$, wenn $A = \{a\}$.

Satz 2.29. *Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer.*

a) Seien A und B nach oben beschränkt. Dann ist auch $A + B$ nach oben beschränkt und es gilt $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$. Wenn zusätzlich $A, B \subseteq [0,\infty)$, dann ist $A \cdot B$ nach oben beschränkt und wir erhalten $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

b) Seien A und B nach unten beschränkt. Dann ist $A+B$ nach unten beschränkt und es gilt $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$. Wenn zusätzlich $A, B \subseteq [0,\infty)$, dann ist $A \cdot B$ nach unten beschränkt und wir erhalten $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$.

Beweis. Für alle $a \in A$ und $b \in B$ gelten $a \le \sup A$ und $b \le \sup B$. Also ist $\sup A + \sup B$ eine obere Schranke für $A + B$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 1.18 gibt es Elemente a_ε von A und b_ε von B so, dass $a_\varepsilon > -\varepsilon + \sup A$ und $b_\varepsilon > -\varepsilon + \sup B$ gelten. Dann liegt $a_\varepsilon + b_\varepsilon$ in $A + B$ und erfüllt $a_\varepsilon + b_\varepsilon \ge -2\varepsilon + \sup A + \sup B$. Satz 1.18 impliziert nun die erste Gleichung in a). Für die zweite beachten wir, dass aus $\sup A = 0$ schon $A = \{0\}$ folgt und dann die Behauptung klar ist. Ebenso schließt man für $\sup B = 0$. Andernfalls wählt man $0 < \varepsilon < \min\{\sup A, \sup B\}$ und schließt wie bei "+". Aussage b) zeigt man entsprechend. $\square$

[1] Das nachfolgende Ende des Kapitels wurde nicht in der Vorlesung behandelt.

KAPITEL 3

Reihen

Wir definieren zunächst "unendliche Summen" im Rückgriff auf die Folgenkonvergenz und diskutieren dann verschiedene Anwendungen.

3.1. Konvergenzkriterien

DEFINITION 3.1. *Es seien $(a_k)_{k\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ die n-te* Partialsumme *und die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ heißt* Reihe *mit den Gliedern a_k. Wir schreiben $\sum a_k$, $\sum_k a_k$ oder $\sum_{k\geq 0} a_k$ statt (s_n).*

Die Reihe konvergiert (divergiert)*, wenn die Folge (s_n) konvergiert (divergiert). Wenn Konvergenz vorliegt, bezeichnet man den Grenzwert von (s_n) als* Grenzwert *der Reihe (oder* Reihenwert*), und man schreibt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Entsprechend behandelt man Reihen, die bei $k_0 \in \mathbb{Z}$ statt bei $k_0 = 0$ beginnen. Wir besprechen zuerst einige (z.T. schon bekannte) Beispiele, bei denen man meist die Partialsummen explizit ausrechnen kann.

BEISPIEL 3.2. a) Sei $a_k = \frac{1}{k!}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n!} \quad \text{und nach Beispiel 2.16 existiert} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

b) (Geometrische Reihe) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$ sei $a_k = z^k$. Nach Beispiel 0.2 gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}. \quad \text{Somit existiert nach einer Übung} \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

c) (Teleskopsumme) Es sei $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ für $k \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ liefert die Indexverschiebung $j = k+1$, dass

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Somit konvergiert die Reihe und hat den Grenzwert
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$
d) (Harmonische Reihe) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ divergiert, da $s_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$ für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt, sodass die Partialsummen unbeschränkt sind und nach Satz 2.4 divergieren.

Beweis. Wir zeigen die behauptete untere Abschätzung per Induktion. Für $m = 0$ ist die Behauptung klar. Sie gelte für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt
$$s_{2^{m+1}} = \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{m}{2} + \frac{2^m}{2^{m+1}} = 1 + \frac{m+1}{2}. \qquad \square$$
e) Die Reihe $\sum_{k\geq 0}(-1)^k$ divergiert, da ihre Partialsummen durch die springende Folge
$$s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \begin{cases} 1-1+1-1+\cdots+1-1 = 0, & n \text{ ungerade}, \\ 1-1+1-1+\cdots+1 = 1, & n \text{ gerade}, \end{cases}$$
für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben sind. $\Diamond$

Die Sätze des letzten Kapitels liefern eine Rechenregel und ein erstes Konvergenzkriterium.

Satz 3.3. *Es seien $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ konvergente Reihen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann existiert der Grenzwert*
$$\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$
Beweis. Da für $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung
$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{n} a_k + \beta \sum_{k=0}^{n} b_k$$
gilt, folgt die Aussage aus Satz 2.7. $\square$

Satz 3.4. *Für nichtnegative a_k mit $k \in \mathbb{N}_0$ seien die Partialsummen s_n, $n \in \mathbb{N}_0$, nach oben beschränkt. Dann existiert der Grenzwert*
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} s_n.$$
Beweis. Aufgrund der Voraussetzungen wachsen die Partialsummen
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n+1} a_k = s_{n+1}$$
und sind beschränkt für $n \in \mathbb{N}_0$. Theorem 2.14 impliziert nun die Behauptung. $\square$

Die meisten unserer Konvergenzkriterien beruhen auf der folgenden Charaktersierung.

Satz 3.5 (Cauchykriterium für Reihen). *Eine Reihe* $\sum_k a_k$ *konvergiert genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N_\varepsilon : \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \varepsilon. \tag{3.1}$$

Beweis. Nach Theorem 2.26 und Definition 3.1 konvergiert die Reihe genau dann, wenn (s_n) eine Cauchyfolge ist. Diese Eigenschaft bedeutet wegen

$$s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k \qquad \text{für} \quad n > m \geq 0$$

das Gleiche wie die Formel (3.1). □

Wenn man in (3.1) den Index $n = m + 1$ wählt, erhält man die folgende notwendige Bedingung für Reihenkonvergenz.

Korollar 3.6. *Wenn eine Reihe* $\sum_k a_k$ *konvergiert, dann bilden ihre Summanden* (a_k) *eine Nullfolge.*

Man beachte, dass es sehr wohl divergente Reihen gibt, deren Summanden eine Nullfolge, wie z.B. die harmonische Reihe in Beispiel 3.2d).

Beispiel 3.7. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$. Gemäß Korollar 3.6 konvergiert die Reihe $\sum_{k \geq 0} z^k$ nicht, da hier $|z^k| = |z|^k \geq 1$ ist. ◊

Im nächsten Satz erzwingt die spezielle Gestalt der Reihe ihre Konvergenz.

Satz 3.8 (Leibnizkriterium). *Es seien* $b_k \geq b_{k+1}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $b_k \to 0$ *für* $k \to \infty$. *Dann konvergiert die* (alternierende) *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$.

Beweis. Zunächst beachte man, dass die fallende Nullfolge (b_k) nur nichtnegative haben kann (siehe Theorem 2.14). Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k$. Da (b_k) fällt, gilt die Ungleichung

$$s_{2n+2} - s_{2n} = (-1)^{2n+2} b_{2n+2} + (-1)^{2n+1} b_{2n+1} = b_{2n+2} - b_{2n+1} \leq 0;$$

und damit ist auch (s_{2n}) fallend. Genauso folgt

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = (-1)^{2n+1} b_{2n+1} + (-1)^{2n} b_{2n} = -b_{2n+1} + b_{2n} \geq 0,$$

sodass (s_{2n+1}) wächst. Weil $b_{2n+1} \geq 0$ ist, erhalten wir die Schranken

$$s_1 \leq s_{2n+1} = (-1)^{2n+1} b_{2n+1} + s_{2n} \leq s_{2n} \leq s_0.$$

Somit konvergiert nach Theorem 2.14 die Teilfolge (s_{2n}) gegen eine reelle Zahl s und (s_{2n+1}) gegen ein $t \in \mathbb{R}$. Da (b_k) eine Nullfolge ist, liefern Satz 2.7 und eine Übung die Identität

$$t - s = \lim_{n \to \infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n \to \infty} (-1)^{2n+1} b_{2n} = 0.$$

Wegen Lemma 2.21 hat (s_n) neben $s = t$ keinen weiteren Häufungspunkt, woraus sich mit Korollar 2.24 die Behauptung ergibt. □

Beispiel 3.9. Aus dem Leibnizkriterium Satz 3.8 folgt umittelbar die Konvergenz der Reihe $\sum_{k\geq 1}(-1)^k\frac{1}{k}$. Hingegen divergiert die harmonische Reihe $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}$ nach Beispiel 3.2d). ◊

Die alternierende Reihe im vorherigen Beispiel konvergiert nur aufgrund von Auslöschungseffekten durch die Vorzeichenwechsel. Wir sehen im nächsten Abschnitt, dass solche Reihen sich oft nicht robust unter Manipulationen verhalten. Die folgenden Definition beschreibt eine Klasse konvergenter Reihen mit gegenteiligen Eigenschaften.

Definition 3.10. *Eine Reihe* $\sum_k a_k$ konvergiert absolut, *wenn die Reihe* $\sum_k |a_k|$ *konvergiert.*

Bemerkung 3.11. a) Nach Satz 3.4 konvergiert eine Reihe $\sum_k a_k$ genau dann absolut, wenn die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n |a_k|\right)_n$ beschränkt ist.

b) Beispiel 3.9 beschreibt eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe. Im Falle nichtnegativer Gliedern $a_k \geq 0$ sind diese beiden Begriffe gleichwertig.

c) Die absolute Konvergenz einer Reihe $\sum_k a_k$ impliziert ihre Konvergenz und die "unendliche Dreiecksungleichung"

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Beweis. Die Reihe konvergiere absolut. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 3.5 gibt es einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\varepsilon \geq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \geq \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right|$$

für alle $n > m \geq N_\varepsilon$ gilt, wobei wir auch die Dreiecksungleichung verwendet haben. Satz 3.5 liefert nun die Konvergenz der Reihe. Weiter folgern wir aus Satz 2.9 und der Dreiecksungleichung die gewünschte Abschätzung

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|. \qquad \square$$

Die folgende Aussage bildet die Grundlage für die beiden darauf folgenden Konvergenzkriterien. Majoranten spielen oft eine wichtige Rolle in Grenzwertbetrachtungen, vergleiche Satz 2.10b).

Satz 3.12 (Majorantenkriterium für Reihen). *Gegeben seien Zahlen* a_k *und* b_k *für* $k \in \mathbb{N}_0$. *Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Sei $0 \leq |a_k| \leq b_k$ *für jedes* $k \in \mathbb{N}_0$ *und die Reihe* $\sum_k b_k$ *konvergiere. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_k a_k$ *absolut und es gilt*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

b) Sei $a_k \geq b_k \geq 0$ *und die Reihe* $\sum_k b_k$ *divergiere. Dann divergiert auch* $\sum_k a_k$.

BEWEIS. a) Nach Voraussetzung gilt $\sum_{k=0}^{n} |a_k| \le \sum_{k=0}^{n} b_k \le \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Aus Satz 3.4 folgt dann die absolute Konvergenz von $\sum_k a_k$ und aus Bemerkung 3.11c) die Abschätzung.

b) Teil a) und die Voraussetzung zeigen, dass aus der Konvergenz von $\sum_k a_k$ die von $\sum_k b_k$ folgt. Somit ergibt sich b) per Negation. □

BEISPIEL 3.13. Die Reihe $\sum_{k\ge 1} \frac{1}{k^p}$ konvergiert für $p \ge 2$ und divergiert für $p \le 1$, wobei $p \in \mathbb{Q}$.[1]

BEWEIS. Da $n \le n^2$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt, erhalten wir $n(n+1) \le 2n^2$. Beispiel 3.2c) und Satz 3.12 implizieren also die Konvergenz von $\sum_n \frac{1}{2n^2}$, und nach Satz 3.3 konvergiert auch $\sum_n \frac{1}{n^2}$. Für $p > 2$ haben wir $n^{-p} \le n^{-2}$ für $n \in \mathbb{N}$ (da $n^{2-p} \le 1^{2-p} = 1$ nach Satz 1.26 gilt), sodass Satz 3.12 die Aussage für diese p liefert.

Beispiel 3.2d) zeigt die Divergenz für $p = 1$. Wegen $n^{-1} \le n^{-p}$ für $p < 1$, folgt der Rest der Behauptung aus Satz 3.12. □

Es folgen zwei wichtige Kriterien für absolute Konvergenz, die nur Bedingungen an die Koeffizienten a_k stellen.

SATZ 3.14 (Quotientenkriterium). *Seien $(a_n)_{n\ge 0}$ eine Folge und $n_0 \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $a_n \ne 0$ für $n \ge n_0$ und dass die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\ge n_0}$ beschränkt ist. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Sei $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{n\ge 0} a_n$ absolut.

b) Sei $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. Dann divergiert $\sum_{n\ge 0} a_n$.

BEWEIS. a) Wähle q zwischen $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ und 1. Nach Lemma 2.27 gibt es eine natürliche Zahl $N \ge n_0$ so, dass die Ungleichung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q$ für alle $n \ge N$ gilt. Daraus folgt induktiv

$$|a_{n+1}| \le q\,|a_n| \le q^2\,|a_{n-1}| \le \cdots \le q^{n-N+1}\,|a_N|.$$

Da $\sum q^n$ nach Beispiel 3.2b) konvergiert, liefert Satz 3.12 die erste Behauptung.

b) Wieder mit Lemma 2.27 erhalten wir eine natürliche Zahl $M \ge n_0$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1$ für alle $n \ge M$. Wie in a) folgt dann $|a_{n+1}| \ge |a_n| \ge \cdots \ge |a_M| > 0$, sodass Satz 3.4 die Divergenz der Reihe impliziert. □

BEISPIEL 3.15. a) Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ setze $a_n = \frac{z^n}{n!}$. Dann konvergiert $\sum_{n\ge 0} \frac{z^n}{n!}$ absolut.

BEWEIS. Für $z = 0$ ist die Behauptung klar. Sonst gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z^{n+1}|\,n!}{(n+1)!\,|z^n|} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)\,|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \longrightarrow 0$$

für $n \to \infty$, woraus nach Satz 3.14 die Behauptung folgt. □

[1] Mit (4.6) erhält man die Behauptung auch für reelle p. Die Exponenten $p \in (1,2)$ werden in Beispiel 6.36 mit einem anderen Kriterium behandelt.

b) Für $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$ gelten $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ und $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \to 1$ für $n \to \infty$. Trotzdem divergiert $\sum_n a_n$ und konvergiert $\sum_n b_n$ nach Beispiel 3.13. Also erlaubt das Quotientenkriterium für $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ oder $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ keine allgemeine Aussage. ◊

Satz 3.16 (Wurzelkriterium). *Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge so, dass die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\geq 0} =: (b_n)$ beschränkt ist. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Sei $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Dann konvergiert $\sum_{n\geq 0} a_n$ absolut.

b) Sei $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Dann divergiert $\sum_{n\geq 0} a_n$. Dies gilt auch, wenn (b_n) unbeschränkt ist.

Beweis. a) Wähle q zwischen $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und 1. Lemma 2.27 liefert so einen Index $N \in \mathbb{N}$, dass $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq q$, und damit $|a_n| \leq q^n$, für alle $n \geq N$ gilt. Das Majorantenkriterium Satz 3.12 und Beispiel 3.2b) implizieren a).

b) Nach Voraussetzung (und Theorem 2.23 im ersten Fall) gibt es eine Teilfolge mit $|a_{n_j}|^{\frac{1}{n_j}} \geq 1$, also $|a_{n_j}| \geq 1$, für alle $j \in \mathbb{N}$. Korollar 3.6 zeigt nun b). □

Beispiel 3.17. a) Sei $z \in \mathbb{C}$ gegeben. Die Reihe $\sum_k 2^n z^n$ konvergiert absolut für $|z| < \frac{1}{2}$ und divergiert für $|z| > \frac{1}{2}$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.16 und den Ungleichungen

$$|2^n z^n|^{\frac{1}{n}} = 2\,|z| \begin{cases} < 1, & |z| < \frac{1}{2}, \\ > 1, & |z| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$ □

b) Die Reihen aus Beispiel 3.15b) zeigen auch, dass im Falle von $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ im Allgemeinen keine Konvergenzaussage möglich ist.

c) Wir betrachten

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+(-1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \text{ gerade}, \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$ (verwende Beispiel 2.11), sodass die Reihe $\sum_n a_n$ absolut konvergiert. Für gerade n folgt aber

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2.$$

Somit erlaubt das Quotientenkriterium keine Aussage. (In den Übungen sieht man, dass aus der Anwendbarkeit des Wurzelkriteriums die des Quotientenkriteriums folgt und die beiden dann das gleiche Resultat liefern.) ◊

3.2. Einige Vertiefungen

Wir diskutieren zunächst die *Dezimaldarstellung* der reellen Zahlen.

Beispiel 3.18. Sei $r \in \mathbb{R}$. Nach Satz 1.19 existiert die größte ganze Zahl kleiner gleich r, die wir mit der *Gaußklammer* $[r] := \max\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq r\}$ bezeichnen.

Wir setzen $m := [r]$ und $x := r - m \in [0, 1)$. Da $[0, 1)$ gleich der disjunkten Vereinigung $[0, \frac{1}{10}) \cup \cdots \cup [\frac{9}{10}, \frac{10}{10})$ ist, gibt es genau eine Zahl $x_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ mit $x_1 10^{-1} \leq x < (x_1 + 1)10^{-1}$. Somit liegt $x - x_1 10^{-1}$ in $[0, 1/10)$. Induktiv findet man nun *Ziffern* $x_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ derart, dass

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} x_k 10^{-k} < 10^{-n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{k\geq 1} x_k 10^{-k}$ nach Satz 2.10 und es gilt

$$r - m = x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 10^{-k} \iff r = m + \sum_{k=1}^{\infty} x_k 10^{-k}.$$

Man schreibt nun $r = m, x_1 x_2 x_3 \cdots$. Umgekehrt seien $m \in \mathbb{Z}$ und $x_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ für $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Da $0 \leq x_k 10^{-k} \leq 9 \cdot 10^{-k}$ gilt, liefern Satz 3.12 und Beispiel 3.2b) wieder die Konvergenz der Dezimaldarstellung $r = m, x_1 x_2 x_3 \cdots$. Man beachte, dass die rationale Folge $(m, x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)_n$ gegen r strebt.

Leider ist diese Darstellung nicht immer eindeutig bestimmt. Es gebe dazu so ein $l \in \mathbb{N}$, dass $x_{l-1} < 9$ (soweit $l \geq 2$) und $x_n = 9$ für jedes $n \geq l$ erfüllt sind; d.h., $r = m, x_1 \cdots x_{l-1} 99 \cdots$. Die Beispiele 0.2 und 3.2 liefern dann

$$\begin{aligned}\sum_{k=l}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} &= 9 \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} - 9 \sum_{k=0}^{l-1} 10^{-k} = 9\Big(\frac{1}{1 - 10^{-1}} - \frac{1 - 10^{-l}}{1 - 10^{-1}}\Big) = 9 \frac{10^{-l}}{9/10} \\ &= 10^{-(l-1)}.\end{aligned}$$

Somit gilt auch $r = m, x_1 \cdots x_{l-2}(x_{l-1} + 1)00 \cdots$ für $l \geq 2$ und $r = m + 1, 00 \cdots$ für $l = 1$. In diesem Fall verwendet man für die Darstellung mit den Nullen (und läßt diese dann weg). Mit dieser Vereinbarung hat jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ genau eine solche Dezimaldarstellung. (Siehe Theorem II.7.11 in [**1**] für den Beweis der Eindeutigkeit.) Hierbei kann man leicht die Basis 10 durch jede natürliche Zahl $b \geq 2$ ersetzen. $\Diamond$

Ein zweiter Ausflug ins Unendliche. Wir ergänzen die Definition 1.22 der unendlichen Mengen. Dort haben wir Mengen M und N als gleichmächtig bezeichnet, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt.

Definition 3.19 (Cantor). *Eine Menge heißt* abzählbar unendlich*, wenn sie gleichmächtig zu* $\mathbb{N}$ *ist, und* überabzählbar (unendlich)*, wenn sie unendlich aber nicht abzählbar unendlich ist.*

Beispiel 3.20 (Cantor). a) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich.

Beweis. Wir definieren $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ durch $f(n) = (n-1)/2$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$ und $f(n) = -n/2$ für gerade $n \in \mathbb{N}$. Die Injektivität dieser Abbildung folgt sofort aus ihrer Definition. Sei $m \in \mathbb{Z}$. Für $m \geq 0$ gilt $m = f(2m+1)$. Wenn $m < 0$ ist, dann erhalten wir $m = f(-2m)$. Somit ist f auch surjektiv. □

b) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.

Beweisskizze. Um eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ zu konstruieren, schreibt man

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & -\frac{3}{1} & -\frac{2}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \cdots \\
\cdots & -\frac{3}{2} & -\cancel{\frac{2}{2}} & -\frac{1}{2} & \cancel{\frac{0}{2}} & \frac{1}{2} & \cancel{\frac{2}{2}} & \frac{3}{2} & \cdots \\
\cdots & -\cancel{\frac{3}{3}} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \cancel{\frac{0}{3}} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \cancel{\frac{3}{3}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

wobei man ungekürzte Brüche streicht. Nun setzt man $f(1) = 0/1$, $f(2) = 1/1$, $f(3) = 1/2$, $f(4) = -1/2$, $f(5) = -1/1$, $f(6) = -2/1$, $f(7) = -2/3$, $f(8) = -1/3$ usw., sowie $q_n = f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. So können wir die Brüche als Folge

$$\mathbb{Q} = (0, 1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1, -2, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \cdots) = (q_n)_n$$

schreiben. Nach Beispiel 3.18 ist die Menge der Häufungspunkte von (q_n) gleich $\mathbb{R}$. (Abweichend von der dortigen Vereinbarung, wählt man dabei gegebenenfalls die auf Neunen endende Dezimaldarstellung.) □

c) Die Mengen $(0,1)$ und $\mathbb{R}$ sind überabzählbar.

Beweis. Es ist klar, dass beide Mengen unendlich sind. Wir nehmen an, $(0,1)$ wäre abzählbar unendlich. Dann gibt es eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to (0,1)$. Wir schreiben $x_n = \varphi(n) \in (0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\xi_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ die n-te Ziffer von x_n gemäß Beispiel 3.18. Wir setzen nun

$$\eta_n = \begin{cases} 5, & \xi_n < 5, \\ 4, & \xi_n \geq 5, \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Beispiel 3.18 definiert $y = 0,\eta_1\eta_2\cdots$ eine Zahl in $(0,1)$, die ungleich jedem x_n ist. Dies widerspricht der Surjektivität von φ. Also ist $(0,1)$ überabzählbar. Mit Methoden aus Kapitel 5 sieht man ferner, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to (0,1); \quad f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{1 + 2|x|},$$

bijektiv ist. Daraus folgt dann die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$. □

Umordnung von Reihen und Cauchyprodukte. Wir diskutieren zwei Operationen mit Reihen. Wir zeigen zunächst, dass es im Allgemeinen kein "unendliches Kommutativgesetz" für Reihen gibt.

Beispiel 3.21. Man kann die Summanden $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, der nach Beispiel 3.9 konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ so "umordnen", dass man eine divergente Reihe $\sum_j b_j$ enthält, die aus den gleichen Summanden besteht.

Beweis. Wir definieren rekursiv die neue Reihe $\sum_j b_j$. Zuerst führen wir die Indizes $k_1 = 2$ und $k_{m+1} = k_m + 2^{m-1} + 1$ für $m \in \mathbb{N}$ ein. Wir definieren nun die neuen Reihenglieder mit geraden Nennern durch

$$b_{k_m} = -\frac{1}{2m} = a_{2m} \qquad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Es gelten also $b_2 = -\frac{1}{2}$, $b_4 = -\frac{1}{4}$, $b_7 = -\frac{1}{6}$ usw. Zwischen b_{k_m} und $b_{k_{m+1}}$ liegen 2^{m-1} weitere Glieder b_j. Diese setzen wir sukzessive gleich den a_n mit ungeraden n. Dabei ergeben sich $b_1 = 1$ und

$$b_{k_m+l} = \frac{1}{2^m + 2l - 1} = a_{2^m+2l-1} \qquad \text{für} \quad l \in \{1, 2, \dots 2^{m-1}\}$$

für $m \in \mathbb{N}$. Wegen $k_{m+1} - 1 = k_m + 2^{m-1}$, ist das letzte Glied mit $l = 2^{m-1}$ durch $b_{k_{m+1}-1} = \frac{1}{2^{m+1}-1}$ gegeben. Somit haben wir einerseits die neuen Reihenglieder b_j für alle $j \in \mathbb{N}$ erklärt und zum anderen tritt jedes a_n genau einmal unter den b_j auf. Für $m \geq 2$ erhalten wir nun die untere Schranke

$$B_m := b_{k_m+1} + b_{k_m+2} \dots + b_{k_{m+1}} = \frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+3} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}-1} - \frac{1}{2m+2}$$
$$\geq \frac{2^{m-1}}{2^{m+1}} - \frac{1}{2m+2} \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{j=1}^{k_{M+1}} b_j = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \sum_{m=2}^{M} B_m \geq \frac{M-1}{12}$$

für alle $M \in \mathbb{N}$ mit $M \geq 2$. Also ist die Reihe $\sum_j b_j$ unbeschränkt und damit nach Satz 2.4 divergent. □

Der nächsten Begriff formalisiert das obige Vorgehen.

Definition 3.22. *Es sei $\sum_{n\geq 0} a_n$ eine Reihe und $\phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine bijektive Abbildung. Setze $b_n = a_{\phi(n)}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt $\sum_{n\geq 0} b_n$ eine* Umordnung *von $\sum_{n\geq 0} a_n$.*

Wenn $\phi(k) = k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$ gilt, dann stimmen die Partialsummen s_n^b von $\sum_{k\geq 0} b_k$ und s_n^a von $\sum_{k\geq 0} a_k$ für alle $n \geq N$ überein, sodass das Konvergenzverhalten der beiden Reihen gleich ist. Beispiel 3.21 zeigt, dass dies bei unendlichen Umordnungen im Allgemeinen nicht gilt. Für absolut konvergente Reihen können wir aber ein "unendliches Kommutativgesetz" beweisen.

Satz 3.23. *Die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergiere absolut. Dann konvergiert jede Umordnung $\sum_{n\geq 0} b_n$ von $\sum_{n\geq 0} a_n$ gegen den gleichen Grenzwert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_k |a_k|$ konvergiert, liefert Satz 3.5 ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, n > N_\varepsilon : \qquad \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n} |a_k| \le \varepsilon.$$

(Setze dort $m = N_\varepsilon$.) Mit Satz 2.10 folgt daraus im Limes $n \to \infty$ die Ungleichung

$$\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| \le \varepsilon.$$

Sei nun $\phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Bijektion. Um die in der obigen Abschätzung nicht berücksichtigten a_k zu behandeln, setzen wir $M_\varepsilon = \max\{\phi^{-1}(0), \ldots, \phi^{-1}(N_\varepsilon)\}$. Für jeden Index k gilt $k = \phi(\phi^{-1}(k))$, was für $k \in \{0, 1, \ldots, N_\varepsilon\}$ die Inklusion

$$\{0, 1, \ldots, N_\varepsilon\} \subseteq \{\phi(0), \phi(1), \ldots, \phi(M_\varepsilon)\}$$

nach sich zieht. Seien nun $n \ge N_\varepsilon$ und $m \ge M_\varepsilon$. Wir setzen

$$D_{m,n} = \sum_{k=0}^{m} a_{\phi(k)} - \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

In $D_{m,n}$ kürzen sich die Reihenglieder a_j, die doppelt vorkommen. Somit impliziert die obige Inklusion, dass nur Summanden $\pm a_j$ mit $j \ge N_\varepsilon + 1$ in $D_{m,n}$ übrig bleiben. Zusammen mit der zweiten abgesetzten Ungleichung erhalten wir also

$$|D_{m,n}| \le \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| \le \varepsilon.$$

Sei $m \ge M_\varepsilon$ fest. Da auch $\sum_k a_k$ nach Bemerkung 3.11 konvergiert, existiert der Grenzwert von $|D_{m,n}|$ für $n \to \infty$ gemäß Satz 2.9. Somit liefert Satz 2.10 die Ungleichung

$$\varepsilon \ge \lim_{n\to\infty} |D_{m,n}| = \left| \sum_{k=0}^{m} a_{\phi(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right|$$

für alle $m \ge M_\varepsilon$. Dies ist gerade die Behauptung. □

Für konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen kann beim Umordnen "fast alles" geschehen. Dies ist Gegenstand des Riemannschen Umordnungssatz, siehe etwa Satz 3.54 in [7], den wir nicht behandeln.

Konvergente Reihen kann man z.B. mit Hilfe von Satz 2.7 durch

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = \lim_{n\to\infty} (a_0 + \cdots + a_n)(b_0 + \cdots + b_n) \\ &=: \lim_{n\to\infty} A_n B_n \end{aligned} \tag{3.2}$$

multiplizieren. Hierbei werden die Summanden $a_j b_k$ des Produktes über wachsende Rechtecke mit $j, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ addiert. In wichtigen Fällen ist es aber besser über Dreiecke und entlang den Diagonalen $j+k=m$ zu summieren. Für gegebene a_j und b_k mit $j,k\in\mathbb{N}_0$ definieren wir dazu

$$c_m = \sum_{l=0}^{m} a_l b_{m-l} \qquad \text{für } m\in\mathbb{N}_0. \tag{3.3}$$

Satz 3.24. *Es seien $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ absolut konvergente Reihen und c_m wie in (3.3) gegeben. Dann konvergiert das* Cauchyprodukt *$\sum_m c_m$ absolut und es gilt*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{m=0}^{\infty} c_m = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{m} a_l b_{m-l}\right). \tag{3.4}$$

Beweis. Seien A_n und B_n für $n\in\mathbb{N}_0$ wie in (3.2) gegeben. Weiter setzen wir

$$A_n^* := \sum_{j=0}^{n} |a_j|, \qquad B_n^* := \sum_{k=0}^{n} |b_k|, \qquad C_n := \sum_{m=0}^{n} c_m.$$

Nach Voraussetzung existieren die Grenzwerte

$$A^* := \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \qquad \text{und} \qquad B^* = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|.$$

Wir berechnen

$$|A_nB_n - C_n| = \left| \sum_{\substack{j,k\in\{0,1,\dots,n\}\\ j+k>n}} a_j b_k \right| \le \sum_{\substack{j,k\in\{0,1,\dots,n\}\\ j+k>n}} |a_j|\,|b_k| \le A_n^*B_n^* - A^*_{[\frac{n}{2}]}B^*_{[\frac{n}{2}]}.$$

Nach Satz 2.7 strebt die rechte Seite gegen $A^*B^* - A^*B^* = 0$ für $n\to\infty$. Wegen (3.2) folgt damit (3.4) aus dem Limes

$$\sum_{m=0}^{n} c_m = C_n - A_nB_n + A_nB_n \;\longrightarrow\; \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

für $n\to\infty$. Ferner liefern (3.3) und die obigen Definitionen, dass

$$\sum_{m=0}^{n} |c_m| \le \sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} |a_l|\,|b_{m-l}| \le A_n^*B_n^* \le A^*B^*$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Daraus folgt die geforderte absolute Konvergenz. □

Auch dieser Satz ist für konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen im Allgemeinen falsch, wie in den Übungen besprochen wird. Mit dem Cauchyprodukt gewinnt man leicht die wesentlichen algebraischen Eigenschaften der wohl wichtigsten Reihe in der Analysis.

Beispiel 3.25 (Exponentialreihe). Es seien $w,z\in\mathbb{C}$. Nach Beispiel 3.15 konvergiert die Reihe

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut. Wir haben $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = \mathrm{e}$ (nach Beispiel 2.16). Ferner gelten die folgende Gleichungen.

a) $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$. (Exponentialgesetz)

b) $\exp(z) \neq 0$, $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$, $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.

c) $\exp(p) = \mathrm{e}^p$ für alle $p \in \mathbb{Q}$.

Beweis. Satz 3.24 und Beispiel 0.3 implizieren

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{n!}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k w^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w)\end{aligned}$$

und damit Behauptung a). Daraus schließen wir

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z)\exp(-z),$$

sodass $\exp(z)$ ungleich 0 ist und den Kehrwert $\exp(-z)$ besitzt. Der letzte Teil von b) folgt mit den Sätzen 2.9 und 1.28 aus der Rechnung

$$\overline{\exp(z)} = \lim_{n\to\infty}\overline{\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{z}^k}{k!} = \exp(\overline{z}).$$

Sei $p = m/n$ für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $m \geq 0$. Teil a) liefert

$$\exp(p)^n = \exp(p)\cdot\ldots\cdot\exp(p) = \exp(np) = \exp(m) = \exp(1)\cdot\ldots\cdot\exp(1) = \mathrm{e}^m,$$

wobei die Punkte ein n-faches bzw. m-faches Produkt bezeichnen. Nach Definition 1.25 gilt somit $\exp(p) = \mathrm{e}^p$. Für $m < 0$ verwendet man dann Teil b). □

3.3. Potenzreihen

Viele der elementaren Funktionen werden wie in Beispiel 3.25 durch Reihen definiert, was den folgenden Begriff motiviert.

Definition 3.26. *Es seien Zahlen a_n für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann nennt man die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$* Potenzreihe *mit Koeffizienten a_n.*

Es sei D die Menge derjenigen $z \in \mathbb{C}$, für die die Potenzreihe konvergiert. Man beachte, dass D stets 0 enthält. Dann ist $f : D \to \mathbb{C}$; $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, eine Abbildung mit $f(0) = a_0$. Das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe wird weitgehend durch die folgende Größe beschrieben.

Definition 3.27. *Der* Konvergenzradius *ρ einer Potenzreihe $\sum_n a_n z^n$ ist*

$$\rho := \begin{cases}\dfrac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{wenn } \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_n \text{ beschränkt und keine Nullfolge ist,}\\ 0, & \text{wenn } \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_n \text{ unbeschränkt ist,}\\ \infty, & \text{wenn } \sqrt[n]{|a_n|} \to 0 \text{ für } n\to\infty.\end{cases}$$

THEOREM 3.28 (Konvergenzsatz für Potenzreihen). *Es sei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_n a_n z^n$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Sei $\rho \in (0,\infty)$. Dann konvergiert $\sum_n a_n z^n$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$ und die Potenzreihe divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho$.

b) Sei $\rho = 0$. Dann divergiert $\sum_n a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

c) Sei $\rho = \infty$. Dann konvergiert $\sum_n a_n z^n$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

Somit gilt $\rho = \sup\{r \geq 0 \mid \sum_n a_n z^n$ konvergiert für alle $z \in \overline{B}(0,r)\}$, wobei $\sup[0,\infty) =: \infty$.

BEWEIS. Wir haben zunächst $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}} |z| =: b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Für $\rho \in (0,\infty)$ liefert Satz 2.28e), dass $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n = |z|/\rho$. Diese Zahl ist genau dann kleiner (bzw. größer) 1, wenn $|z| < \rho$ (bzw. $|z| > \rho$). Das Wurzelkriterium Satz 3.16 impliziert somit Behauptung a).

b) Seien $\rho = 0$ und $z \neq 0$. Dann ist (b_n) unbeschränkt und Satz 3.16 zeigt die Divergenz der Potzenzreihe.

c) Wenn $\rho = \infty$, dann konvergiert (b_n) für alle $z \in \mathbb{C}$ gegen 0, sodass die absolute Konvergenz von $\sum_n a_n z^n$ wieder aus Satz 3.16 folgt.

Die Konvergenzaussagen liefern die Relation "$\leq$" im Zusatz, und die Divergenzbehauptungen die Ungleichung "$\geq$". □

Wenn $\rho \in (0,\infty)$, dann kann für z auf der Kreislinie $S(0,\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho\}$ Konvergenz oder Divergenz vorliegen, siehe Beispiel 3.29 c) und e).

BEISPIEL 3.29. a) Wenn $a_k = 0$ für alle $k \geq n+1$ und ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dann ist die Potenzreihe $\sum_k a_k z^k$ gleich dem *Polynom* $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ und man hat $\rho = \infty$.

b) Die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ aus Beispiel 3.25 konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$. Sie definiert die *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Somit hat exp nach Theorem 3.28 den Konvergenzradius $\rho = \infty$. Insbesondere gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0. \tag{3.5}$$

c) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ aus Beispiel 3.2 konvergiert absolut für $z \in B(0,1)$, da hier $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und somit $\rho = 1$ gilt. Sie divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ nach Beispiel 3.7.

d) Die Potenzreihe $\sum_n n! z^n$ hat wegen (3.5) den Konvergenzradius $\rho = 0$. Sie divergiert also nach Theorem 3.28 für alle $z \neq 0$.

e) Die Potenzreihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(2z)^n$ hat die Koeffizienten $a_n = 2^n/n$ für $n \in \mathbb{N}$, sodass eine Übung $|a_n|^{\frac{1}{n}} = 2\sqrt[n]{n} \to 2$ für $n \to \infty$ zeigt. Also hat die Reihe den Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{2}$, sodass sie nach Theorem 3.28 für $|z| < 1/2$ absolut konvergiert und für $|z| > 1/2$ divergiert. Gemäß Beispiel 3.9 konvergiert sie ferner für $z = -\frac{1}{2}$ und divergiert für $z = \frac{1}{2}$.[2] ♢

Aus den vorherigen Resultaten über Reihen folgen leicht die folgenden Rechenregeln. Man beachte, dass links wieder Potenzreihen stehen.

Satz 3.30. *Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, sowie $\sum_n a_n z^n$ und $\sum_n b_n z^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $\rho_a > 0$ und $\rho_b > 0$. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho_a$ und $|z| < \rho_b$ (wobei $|z| < \infty$ stets erfüllt sei). Dann existieren die Grenzwerte*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \Big) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Beweis. Die erste Aussage ergibt sich direkt aus Theorem 3.28 und Satz 3.3. Die zweite ist eine Folgerung von Theorem 3.28 und Satz 3.24, wobei wir in (3.3)

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = z^n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

erhalten. □

Wir können nun zwei weitere wichtige Funktionen definieren und diskutieren.

Beispiel 3.31 (Sinus und Cosinus). Die Reihen

$$\sin(z) = \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots \qquad \text{und}$$
$$\cos(z) = \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots$$

konvergieren für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut. Weiter gelten

$$\sin x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \cos x \in \mathbb{R} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$
$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{und} \quad \sin(-z) = -\sin z \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{3.7}$$

Beweis. Der Sinus ist eine Potenzreihe mit Koeffizienten $a_j = 0$ für gerade $j \in \mathbb{N}_0$ und $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ für ungerade $j = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Mit (3.5) folgt $\rho = \infty$, sodass Theorem 3.28 die erste Behauptung für sin zeigt. Den Cosinus behandelt man genauso. Die anderen Aussagen ergeben sich aus den Reihen. □

Der nächste Satz stellt einen unerwarteten Zusammenhang zwischen den *komplexen* Funktionen exp, sin und cos her. Insbesondere liegt die Zahl $\exp(\mathrm{i}x)$ für reelle x auf der Einheitskreislinie und hat den Realteil $\cos x$ und den Imaginärteil

[2] Nach Satz 3.44 in [7] konvergiert die Reihe für alle $z \in S(0, 1/2) \setminus \{1/2\}$. Diese Aussage beruht auf einem tiefer liegenden Konvergenzkriterium für Reihen.

$\sin x$, was gerade der elementargeometrischen Definition des Sinus und Cosinus entspricht. Dies wird in Abschnitt 4.4 vertieft.

SATZ 3.32. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Formeln.*

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{i}z) &= \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z) \quad \textit{(Euler)}, & (\sin z)^2 + (\cos z)^2 &= 1, \\ \cos z &= \tfrac{1}{2}(\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)), & \sin z &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten ferner

$$\begin{gathered} \mathrm{Re}(\exp(\mathrm{i}x)) = \cos x, \qquad \mathrm{Im}(\exp(\mathrm{i}x)) = \sin x, \\ |\exp(\mathrm{i}x)| = 1, \qquad |\cos x| \leq 1, \qquad |\sin x| \leq 1. \end{gathered} \tag{3.9}$$

BEWEIS. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt aufgrund der Reihendarstellungen und $\mathrm{i}^2 = -1$

$$\exp(\mathrm{i}z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}^2)^k}{(2k)!} z^{2k} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}^2)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \cos z + \mathrm{i} \sin z,$$

was die Eulerformel zeigt. Daraus folgen mit dem Exponentialgesetz in Beispiel 3.25 und den Eigenschaften (3.7) die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= \exp(0) = \exp(\mathrm{i}z - \mathrm{i}z) = \exp(\mathrm{i}z)\exp(\mathrm{i}(-z)) = (\cos z + \mathrm{i}\sin z)(\cos z - \mathrm{i}\sin z) \\ &= (\cos z)^2 - \mathrm{i}^2(\sin z)^2 = (\cos z)^2 + (\sin z)^2. \end{aligned}$$

Ähnlich erhalten wir

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z) &= \cos z + \mathrm{i}\sin z + \cos z - \mathrm{i}\sin z = 2\cos z, \\ \exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z) &= \cos z + \mathrm{i}\sin z - \cos z + \mathrm{i}\sin z = 2\mathrm{i}\sin z. \end{aligned}$$

Die Aussagen in (3.6) und (3.8) implizieren zusammen mit Satz 1.28 die Behauptung (3.9). ☐

Es gibt zahlreiche Formeln, die sin und cos miteinander verbinden. Wir beschränken uns hier exemplarisch auf eine Gleichung, die später benötigt wird; andere werden in den Übungen besprochen.

KOROLLAR 3.33. *Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\cos z - \cos w = -2\sin\Big(\tfrac{1}{2}(z+w)\Big)\sin\Big(\tfrac{1}{2}(z-w)\Big).$$

BEWEIS. Die Gleichungen (3.8) und das Exponentialgesetz implizieren

$$\begin{aligned} &-2\sin\Big(\tfrac{1}{2}(z+w)\Big)\sin\Big(\tfrac{1}{2}(z-w)\Big) \\ &\quad = \frac{-2}{(2\mathrm{i})^2}\Big(\exp(\tfrac{\mathrm{i}}{2}(z+w)) - \exp(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}(z+w))\Big)\Big(\exp(\tfrac{\mathrm{i}}{2}(z-w)) - \exp(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}(z-w))\Big) \\ &\quad = \tfrac{1}{2}\Big(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(\mathrm{i}w) - \exp(-\mathrm{i}w) + \exp(-\mathrm{i}z)\Big) = \cos z - \cos w. \end{aligned}$$ ☐

3.4. Uneigentliche Grenzwerte

In diesem Abschnitt diskutieren wir den einfachsten Fall der Divergenz näher und führen in diesem Zusammenhang zunächst einige Begriffe ein.

Definition 3.34. *Die erweiterte Zahlengerade ist*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

wobei die Symbole $-\infty$ *und* $+\infty = \infty$ *die Eigenschaften*

$$-\infty < x < \infty \quad \textit{(für alle } x \in \mathbb{R}\textit{)} \qquad \textit{und} \qquad |\pm\infty| = +\infty$$

besitzen sollen. Wenn $D \subseteq \mathbb{R}$ *nach oben bzw. nach unten unbeschränkt ist, dann schreibt man* $\sup D = \infty$ *bzw.* $\inf D = -\infty$.

Definition 3.35. *Sei* (x_n) *reell. Man schreibt* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *(bzw.* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$*) oder* $x_n \to +\infty$ *(bzw.* $x_n \to -\infty$*) für* $n \to \infty$, *wenn*

$$\forall\, K \in \mathbb{N} \quad \exists\, N_K \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N_K: \quad x_n \geq K \quad \textit{(bzw. } x_n \leq -K\textit{)}. \tag{3.10}$$

Man spricht hier von uneigentlicher Konvergenz.

Man beachte, dass dann $x_n \geq 1$ (bzw. $x_n \leq -1$) für alle $n \geq N_1$ folgt.

Bemerkung 3.36. Wenn $\sup D = +\infty$ ($\inf D = -\infty$), dann existieren aufgrund der obigen Definition Elemente x_n in D mit $x_n \to +\infty$ ($x_n \to -\infty$) für $n \to \infty$. $\Diamond$

Nach Definition 3.35 gelten $x_n = n \to \infty$ (mit $N_K = K$) und $y_n = -n^2 \to -\infty$ (mit $N_K \geq \sqrt{K}$) für $n \to \infty$. Die Folgen $(x_n) = ((-1)^n)_n$ und $(y_n) = ((-1)^n n)_n$ konvergieren nicht uneigentlich, da z.B. $y_{2n+1} \leq -1 < K$ und $y_{2n} \geq 1 > -K$ für alle $K, n \in \mathbb{N}$ gelten.

Satz 3.37. *Sei* (x_n) *reell. Dann gelten die folgenden Aussagen.*
a) Es gelte $|x_n| \to +\infty$ *für* $n \to \infty$. *Dann folgt* $\frac{1}{x_n} \to 0$ *für* $n \to \infty$.
b) Es gelte $x_n \to 0$ *für* $n \to \infty$ *und es gebe einen Index* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $x_n > 0$ *für alle* $n \geq n_0$. *Dann folgt* $\frac{1}{x_n} \to +\infty$ *für* $n \to \infty$.
c) Es gelte $x_n \to 0$ *für* $n \to \infty$ *und es gebe einen Index* $n_1 \in \mathbb{N}$ *mit* $x_n < 0$ *für alle* $n \geq n_1$. *Dann folgt* $\frac{1}{x_n} \to -\infty$ *für* $n \to \infty$.

Beweis. a) Sei $|x_n| \to \infty$ für $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle eine natürliche Zahl K mit $\frac{1}{K} \leq \varepsilon$. Nach (3.10) gibt es dann so einen Index $N_K \in \mathbb{N}$, dass $|x_n| \geq K$ für alle $n \geq N_K$ gilt. Für diese n folgt dann $\left|\frac{1}{x_n}\right| \leq \frac{1}{K} \leq \varepsilon$ und damit a).

b) Sei $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $x_n > 0$ für alle $n \geq n_0$. Sei $K \in \mathbb{N}$. Wähle $\varepsilon := 1/K > 0$. Nach Voraussetzung existiert so eine natürliche Zahl $N_\varepsilon \geq n_0$, dass $0 < x_n \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt. Für diese n folgt dann $\frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{\varepsilon} = K$ und damit die Behauptung b). Die letzte Behauptung zeigt man entsprechend. $\square$

Nach Satz 2.7 erhalten wir aus $x_n \to x$ und $y_n \to +\infty$ oder $y_n \to -\infty$ für $n \to \infty$, dass $\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. Man schreibt demgemäß

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Es ist zu beachten, dass Varianten der Rechenregeln in Satz 3.37 falsch sind. Zunächst benötigt man die Vorzeichenbedingung in b) bzw. c). Für $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ divergiert z.B. die Folge $(\frac{1}{x_n}) = ((-1)^n n)_n$ der Kehrwerte.

Weiter betrachten wir die Grenzwerte $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $y_n = n \to \infty$, $u_n = n^2 \to \infty$ und $v_n = \sqrt{n} \to \infty$ für $n \to \infty$. Hier gelten aber $x_n y_n = 1 \to 1$, $x_n u_n = n \to \infty$ und $x_n v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ für $n \to \infty$. Also versagen die Rechenregeln aus Satz 2.7 im Fall "$0 \cdot (\pm\infty)$"; und entsprechend bei "$\infty - \infty$", "$\frac{\pm\infty}{\infty}$" und "$\frac{\pm\infty}{-\infty}$".

Wir nutzen nun die Elemente $\pm\infty$ aus, um die Begriffe des Limes superior und inferior auch für unbeschänkte Folgen zu definieren.

Definition 3.38. *Sei (x_n) reell. Wenn die Folge keine obere (bzw. untere) Schranke besitzt, so setzt man $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (bzw. $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$).*

Wenn die Folge nach oben (bzw. unten) beschränkt ist, definiert man wie vor (2.6) eine fallende (bzw. wachsende) Folge (b_n) (bzw. (c_n)). Wenn diese Folge nach unten (oben) beschränkt ist, existiert nach Theorem 2.14 ihr Grenzwert wie in (2.7) bzw. in (2.8), und man kann wie dort den Limes superior bzw. inferior in $\mathbb{R}$ definieren. Andernfalls setzt man $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (bzw. $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$).[3]

Bemerkung 3.39. Mit der obigen Definition ist eine reelle Folge (x_n) genau dann nach oben (bzw. unten) beschränkt, wenn $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n < \infty$ (bzw. $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n > -\infty$).

Man kann nun im Quotienten- und Wurzelkriterium die Beschränktheitsvoraussetzungen weglassen. Weiter erhält man für den Konvergenzradius die Formel

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

auch wenn $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ unbeschränkt oder eine Nullfolge ist. Hierbei setzt man $\rho = \frac{1}{\infty} = 0$ und $\rho = \frac{1}{0} = \infty$, was nach Satz 3.37 gerechtfertigt ist. $\Diamond$

[3]Der zweite Absatz der Definition wurde in der Vorlesung weggelassen.

KAPITEL 4

Stetige Funktionen

Eine Funktion ist stetig, wenn sie Grenzwerte respektiert. Diese Eigenschaft wird es (zumal im Reellen) erlauben, weitgehende Aussagen über den Bild der Funktion zu machen. In diesem Kapitel sei D eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$.

4.1. Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Als Vorbereitung besprechen wir Grenzwerte einer Funktion f. Zuerst definieren wir die Punkte, bei denen ein Grenzwert sinnvoll erklärt werden kann.

Definition 4.1. *Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$. Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt* Häufungspunkt *von D, wenn es eine Folge (z_n) in $D \setminus \{z\}$ gibt, die gegen z konvergiert. Wenn $z \in D$ kein Häufungspunktvon D ist, so ist z in D* isoliert*.*

Ein Punkt $z \in D$ ist genau dann isoliert, wenn es so ein $r > 0$ gibt, dass $\overline{B}(z,r) \cap D = \{z\}$ gilt. Nach Satz 2.9 liegt jeder Häufungspunkt einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ auch in $\mathbb{R}$.

Die Zahlen 0 und $\frac{1}{2}$ sind Häufungspunkte von $(0,1]$ (wähle etwa $x_n = 1/n$ bzw. $x_n = 1/2 + 1/n$ für $n \geq 2$), 2 ist es nicht. Weiter ist in $D = B(0,1) \cup \{-2\}$ der Punkt -2 isoliert (mit z.B. $r = 1/2$).

Definition 4.2. *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$, z_0 ein Häufungspunkt von D und $w_0 \in \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$* konvergiert *gegen den* Grenzwert *w_0 für $z \to z_0$, wenn für* ***jede*** *Folge (z_n) in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$ gilt, dass $f(z_n) \to w_0$ für $n \to \infty$. Man schreibt dann*

$$w_0 = \lim_{z \to z_0} f(z) \qquad \textit{oder} \qquad f(z) \to w_0 \quad \textit{für } z \to z_0.$$

Wenn $D \subseteq \mathbb{R}$ gilt und man oben zusätzlich $z_n < z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $z_n > z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$) fordert, so spricht man vom links- *(bzw.* rechts-*)*seitigen Grenzwert *und schreibt $w_0 = \lim_{z \to z_0^-} f(z)$ (bzw. $\lim_{z \to z_0^+} f(z)$) .*

Man hat diese Begriffe so gewählt, dass für $z_0 \in D$ der Funktionswert $f(z_0)$ beim Grenzwert von $f(z)$ für $z \to z_0$ oder $z \to z_0^{\pm}$ keine Rolle spielt.

Beispiel 4.3. a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $f(z) = z^2 + 3$. Dann gilt für alle $z_0 \in \mathbb{C}$, dass $f(z) \to z_0^2 + 3$ für $z \to z_0$.

Beweis. Seien $z_n \in D \setminus \{z_0\}$ beliebig gewählt mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$. Nach Satz 2.7 konvergiert $f(z_n) = z_n^2 + 3$ nach $z_0^2 + 3$ für $n \to \infty$. $\square$

b) Sei M eine Menge. Für eine nichtleere Teilmenge $A \subseteq M$ setzt man

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in M \setminus A. \end{cases}$$

Sei speziell $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht, aber es existieren $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Beweis. Sei $x_n > 0$ beliebig mit $x_n \to 0$ für $n \to \infty$. Dann strebt $f(x_n) = 1$ gegen 1, was $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ zeigt. Genauso behandelt man den Fall $x \to 0^-$. Sei ferner $y_n = (-1)^n/n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert (y_n) für $n \to \infty$ gegen 0, aber $f(y_n)$ ist für gerade n gleich 1 und für ungerade gleich 0. Also divergiert $(f(y_n))_n$ und der Grenzwert von f für $x \to 0$ existiert nicht. □

c) Für $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x}$, existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht, da z.B. $(f(1/n))_n = (n)_n$ divergiert. ◊

Es ist oft nützlich Begriffe, die über Folgen definiert wurden, auch mittels Kugeln zu charakterisieren. Dies geschieht hier für die Konvergenz einer Funktion.

Satz 4.4. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, z_0 ein Häufungspunkt von D, $f : D \to \mathbb{C}$ und $w_0 \in \mathbb{C}$. Genau dann existiert $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$, wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall\, z \in D \text{ mit } 0 < |z - z_0| \le \delta_\varepsilon : \quad |f(z) - w_0| \le \varepsilon. \tag{4.1}$$

Beweis. 1) Es gelte (4.1). Seien $z_n \in D \setminus \{z_0\}$ beliebig gewählt mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir haben den Radius $\delta_\varepsilon > 0$ aus (4.1). Aufgrund der Konvergenz von (z_n) existiert ein Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass $0 < |z_n - z_0| \le \delta_\varepsilon$ für alle $n \ge N_\varepsilon$ gilt. Aus (4.1) folgt dann $|f(z_n) - w_0| \le \varepsilon$, sodass $f(z_n) \to w_0$ für $n \to \infty$. Somit konvergiert $f(z)$ für $z \to z_0$ gegen w_0.

2) Es sei $f(z) \to w_0$ für $z \to z_0$. Wir nehmen an (4.1) wäre falsch. Indem wir dort $\delta_n := \frac{1}{n}$ wählen, erhalten wir einen Radius $\varepsilon_0 > 0$ derart, dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $z_n \in D$ mit $0 < |z_n - z_0| \le \frac{1}{n}$ so gibt, dass $|f(z_n) - w_0| > \varepsilon_0$ gilt. Mit Satz 2.10 sehen wir dann, dass z_n für $n \to \infty$ gegen z_0 strebt, aber $f(z_n)$ nicht gegen w_0. Dieser Widerspruch impliziert (4.1). □

Da Konvergenz über Folgen definiert worden ist, erhalten wir aus dem zweiten Kapitel leicht eine Reihe von Grenzwertsätzen für Funktionen. Die erste Aussage in e) und ihr Beweis sind dabei typische Anwendungen von Satz 4.4.

Satz 4.5. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, z_0 ein Häufungspunkt von D, $f, g : D \to \mathbb{C}$ Funktionen und $u_0, v_0 \in \mathbb{C}$ so, dass die Grenzwerte $u_0 = \lim_{z\to z_0} f(z)$ und $v_0 = \lim_{z\to z_0} g(z)$ existieren. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Es existiert $\lim_{z\to z_0}(f(z) + g(z)) = u_0 + v_0$.

b) Es existiert $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = u_0 v_0$.

c) Es existiert $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |u_0|$.

d) Es gibt $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} u_0$, $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} u_0$ und $\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{u_0}$.

e) Es sei zusätzlich $u_0 \neq 0$. Dann gibt es so einen Radius $r > 0$, dass $|f(z)| \geq \frac{|u_0|}{2} > 0$ für alle $z \in D$ mit $0 < |z - z_0| \leq r$ gilt und es existiert $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{u_0}$.

f) Es seien auch $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $f(z) \leq g(z)$ für alle $z \in D$. Dann folgt $u_0 \leq v_0$. Entsprechende Aussagen gelten für rechtsseitige und linksseitige Grenzwerte.

Beweis. Seien $z_n \in D \setminus \{z_0\}$ beliebig mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$. Die Voraussetzungen implizieren $f(z_n) \to u_0$ und $g(z_n) \to v_0$. Mit den Sätzen 2.7, 2.9 und 2.10 folgen dann alle Aussagen bis auf den ersten Teil von e). Dafür wählen wir $\varepsilon_0 = |u_0|/2$. Nach c) und Satz 4.4 gibt es einen Radius $r := \delta_{\varepsilon_0} > 0$ derart, dass für alle $z \in D$ mit $0 < |z - z_0| \leq r$ die Abschätzung

$$\frac{|u_0|}{2} \geq \Big| |f(z)| - |u_0| \Big| \geq |u_0| - |f(z)|$$

gilt. Diese Ungleichung liefert wie gewünscht $|f(z)| \geq |u_0|/2$. □

Bemerkung 4.6. Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Wenn $\sup D = \infty$ ($\inf D = -\infty$) gelten, vergleiche Bemerkung 3.36, definieren wir die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ($\lim_{x\to-\infty} f(x)$) wie in Definition 4.2. Satz 4.5 überträgt sich auf diese Situation.[1] Wie in Satz 4.4 konvergiert $f(x)$ genau dann gegen ein $y_0 \in \mathbb{R}$ für $x \to \infty$ ($x \to -\infty$), wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_\varepsilon \in D \quad \forall\, x \in D \ \text{ mit } \ x \geq x_\varepsilon \ (x \leq x_\varepsilon) : \quad |f(x) - y_0| \leq \varepsilon.$$

Sei x_0 ein Häufungspunkt von D oder $x_0 = \pm\infty$ (wenn $\sup D = \infty$ bzw. $\inf D = -\infty$). Man schreibt $f(x) \to \infty$ für $x \to x_0$, wenn $f(x_n) \to \infty$ für jede Folge mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ kann man diese uneigentliche Konvergenz wie in Satz 4.4 durch die Bedingung

$$\forall\, K \in \mathbb{N} \quad \exists\, \delta_K > 0 \quad \forall\, x \in D \ \text{ mit } \ 0 < |x - x_0| \leq \delta_K : \quad f(x) \geq K.$$

charakterisieren, und für $x_0 \in \{-\infty, \infty\}$ durch

$$\forall\, K \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_K \in D \quad \forall\, x \in D \ \text{ mit } \ x \geq x_K \ (x \leq x_K) : \quad f(x) \geq K.$$

(Entsprechend geht man für $f(x) \to -\infty$ vor.) Hier kann man wie in Satz 3.37 gewisse Grenzwertaussagen zeigen. ◊

Wir definieren nun einen der zentralen Begriffe der Analysis. Er besagt, dass eine Funktion die Folgenkonvergenz (also die Grundeigenschaft der Analysis) erhält.

Definition 4.7. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{C}$. Die Funktion f heißt* stetig *in z_0, wenn*

für **jede** *Folge (z_n) in D mit $z_n \to z_0$ auch $f(z_n) \to f(z_0)$ für $n \to \infty$ gilt.*

Wenn f in jedem $z_0 \in D$ stetig ist, dann heißt f stetig *(auf D). Man schreibt $C(D) = \{f : D \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ ist stetig}\}$ (und analog für reellwertige Funktionen).*

[1] In der Vorlesung wurde die folgenden Details weitgehend weggelassen.

Bemerkung 4.8. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Wenn z_0 ein Häufungspunkt von D ist, dann ist gemäß Definition 4.2 die Stetigkeit von f an z_0 äquivalent zu

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Wenn z_0 isoliert in D ist, dann ist f in z_0 immer stetig, da jede Folge (z_n) in D mit Grenzwert z_0 ab einem Index $n_0 \in \mathbb{N}$ konstant gleich z_0 sein muss. $\Diamond$

Wir diskutieren eine Reihe von Beispielen, bei denen man die Stetigkeit direkt nachrechnen kann.

Beispiel 4.9. a) Sei $c \in \mathbb{R}$ fest. Dann sind die Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = c$ und $g(z) = z$ stetig, da $f(z_n) - f(z_0) = 0$ und $g(z_n) - g(z_0) = z_n - z_0 \to 0$ für jede Folge in $\mathbb{C}$ mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$.

b) Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{x}$, ist stetig. In der Tat folgt gemäß einer Übung aus $x_n \to x_0$ in $[0, \infty)$ stets $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x_0}$ für $n \to \infty$.

c) Die Funktion $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig und in $x = 0$ unstetig. Für $x \neq 0$ sieht man dass wie in a), für $x = 0$ wie in Beispiel 4.3.

d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x}$, ist stetig. Tatsächlich folgt aus $x_n \to x_0$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stets die Konvergenz von $1/x_n$ gegen $1/x_0$ für $n \to \infty$.

e) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und $f(x) = 1$ für $x \leq 0$, ist in $x = 0$ unstetig, da für $x_n = 1/n \to 0$ die Folge $(f(x_n))_n = (n)_n$ divergiert. $\Diamond$

Um die Rechenregeln für Stetigkeit zu formulieren, führen wir eine Reihe von Operationen für Funktionen ein.

Definition 4.10. *Für Funktionen $f, g : D \to \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ definiert man die Funktionen $f+g$, αf, fg, $|f|$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\overline{f}$ und (soweit $f(z) \neq 0$) $1/f$ punktweise, also durch $f + g : D \to \mathbb{C}$; $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$, usw.*

Sei $M \subseteq D$. Dann ist das Bild *von M unter f durch $f(M) = \{w \in \mathbb{C} \,|\, \exists z \in D$ mit $f(z) = w\}$ gegeben.*

Für eine Funktion $h : f(D) \to \mathbb{C}$ definiert man die Komposition *von h und f durch $h \circ f : D \to \mathbb{C}$; $(h \circ f)(z) = h(f(z))$, vergleiche Definition 1.21.*

Diese Operationen erhalten die Stetigkeit aufgrund schon bekannter Resultate.

Satz 4.11. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, sowie $f, g : D \to \mathbb{C}$ stetig in z_0 und $h : f(D) \to \mathbb{C}$ stetig in $f(z_0)$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, αf, fg, $|f|$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\overline{f}$, $h \circ f : D \to \mathbb{C}$ stetig in z_0. Wenn $f(z_0) \neq 0$, dann gibt es so einen Radius $r > 0$, dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \tilde{D} := D \cap \overline{B}(z_0, r)$ gilt und die Funktion $1/f : \tilde{D} \to \mathbb{C}$ in z_0 stetig ist. Insbesondere ist $C(D)$ ein Vektorraum.*[2]

Beweis. Sei $z_n \to z_0$ in D für $n \to \infty$. Nach Vorausetzung erhalten wir $f(z_n) \to f(z_0)$ und somit auch $g(f(z_n)) \to g(f(z_0))$ für $n \to \infty$, sodass $g \circ f$ bei z_0 stetig ist. Die anderen Aussagen folgen entsprechend aus Satz 4.5 und Bemerkung 4.8. $\square$

[2] Diesen Begriff definiert man in der Linearen Algebra.

Beispiel 4.12. a) Nach Satz 4.11 und Beispiel 4.3 sind Polynome stetig auf $\mathbb{C}$.

b) Rationale Funktionen $f = p/q$ sind auf $D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, q(z) \neq 0\}$ stetig. Hierbei sind p und q Polynome mit $q \neq 0$. Diese Aussage folgt aus a) und Satz 4.11.

c) Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R};\ f(z) = \sqrt{1 + 2|z|}$, ist stetig.

Beweis. Wir schreiben $f = w \circ \ell \circ b$ als Komposition der Abbildungen $b : \mathbb{C} \to [0, \infty);\ b(z) = |z|,\ \ \ell : [0, \infty) \to [0, \infty);\ \ell(x) = 1 + 2x$, und $w : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $w(y) = \sqrt{y}$. Diese sind nach Satz 4.11, Teil a) und Beispiel 4.3 stetig, sodass die Stetigkeit von f aus Satz 4.11 folgt. $\square$

Der nächste Hauptsatz sichert insbesondere die Stetigkeit von exp, sin und cos.

Theorem 4.13. *Es sei $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist $f : B(0, \rho) \to \mathbb{C}$ stetig, wobei $B(0, \infty) := \mathbb{C}$.*

Dieses Theorem wird in Beispiel 4.37 bewiesen. Vorher verwenden wir es nur am Rande in Beispielen. Der folgende Satz charakterisiert Stetigkeit bei einem Punkt z_0 dadurch, dass man für jede Kugel $\overline{B}$ um den Bildpunkt $f(z_0)$ eine Kugel im Urbildbereich findet, die f in $\overline{B}$ abbildet. Dadurch wird das Abbildungsverhalten einer stetigen Funktion f genauer als in Definition 4.7 beschrieben. Dieser Gesichtspunkt wird in Analysis II vertieft.

Satz 4.14 (ε–δ–Charakterisierung der Stetigkeit). *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

a) f ist stetig in z_0.
b) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall\, z \in D \cap \overline{B}(z_0, \delta_\varepsilon) : \quad |f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$.
c) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \quad f(D \cap \overline{B}(z_0, \delta_\varepsilon)) \subseteq \overline{B}(f(z_0), \varepsilon)$.

Beweis. Die Äquivalenz von a) und b) ist eine Konsequenz von Satz 4.4 und Bemerkung 4.8, während die von b) und c) aus den Definitionen von $f(M)$ und von $\overline{B}(z_0, \delta_\varepsilon)$ folgt. $\square$

Im obigen Satz kann der Radius δ_ε sehr wohl von z_0 abhängen, siehe Beispiel 4.16. Etwa bei der Konstruktion des Integrals in Kapitel 6 müssen wir so ein Verhalten aber ausschließen. Das führt uns auf das folgende Konzept.

Definition 4.15. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt* gleichmäßig stetig, *wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall\, z, w \in D \text{ mit } |z - w| \leq \delta_\varepsilon \quad \text{gilt:} \quad |f(z) - f(w)| \leq \varepsilon. \tag{4.2}$$

Theorem 4.18 gibt uns gleich einfach nachzuprüfende hinreichende Eigenschaften für die gleichmäßige Stetigkeit. Zunächst präsentieren wir zwei typische Beispiele stetiger, aber nicht gleichmäßig stetiger Funktionen.

Beispiel 4.16. a) Die stetige Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R};\ f(x) = \frac{1}{x}$, ist nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. Sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $x \in (0,1)$ mit $x \leq 2\delta$ und $y = x/2 \in (0,1)$. Dann gelten $|x-y| = x/2 \leq \delta$ und $|f(x) - f(y)| = 1/x > 1$. Dies widerspricht (4.2) mit $\varepsilon = 1$. □

b) Die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$, ist nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. Sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $x = \delta + \frac{1}{\delta}$ und $y = 1/\delta$ in $\mathbb{R}$. Wir erhalten $|x-y| = \delta$ und $|f(x) - f(y)| = \delta^2 + 2 > 1$. Dies widerspricht (4.2) mit $\varepsilon = 1$. □

4.2. Hauptsätze über stetige Funktionen

Der nächste Begriff spielt in den folgenden Sätzen eine wichtige Rolle. Er besagt, dass Grenzwerte nicht aus einer Menge herausfallen können und wird in Analysis II genauer untersucht.

Definition 4.17. *Eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt* abgeschlossen*, wenn aus $z_n \in D$ für $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \to z$ für $n \to \infty$ stets $z \in D$ folgt.*

Abgeschlossene Intervalle und Kugeln $\overline{B}(z_0, r)$ sind gemäß Satz 2.10 auch im Sinne von Definition 4.17 abgeschlossen. Die Menge $D = (0,1]$ ist nicht abgeschlossen, da $D \ni 1/n \to 0$.

Theorem 4.18. *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt, sowie $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir nehmen an, f wäre nicht gleichmäßig stetig. Indem wir $\delta_n = 1/n$ wählen, erhalten wir aus (4.2) einen Radius $\varepsilon_0 > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ Zahlen z_n, w_n in D mit $|z_n - w_n| \leq 1/n$ derart, dass $|f(z_n) - f(w_n)| > \varepsilon_0$ ist. Wegen der Beschränktheit von D liefert Theorem 2.23 Teilfolgen $(z_{n_l})_l$ und $(w_{n_{l_j}})_j$ mit Grenzwerten z und w. Da D abgeschlossen ist, liegen z und w auch in D. Aus der Abschätzung

$$|z - w| \leq |z - z_{n_{l_j}}| + |z_{n_{l_j}} - w_{n_{l_j}}| + |w_{n_{l_j}} - w| \leq |z - z_{n_{l_j}}| + \frac{1}{n_{l_j}} + |w_{n_{l_j}} - w|$$

folgt im Grenzwert $j \to \infty$, dass $|z-w| = 0$ und somit z gleich w ist. Die Stetigkeit von f impliziert nun die Konvergenz von $f(z_{n_{l_j}}) - f(w_{n_{l_j}})$ gegen $f(z) - f(w) = 0$ für $j \to \infty$. Dies widerspricht aber der obigen Ungleichung $|f(z_n) - f(w_n)| > \varepsilon_0$ für alle n, sodass f gleichmäßig stetig ist. □

Also sind Polynome, exp, sin, cos und (soweit definiert) rationale Funktionen auf abgeschlossenen Kugeln in $\mathbb{C}$ und die Wurzelfunktion auf Intervallen $[a,b] \subset [0,\infty)$ gleichmäßig stetig. Beispiel 4.16 zeigt, dass man in Theorem 4.18 nicht auf die Voraussetzungen an D verzichten kann.

Definition 4.19. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ ein Häufungspunkt von D und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wenn der Grenzwert $\lim_{z \to z_0} f(z) =: w_0$ existiert, dann* *heißt die Abbildung*

$$\tilde{f} : \tilde{D} = D \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}, \qquad \tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ w_0, & z = z_0, \end{cases}$$

stetige Fortsetzung *von* f *in* z_0.

Man beachte, dass in der obigen Definition $\tilde{f}$ stetig auf $\tilde{D}$ ist, wenn wir die Stetigkeit von f auf D annehmen. Wir geben zuerst zwei einfache Beispiele an.

Beispiel 4.20. a) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Dann wird f durch

$$\tilde{f}(x) = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1, \end{matrix} \right\} = x + 1$$

stetig in $x = 1$ fortgesetzt.

b) Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x}$, und $g : D \to \mathbb{R}$; $g(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, sind in $x = 0$ nicht stetig fortsetzbar. (Vergleiche Beispiel 4.3.) $\diamondsuit$

Als nächstes sehen wir, dass stetige Fortsetzbarkeit und gleichmäßige Stetigkeit eng zusammenhängen.

Satz 4.21. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ ein Häufungspunkt von D und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Wenn f auf D gleichmäßig stetig ist, dann hat f in z_0 eine stetige Fortsetzung.

b) Wenn $\tilde{D} = D \cup \{z_0\}$ abgeschlossen und beschränkt ist und f in z_0 stetig fortsetzbar ist, dann ist f auf D gleichmäßig stetig.

Beweis. a) Sei f gleichmäßig stetig. Wir konstruieren zuerst eine Zahl w_0 wie in Definition 4.19 und zeigen dann die Stetigkeit von $\tilde{f}$.

1) Seien $z_n \in D$ mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir haben den Radius $\delta_\varepsilon > 0$ aus (4.2). Aufgrund der Folgenkonvergenz existiert ein Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z_0| \leq \delta_\varepsilon/2$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Damit berechnen wir

$$|z_n - z_m| \leq |z_n - z_0| + |z_0 - z_m| \leq \delta_\varepsilon$$

für alle $n, m \geq N_\varepsilon$. Für diese n und m impliziert (4.2) die Ungleichung $|f(z_n) - f(z_m)| \leq \varepsilon$, sodass $(f(z_n))_n$ eine Cauchyfolge ist. Theorem 2.26 liefert nun einen Grenzwert $f(z_n) \to w_0$ für $n \to \infty$. Im Limes $m \to \infty$ folgt aus der obigen Ungleichung, dass $|f(z_n) - w_0| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt. Wir definieren $\tilde{f}$ wie in Definition 4.19.

2) Seien $u_n \in \tilde{D}$ mit $u_n \to z_0$ für $n \to \infty$. Es gibt wieder einen Index $\tilde{N}_\varepsilon \geq N_\varepsilon$ mit $|u_n - z_0| \leq \delta_\varepsilon/2$ für alle $n \geq \tilde{N}_\varepsilon$. Sei nun $n \geq \tilde{N}_\varepsilon$. Mit Schritt 1) folgt

$$|u_n - z_n| \leq |u_n - z_0| + |z_0 - z_n| \leq \delta_\varepsilon.$$

Wenn u_n gleich z_0 ist, gilt natürlich $\tilde{f}(u_n) = \tilde{f}(z_0)$. Ansonsten liefert (4.2) die Ungleichung $|f(u_n) - f(z_n)| \le \varepsilon$. Wir schließen daraus und aus 1), dass

$$|\tilde{f}(u_n) - w_0| = |f(u_n) - w_0| \le |f(u_n) - f(z_n)| + |f(z_n) - w_0| \le 2\varepsilon$$

für alle $n \ge \tilde{N}_\varepsilon$ gilt. Also ist $\tilde{f}$ bei z_0 stetig.

b) Die Funktion $\tilde{f}$ ist nach den Voraussetzungen in b) und Theorem 4.18 gleichmäßig stetig auf $\tilde{D}$ und damit erst recht auf D. $\square$

Der folgende Hauptsatz wird mit einem analogen Beweis im Sommersemester deutlich verallgemeinert werden. In dieser Form ist er dann eines der grundlegenden Resultate der Analysis.

Theorem 4.22 (Satz vom Maximum). *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es Zahlen $z_\pm \in D$ derart, dass $f(z_+) = \max\{f(z) \,|\, z \in D\} =: \max_D f$ und $f(z_-) = \min\{f(z) \,|\, z \in D\} =: \min_D f$ gelten. Insbesondere ist $|f(z)| \le \max\{|f(z_+)|, |f(z_-)|\}$ für alle $z \in D$; f ist also beschränkt.*

Beweis. Wir betrachten nur Maxima. Minima behandelt man mittels der Funktion $-f$ und Bemerkung 1.15e). Zuerst gewinnen wir ein Supremum des Bildes von f und zeigen dann, dass es im Bild liegt.

1) Wir nehmen zuerst an, f wäre nicht nach oben beschränkt. Somit existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $z_n \in D$ mit $f(z_n) \ge n$. Aufgrund der Beschränktheit von D liefert Theorem 2.23 eine Teilfolge $(z_{n_j})_j$ mit Grenzwert z_0. Da D abgeschlossen ist, liegt z_0 auch in D. Die Stetigkeit von f impliziert nun, dass $f(z_{n_j}) \to f(z_0)$ für $j \to \infty$ gilt, was der Annahme widerspricht. Somit ist f nach oben beschränkt und es gibt $y_+ := \sup_{z\in D} f(z)$ nach Definition 1.17.

2) Nach Satz 1.18 gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $u_k \in D$ mit $y_+ - 1/k < f(u_k) \le y_+$. Satz 2.10 zeigt dann, dass $f(u_k)$ für $j \to \infty$ gegen y_+ strebt. Wie in Schritt 1) erhalten wir ferner eine Teilfolge (u_{k_l}), die gegen einen Punkt $u \in D$ konvergiert. Da f stetig ist, folgt $f(u) = \lim_{l\to\infty} f(u_{k_l}) = y_+$. $\square$

Im reellen Fall werden die Zahlen $z_\pm$ im fünften Kapitel in gewissen Fällen berechnet. Das nächste Korollar beschreibt wie das obige Theorem eine globale Abschätzung auf D liefern kann. Man beachte, dass man beide Resultate auch auf die Funktion $|f|$ für ein stetiges $f : D \to \mathbb{C}$ anwenden kann, wenn D abgeschlossen und beschränkt ist.

Korollar 4.23. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $f(z) > 0$ für alle $z \in D$. Dann gilt $f(z) \ge f(z_-) > 0$ für alle $z \in D$ und die Zahl $z_- \in D$ aus Theorem 4.22.*

Die obigen Aussagen sind im Allgemeinen auf unbeschränkten oder nicht abgeschlossenen Definitionsbereichen D falsch. Zum Beispiel sind die Funktionen $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x}$, und $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $g(x) = x$, stetig aber unbeschränkt.

Weiter ist $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$; $h(x) = \frac{1}{x}$, stetig und erfüllt $h(x) > 0$ für alle $x \in [1, \infty)$. Trotzdem ist $\inf_{x \geq 1} h(x) = 0$.

Bei den folgenden Sätzen beschränken wir uns auf reelle Funktionen, da wir wesentlich die Ordnungstruktur auch im Urbild ausnutzen. Funktionen können Lücken im Bild aufweisen. Das kann bei Unstetigkeiten geschehen, wie z.B. bei $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, oder wenn D keine Intervall ist, wie bei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$. Wir sehen aber gleich, dass für stetige Funktionen f auf Intervallen das Bild wieder ein Intervall ist und somit alleine durch die Endpunkte bestimmt wird. Dies erlaubt es z.B. alle $y \in \mathbb{R}$ zu finden, für die die Gleichung $y = f(x)$ eine Lösung x besitzt.

Theorem 4.24 (Zwischenwertsatz). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt $f([a, b]) = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f] =: J$. Insbesondere gibt es für jedes $y \in J$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.*

Beweis. Nach Theorem 4.22 existieren Zahlen $x_\pm$ mit $f(x_-) = \min_{[a,b]} f$ und $f(x_+) = \max_{[a,b]} f$. Offenbar ist $f([a, b])$ in $[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$ enthalten. Sei nun umgekehrt y_0 ein Element dieses Intervalls. Wir konstruieren ein Urbild von y_0 unter f durch das "Zweiteilungsverfahren".

Es gilt $f(x_-) \leq y_0 \leq f(x_+)$. Es gelte $x_- \leq x_+$. (Andernfalls betrachte $-f$.) Setze $a_1 := x_-$ und $b_1 := x_+$. Definiere den Mittelwert $c_1 := (a_1 + b_1)/2$. Wenn $f(c_1) \geq y_0$ gilt, setzen wir $a_2 := a_1$ und $b_2 := c_1$. Im Falle $f(c_1) < y_0$, seien $a_2 := c_1$ und $b_2 := b_1$. Es gelten somit in beiden Fällen $a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1$, $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2$ und $f(a_2) \leq y_0 \leq f(b_2)$. Iterativ erhalten wir auf diese Weise für jedes $n \in \mathbb{N}$ Zahlen mit

$$a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1, \quad b_n - a_n = 2^{1-n}(b_1 - a_1), \quad f(a_n) \leq y_0 \leq f(b_n).$$

Wegen der Monotonie und Beschränktheit liefert Theorem 2.14 die Grenzwerte $a_n \to \alpha$ und $b_n \to \beta$ für $n \to \infty$. Aus der abgesetzten Gleichung folgt dann $\beta - \alpha = 0$ und damit $\alpha = \beta =: x_0$. Da f stetig ist, impliziert Satz 2.10 schließlich $y_0 = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$. □

Korollar 4.25 (Nullstellensatz). *Es sei $f \in [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a)f(b) \leq 0$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = 0$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ oder $f(b) \leq 0 \leq f(a)$, woraus die Ungleichungen $\min_{[a,b]} f \leq 0 \leq \max_{[a,b]} f$ folgen. Theorem 4.24 impliziert dann die Behauptung. □

Wir verallgemeinern nun den Zwischenwertsatz auf beliebige Intervalle.

Korollar 4.26 (Intervallsatz). *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. Wir nehmen an, $f(I)$ sei kein Intervall. Dann existieren Zahlen $a, b \in I$ mit $u := f(a) < f(b) =: v$ und ein Element y von $(u, v) \setminus f(I)$. Es sei etwa $a < b$.

Da $(u,v) \subseteq [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$ liefert Theorem 4.24 für die stetige Funktion $\hat{f} : [a,b] \to \mathbb{R}; \hat{f}(x) = f(x)$, ein $x \in [a,b]$ mit $\hat{f}(x) = f(x) = y$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $f(I)$ ein Intervall ist. Für $a > b$ verwendet man $[b,a]$ statt $[a,b]$. $\square$

Beispiel 4.27. a) Seien $k \in \mathbb{N}$ und $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}; f(x) = x^k$. Dann gilt $f([0,\infty)) = [0,\infty)$.

Beweis. Nach Beispiel 4.12 ist f stetig, also ist $f([0,\infty))$ ein Intervall. Weiter gelten $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ und $f(n) = n^k \to \infty$ für $n \to \infty$. Daraus folgt $f([0,\infty)) = [0,\infty)$. $\square$

b) Es gibt ein $x \in (0,1)$ mit $\exp(-x) = x$.

Beweis. Wir verwenden die stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}; f(x) = x - \exp(-x)$. Da $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = 1 - 1/\mathrm{e} > 0$, liefert der Zwischenwertsatz die Behauptung. $\square$

Definition 4.28. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* (strikt) wachsend*, wenn $f(x) \underset{(<)}{\leq} f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt, und* (strikt) fallend*, wenn $f(x) \underset{(>)}{\geq} f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt. Weiter ist f* (strikt) monoton*, wenn f (strikt) wächst oder (strikt) fällt.*

Es seien $D_+ = \mathbb{R}_+$, $D_- = \mathbb{R}_-$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$. Dann fällt f strikt auf D_+ und auf D_-, aber f ist auf D nicht monoton, da $f(y) > f(x)$ für alle $x < 0 < y$ gilt. Ferner wächst die Funktion $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, aber nicht strikt.

Bemerkung 4.29. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine strikt monotone Funktion. Dann ist f injektiv, sodass sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : \tilde{D} := f(D) \to \mathbb{R}; f^{-1}(y) = x$, besitzt (wobei $f(x) = y$). Dabei gilt $f^{-1}(\tilde{D}) = D$. Somit besitzt hier die Gleichung $f(x) = y$ für gegebenes $y \in f(D)$ genau eine Lösung, nämlich $x = f^{-1}(y) \in D$. Ferner wächst (bzw. fällt) f^{-1} strikt, wenn f strikt wächst (bzw. fällt).

Beweis. Wir müssen nur die letzte Behauptung zeigen. Sei f strikt wachsend. Wähle $y_1, y_2 \in f(D)$ mit $y_1 < y_2$. Dann existieren $x_j \in D$ mit $f(x_j) = y_j$ für $j \in \{1,2\}$. Wir nehmen an, es gälte $x_1 \geq x_2$. Da f wächst, folgt dann der Widerspruch $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$. Also wächst f^{-1} strikt. Man behandelt strikt fallende Funktionen analog. $\square$

In einer Übung wird gezeigt, dass eine injektive Funtion auf einem Intervall schon strikt monoton sein muss.

Während die Umkehrfuntion Monotonieeigenschaften erbt, gilt dies für die Stetigkeit im allgemeinen nicht. Sei zum Beispiel $D = [0,1) \cup [2,3]$ und $y = f(x) = x$ für $x \in [0,1)$ und $y = f(x) = x - 1$ für $x \in [2,3]$. Dann ist f strikt wachsend und stetig, aber $f^{-1} : [0,2] \to \mathbb{R}$ ist unstetig, da $x = f^{-1}(y) = y$ für $y \in [0,1)$ und $x = f^{-1}(y) = y + 1$ für $y \in [1,2]$ gelten.

Auf Intervallen ist die Umkehrfunktion sogar stetig, ohne dass man dies für f fordern müsste, wie der nächste Hauptsatz zeigt.

Theorem 4.30. *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ strikt wachsend (bzw. fallend). Dann ist $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ strikt wachsend (bzw. fallend) und stetig.*

Beweis. Nach Bemerkung 4.29 ist nur die Stetigkeit zu zeigen. Sei etwa f strikt wachsend. (Der andere Fall wird analog bewiesen.) Sei $y_0 \in f(I)$. Dann existiert eine Zahl x_0 in I mit $f(x_0) = y_0$. Wir nehmen zunächst an, dass x_0 kein Randpunkt ist. Dann existiert ein $r > 0$ mit $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq I$. Sei $\varepsilon \in (0, r]$. Da f strikt wächst, gelten die Ungleichungen $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$. Es gibt also ein $\delta_\varepsilon > 0$ mit

$$f(x_0 - \varepsilon) \leq y_0 - \delta_\varepsilon < y_0 + \delta_\varepsilon \leq f(x_0 + \varepsilon).$$

Sei nun $y \in f(I)$ mit $|y - y_0| \leq \delta_\varepsilon$. Dann liegt y in $[f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)]$. Da auch f^{-1} wächst, erhalten wir

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon)) = x_0 + \varepsilon.$$

Aus diesen Abschätzungen folgt

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| \leq \varepsilon$$

für alle $y \in f(I)$ mit $|y - y_0| \leq \delta_\varepsilon$. Satz 4.14 zeigt nun die Stetigkeit.

Es sei x_0 der linke Randpunkt von I. Wegen der Monotonie ist dann auch y_0 das Minimum von $f(I)$. Man ersetzt nun oben $x_0 - r$ und $x_0 - \varepsilon$ durch x_0, sowie $y_0 - \delta_\varepsilon$ durch y_0. Das Resultat folgt dann genauso. Entsprechend behandelt man einen rechten Randpunkt. □

Beispiel 4.31. Seien $k \in \mathbb{N}$ und $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^k$. Diese Funktion ist nach Satz 1.26 strikt wachsend und hat nach Beispiel 4.27 das Bild $[0, \infty)$. Theorem 4.30 besagt nun, dass f eine strikt wachsende und stetige Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ besitzt. Nach Lemma 1.24 gilt $f^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$. ◊

4.3. Gleichmäßige Konvergenz

Wir beweisen in diesem Abschnitt insbesondere Theorem 4.13, also die Stetigkeit von Potenzreihen $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$. Ihre Partialsummen $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ sind als Polynome auf $\mathbb{C}$ stetig und sie konvergieren für jedes feste $z \in B(0, \rho)$ für $n \to \infty$ gegen $f(z)$. Man könnte nun vermuten, dass diese beiden Eigenschaften alleine schon die Stetigkeit von f liefern. Dem ist aber nicht so, wie das nächste Beispiel zeigt. Das zweite widerlegt eine analoge Vermutung zur Beschränkheit.

1) Die Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = x^n$, sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig. Weiter existiert der Grenzwert $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ für jedes feste $x \in [0, 1]$. Trotzdem ist

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

unstetig in 1. Für die Punkte $x_n = (1 - \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} \in (0,1)$ gilt hierbei

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1 - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}$$

für allen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Somit konvergiert f_n nicht "gleichzeitig" in allen Punkten der Folge (x_n) für $n \to \infty$ gegen f.

2) Für festes $n \in \mathbb{N}$ sind die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}; \quad f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x}, & x > \frac{1}{n}, \end{cases}$$

stetig und beschränkt. Der Grenzwert $f(x) = \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ist aber unbeschränkt auf $\mathbb{R}_+$. Hier gilt sogar $f_n(1/n) = n \to \infty$.

In der nächsten Definition formalisieren wir zunächst die oben auftretende Konvergenz und führen dann eine stärkere Eigenschaft ein.

Definition 4.32. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f, f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$.*

a) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert punktweise *gegen f, wenn für jedes $z \in D$ die Aussage $f_n(z) \to f(z)$ für $n \to \infty$ gilt, also wenn*

$$\forall\, z \in D \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_{\varepsilon,z} \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N_{\varepsilon,z} : \quad |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

Man schreibt dann $f_n \to f$ (pktw.) *für $n \to \infty$.*

b) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmäßig *gegen f, wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N_\varepsilon : \quad \sup{}_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon. \tag{4.3}$$

Dies besagt gerade, dass

$$\|f_n - f\|_\infty := \sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Wir schreiben dann $f_n \to f$ (glm.) *für $n \to \infty$.*

Den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz werden wir in Analysis II in eine umfassendere Theorie einbetten und detaillierter untersuchen. Das Adjektiv "gleichmäßig" besagt üblicherweise, dass man einen Allquantor nach rechts an einem Existenzquantor vorbeiziehen kann, sodass die Existenzaussage unabhängig von der Allaussage wird. (Oben hängt N_ε nicht mehr von $z \in D$ ab.) Man beachte, dass ansonsten gleichmäßige Konvergenz nichts mit gleichmäßiger Stetigkeit zu tun hat! Wir formulieren ein "Majorantenkriterium" für die gleichmäßige Konvergenz.

Bemerkung 4.33. Seien $f_n, f : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gebe eine Nullfolge (a_n) mit $a_n \geq 0$ und $|f_n(z) - f(z)| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$. Dann folgt $\|f_n - f\|_\infty \leq a_n$ und somit konvergiert f_n gleichmäßig gegen f für $n \to \infty$. $\Diamond$

Der nächste Hauptsatz zeigt, dass gleichmäßige Konvergenz (im Gegensatz zur punktweisen Konvergenz) Stetigkeit und Beschränktheit erhält.

THEOREM 4.34. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f, f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die Funktionen f_n für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Sei jedes f_n beschränkt. Dann ist f beschränkt.

b) Sei jedes f_n stetig. Dann ist f stetig.

Teil b) dieses Theorem erlaubt es, die z- und n-Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{z\to z_0} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

zu vertauschen. Hier wird die dritte Gleichung durch das Theorem bewiesen, die anderen Identitäten folgen aus den Voraussetzungen. Wenn nur punktweise Konvergenz vorliegt, kann ein solches Vertauschen zu falschen Resultaten führen, wie etwa die obigen Beispiele belegen.

BEWEIS VON THEOREM 4.34. a) Sei $\varepsilon = 1$. Es gilt dann (4.3) mit dem Index $N_1 \in \mathbb{N}$. Aus (4.3) und der vorausgesetzten Beschränktheit von f_{N_1} schließen wir

$$|f(z)| \le |f(z) - f_{N_1}(z)| + |f_{N_1}(z)| \le 1 + \|f_{N_1}\|_\infty =: M < \infty$$

für alle $z \in D$. Damit ist a) gezeigt.

b) Es seien $z_j, z_0 \in D$ mit $z_j \to z_0$ für $j \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir fixieren die natürliche Zahl $N := N_\varepsilon$ aus (4.3). Da f_N stetig ist, gibt es einen Index $J_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass $|f_N(z_j) - f_N(z_0)| \le \varepsilon$ für alle $j \ge J_\varepsilon$ gilt. Sei $j \ge J_\varepsilon$. Aus (4.3) und der Abschätzung für f_N folgen die Ungleichungen

$$|f(z_j) - f(z_0)| \le |f(z_j) - f_N(z_j)| + |f_N(z_j) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| \le 3\varepsilon. \qquad \square$$

Für Reihen benötigen wir die folgenden Begriffe.

DEFINITION 4.35. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_k : D \to \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten die Partialsummen $s_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$ für $z \in D$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Die Folge $(s_n)_n$ heißt* Funktionenreihe *$\sum_k f_k$ auf D.*

a) Wenn $(s_n(z))_n$ für jedes $z \in D$ (absolut) konvergiert, so konvergiert $\sum_k f_k$ (absolut)*.*

b) Wenn die Funktionenfolge $(s_n)_n$ auf D gleichmäßig konvergiert, so konvergiert $\sum_k f_k$ gleichmäßig*.*

Auch in diesem Kontext gibt es ein Majorantenkriterium.

SATZ 4.36 (Weierstraß). *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_k : D \to \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Wenn $\sum_k \|f_k\|_\infty$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_k f_k$ gleichmäßig und absolut.*

BEWEIS. Seien $z \in D$ und $k, n \in \mathbb{N}$. Wegen der Ungleichung $|f_k(z)| \le \|f_k\|_\infty$ folgt die absolute Konvergenz aus Satz 3.12. Ferner liefert Bemerkung 3.11, dass

$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) - \sum_{k=0}^{n} f_k(z)\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty =: a_n.$$

Da nach Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt, zeigt Bemerkung 4.33 den Satz. $\square$

Wir beweisen nun Theorem 4.13.

Beispiel 4.37. Sei $f(z) = \sum_n a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Sei $r \in (0, \rho)$. Dann konvergiert diese Funktionenreihe auf $\overline{B}(0, r)$ gleichmäßig und absolut. Somit ist f auf $B(0, \rho)$ stetig (wobei $B(0, \infty) = \mathbb{C}$).

Beweis. Seien $|z| \leq r < \rho$. Nach Theorem 3.28 konvergiert $(s_n(z))_n$ absolut gegen $f(z)$. Setze $f_k(z) = a_k z^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Satz 2.29 impliziert weiter die Gleichung

$$\|f_k\|_\infty = \sup_{|z| \leq r} |a_k| \, |z|^k = |a_k| \sup_{|z| \leq r} |z|^k = |a_k| \, r^k.$$

Mit Satz 2.28 und der Definition 3.27 von ρ schließen wir

$$\varlimsup_{k \to \infty} \|f_k\|_\infty^{\frac{1}{k}} = \varlimsup_{k \to \infty} r \sqrt[k]{|a_k|} = r/\rho < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium Satz 3.16 konvergiert also die Reihe $\sum_k \|f_k\|_\infty$. Nach Satz 4.36 ist f stetig auf $\overline{B(0, r)}$. Da $r < \rho$ beliebig ist, folgt die Behauptung. □

4.4. Die Exponentialfunktion und ihre (reelle) Verwandtschaft

Auf der Grundlage der in diesem Kapitel entwickelten Theorie untersuchen wir nun eine Reihe der zentralen (reellen) Funktionen in der Analysis. Wir beginnen mit der Exponentialfunktion und wiederholen ihre Definition

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

aus Beispiel 3.25. Diese Potenzreihe impliziert die Ungleichungen

$$\exp(0) = 1 < 1 + x < \exp(x) < \exp(y)$$

für alle $y > x > 0$. Mittels der Gleichung $\exp(-r) = 1/\exp(r)$ für $r \in \mathbb{R}$, siehe Beispiel 3.25, erhalten wir daraus

$$0 < \exp(-y) < \exp(-x) < \frac{1}{1+x} < 1$$

für alle $-y < -x < 0$. Aus diesen Relationen und Korollar 4.26 folgen die Aussagen

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \quad \text{wächst strikt}, \qquad \lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0, \tag{4.4}$$
$$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+, \qquad \exp(x) > 1 \iff x > 0, \qquad \exp(0) = 1, \qquad \exp(1) = \mathrm{e}.$$

Bemerkung 4.29 erlaubt nun die folgende wichtige Definition.

Definition 4.38. *Die Umkehrfunktion von* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ist der (natürliche)* Logarithmus $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Gemäß Theorem 4.30 und (4.4) besitzt der Logarithmus die Eigenschaften

$$\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{ist strikt wachsend, stetig und bijektiv}, \qquad \ln(1) = 0, \qquad \ln(\mathrm{e}) = 1,$$
$$\lim_{y \to \infty} \ln y = \infty, \qquad \lim_{y \to 0^+} \ln y = -\infty, \qquad \ln y > 0 \iff y > 1. \tag{4.5}$$

Mit Hilfe der Exponentialfunktion und des Logarithmus können wir nun allgemeine Potenzen effizienter als in Definition 1.25 einführen.

DEFINITION 4.39. *Für* $x \in \mathbb{R}$ *und* $a > 0$ *definiert man die* Potenz $a^x := \exp(x \ln a)$. *Speziell gilt* $\mathrm{e}^x = \exp(x)$, *und wir schreiben auch* $\mathrm{e}^z := \exp(z)$ *für* $z \in \mathbb{C}$.

Als Verkettung stetiger Funktionen sind nach Satz 4.11 die Abbildungen $a \mapsto a^x$ auf $\mathbb{R}_+$ und $x \mapsto a^x$ auf $\mathbb{R}$ stetig. Mittels (4.4) und (4.5) sieht man ferner, dass

$$\begin{aligned} &\text{die Funktion} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \longmapsto a^x \quad &&\begin{cases} \text{strikt wächst,} & \text{wenn } a > 1, \\ \text{strikt fällt,} & \text{wenn } a < 1, \end{cases} \\ &\text{und die Funktion} \quad \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R};\ a \longmapsto a^x \quad &&\begin{cases} \text{strikt wächst,} & \text{wenn } x > 0, \\ \text{strikt fällt,} & \text{wenn } x < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Wir können nur die *Potenz-* und *Logarithmusgesetze* beweisen.

BEMERKUNG 4.40. Es seien $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Wir setzen $u = \ln a$ und $v = \ln b$, sodass $a = \mathrm{e}^u$ und $b = \mathrm{e}^v$ gelten. Das Exponentialgesetz in Beispiel 3.25 und die Definitionen 4.38 und 4.39 implizieren dann folgenden Aussagen.

a) $\ln(ab) = \ln(\mathrm{e}^u \mathrm{e}^v) = \ln e^{u+v} = u + v = \ln a + \ln b$.

b) $\ln(a^x) = \ln \mathrm{e}^{x \ln a} = x \ln a$.

c) $a^x b^x = \mathrm{e}^{x \ln a}\, \mathrm{e}^{x \ln b} = \exp(x(\ln a + \ln b)) = \mathrm{e}^{x \ln(ab)} = (ab)^x$.

d) $a^x a^y = \exp(x \ln a + y \ln a) = \exp((x + y) \ln a) = a^{x+y}$.

e) $(a^x)^y = \exp(y \ln a^x) = \mathrm{e}^{xy \ln a} = a^{xy}$.

f) Sei $x = m/n \in \mathbb{Q}$ für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund von Beispiel 3.25 stimmen die Definition von a^m als m-faches Produkt (und Kehrwert, wenn $m < 0$) mit Definition 4.39 überein. Nach e) gelten weiter $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$ und $a^x = (a^{\frac{1}{n}})^m$. Somit fallen Definition 4.39 und Definition 1.25 für rationale x zusammen.

g) Wegen $\ln a^x = x \ln a$, ist die Umkehrfunktion von $x \mapsto y = a^x$ durch $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R};\ y \mapsto x = \frac{1}{\ln a} \ln y$, gegeben. ◊

Wir diskutieren nun in mehreren Schritten Monotonieverhalten, Periodizität und Nullstellen der *trigonometrischen* Funktionen sin und cos. Weiter stellen wir den Zusammenhang zur Elementargeometrie her.

1) Sinus und Cosinus wurden in Beispiel 3.31 durch ihre Potenzreihen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \qquad \text{und} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

definiert. Diese Darstellungen implizieren nach (3.7) und Satz 3.32, dass

$$\begin{aligned} &\sin 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1, \qquad \sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x, \\ &\sin x = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \qquad \cos x = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in (0,2]$ erhalten wir ferner

$$\frac{x^k}{k!} - \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = x^k \, \frac{(k+2)(k+1) - x^2}{(k+2)!} \geq x^k \, \frac{6-4}{(k+2)!} > 0.$$

Damit und den obigen Potenzreihen folgen für alle $x \in (0,2]$ die Ungleichungen

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots > 0, \tag{4.7}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}. \tag{4.8}$$

2) Seien $0 \leq x < y \leq 2$. Korollar 3.33 und (4.7) zeigen die Abschätzung

$$\cos y - \cos x = -2 \sin\Big((y+x)/2\Big) \, \sin\Big((y-x)/2\Big) < 0.$$

Also ist cos auf $[0,2]$ strikt fallend. Wir haben ferner $\cos 0 = 1$ und nach (4.8) auch $\cos 2 < -\frac{1}{3}$. Somit zeigt der Nullstellensatz Korollar 4.25, dass es (genau) ein $\hat{x} \in (0,2)$ mit $\cos \hat{x} = 0$ gibt. Wir definieren damit

$$\pi := 2\hat{x} \approx 3,1415.$$

Also gelten $\cos(\pi/2) = 0$ und $\cos x > 0$ für alle $x \in [0, \pi/2)$, sowie $\cos([0,\pi/2]) = [0,1]$ nach Korollar 4.26.

3) Teil 1) liefert die Gleichung $\sin x = |\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ für $x \in [0, \pi/2]$. Mit Teil 2) und Beispiel 4.31 folgern wir daraus, dass sin auf $[0, \pi/2]$ strikt wächst. Außerdem ergibt sich

$$\sin(\pi/2) = \sqrt{1 - \cos^2(\pi/2)} = 1 \qquad \text{und} \qquad \sin([0, \pi/2]) = [0,1].$$

4) Es folgt nun $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \cos(\pi/2) + \mathrm{i} \sin(\pi/2) = \mathrm{i}$ und mit Beispiel 3.25 weiter $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})^{-1} = -\mathrm{i}$. Das Exponentialgesetz in Beispiel 3.25 zeigt dann

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} k \frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} \frac{\pi}{2}} \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} \frac{\pi}{2}} = (\pm \mathrm{i})^k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ (mit einem k-fachen Produkt) und damit speziell

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} \frac{\pi}{2}} = \pm \mathrm{i}, \qquad \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi} = -1, \qquad \mathrm{e}^{\pm \frac{3\pi \mathrm{i}}{2}} = \mp \mathrm{i}, \qquad \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}} = 1.$$

5) Seien $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$. Wieder mit dem Exponentialgesetz berechnen wir

$$\exp(\mathrm{i}(x + 2\pi k)) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \exp(2\pi \mathrm{i})^k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.$$

Indem wir den Real- und Imaginärteil nehmen, erhalten wir

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x \qquad \text{und} \qquad \sin(x + 2\pi k) = \sin x, \tag{4.9}$$

sodass Cosinus und Sinus 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ sind. Ähnlich sieht man $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x \pm \pi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x + \pi/2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ und damit die Verschiebungsformeln

$$\begin{aligned} \cos(x \pm \pi) &= -\cos x, & \sin(x \pm \pi) &= -\sin x, \\ \cos(x + \tfrac{\pi}{2}) &= -\sin x, & \sin(x + \tfrac{\pi}{2}) &= \cos x \end{aligned} \tag{4.10}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus dem Verhalten auf $[0, \pi/2]$, (3.7) und (4.10) folgern wir die gewünschten Eigenschaften von sin und cos. Wir formulieren sie auf den Intervallen $[-\pi/2, 3\pi/2]$ bzw. $[0, 2\pi]$; aufgrund der 2π-Periodizität gelten sie aber entsprechend auf $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ bzw. $[2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung 4.41. a) Sinus wächst strikt auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit Bild $[-1, 1]$ und fällt strikt auf $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Er hat hier genau die Nullstellen 0 und π, ist positiv auf $(0, \pi)$ und negativ auf $[-\pi/2, 0) \cup (\pi, 3\pi/2]$.

b) Cosinus fällt strikt auf $[0, \pi]$ mit Bild $[-1, 1]$ und wächst strikt auf $[\pi, 2\pi]$. Er hat hier genau die Nullstellen $\pi/2$ und $3\pi/2$, ist positiv auf $[0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi]$ und negativ auf $(\pi/2, 3\pi/2)$.

c) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ein Element des Einheitskreises. Dann gibt es genau eine Zahl $x \in [0, 2\pi)$ mit $z = e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$. Somit entspricht x dem Winkel, den die x-Achse im Gegenuhrzeigersinn mit z einschließt. Für $x \in (0, \pi/2)$ bilden 0, z und $\cos x$ ein Dreieck mit rechten Winkel bei $\cos x$ und den Seitenlängen 1 der Hypotenuse, $\cos x$ der Ankathede und $\sin x$ der Gegenkathede.

Beweis. Nach b) gibt es genau eine Zahl $x_1 \in [0, \pi]$ mit $\cos x_1 = \operatorname{Re} z \in [-1, 1]$ und, falls $z \notin \mathbb{R}$, eine weitere Lösung x_2 in $(\pi, 2\pi)$. Wir wählen $x = x_1$ für $\operatorname{Im} z \geq 0$ und $x = x_2$ für $\operatorname{Im} z < 0$. Weiter gilt $|\operatorname{Im} z| = \sqrt{1 - (\operatorname{Re} z)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 x} = |\sin x|$. Nach der Wahl von x erhalten wir dann $\operatorname{Im} z = \sin x$. □

Wir geben noch einige spezielle Funktionswerte von Sinus und Cosinus an:[3]

$$\sin \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2}, \quad \sin \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}. \tag{4.11}$$

Wegen $\cos^2 + \sin^2 = 1$, reicht es cos zu betrachten. Ähnlich wie oben erhalten wir

$$\mathrm{i} = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \left(\cos \tfrac{\pi}{6} + \mathrm{i} \sin \tfrac{\pi}{6}\right)^3 = \cos^3 \tfrac{\pi}{6} + 3\mathrm{i} \cos^2 \tfrac{\pi}{6} \sin \tfrac{\pi}{6} - 3 \cos \tfrac{\pi}{6} \sin^2 \tfrac{\pi}{6} - \mathrm{i} \sin^3 \tfrac{\pi}{6}.$$

Wenn wir den Realteil nehmen und durch $\cos \frac{\pi}{6}$ dividieren, folgen die Gleichungen

$$\cos^2 \tfrac{\pi}{6} = 3 \sin^2 \tfrac{\pi}{6} = 3 - 3 \cos^2 \tfrac{\pi}{6} \qquad \text{und somit} \qquad \cos^2 \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{3}{4}.$$

Die anderen Behauptungen zeigt man entsprechend, wobei man von $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/4}$ bzw. $-1 = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/3}$ ausgeht. Wir definieren zwei weitere abgeleitete Winkelfunktionen.

Definition 4.42. *Der* Tangens *ist durch* $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ *für* $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *und der* Kotangens *durch* $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ *für* $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *gegeben.*

Nach Satz 4.11 und (4.9) sind tan und cot auf ihren Definitionsbereichen stetig und π-periodisch. Aus (4.11) folgen die speziellen Funktionswerte

$$\tan \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan \tfrac{\pi}{4} = 1, \quad \tan \tfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}. \tag{4.12}$$

[3] Diese Aussage und (4.12) wurden in der Vorlesung weggelassen.

Sei $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Dann gilt $\tan(-x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$. Weiter folgen aus Bemerkung 4.41 für $0 \leq x < y < \pi/2$ die Ungleichungen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y.$$

Zudem liefern die Bemerkungen 4.6 und 4.41, dass

$$\tan x = \tfrac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow \infty \qquad \text{für} \quad x \to \tfrac{\pi}{2} \quad \text{mit} \quad x < \tfrac{\pi}{2}.$$

Also ist $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ strikt wachsend und bijektiv. Dies und Bemerkung 4.41 erlaubt uns die folgende Definition.

Definition 4.43. *Die Umkehrfunktionen von*

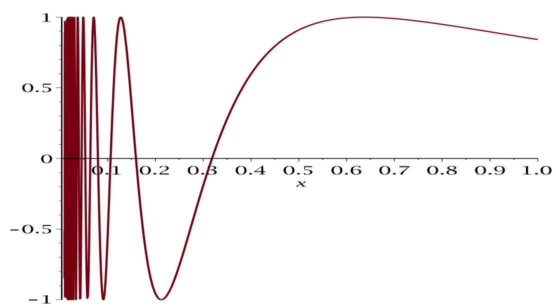
$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1,1], \quad \cos : [0,\pi] \to [-1,1] \quad \textit{und} \quad \tan : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$$

sind die Arcusfunktionen

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \quad \arccos : [-1,1] \to [0,\pi] \quad \textit{und} \quad \arctan : \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

Aufgrund von Theorem 4.30 und den Eigenschaften von sin, cos und tan sind arcsin und arctan strikt wachsend und arccos strikt fallend. Alle drei Funktionen sind stetig und bijektiv.

Beispiel 4.44. Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R};\ f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Diese Funktion hat keine stetige Fortsetzung in 0. Genauer gesagt, gibt es für jedes $y \in [-1,1]$ die positive Nullfolge $(x_n)_n = ((2\pi n + \arcsin y)^{-1})_n$ mit $f(x_n) = y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das folgende Schaubild zeigt den Verlauf von f für $x \in [0.02, 1]$. ♢



KAPITEL 5

Differentialrechnung

Stets sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, das mehr als einen Punkt enthält. In diesem Kapitel werden Ableitungen von Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ definiert, diskutiert und angewendet. Die Ableitung von f in $x_0 \in I$ liefert dabei gerade die Steigung der Tangente an den *Graphen* $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

5.1. Ableitungsregeln

DEFINITION 5.1. *Sei $x_0 \in I$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* in x_0 differenzierbar*, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \tag{5.1}$$

existiert. Die Zahl $f'(x_0)$ bezeichnet man dabei als Ableitung *von f in x_0. Wenn f in allen $x_0 \in I$ differenzierbar ist, dann nennt man f* differenzierbar auf I *und die Funktion*

$$f' : I \to \mathbb{R}; \qquad x \longmapsto f'(x),$$

ist die Ableitung *von f. Falls f' auf I differenzierbar ist, definiert man (falls existent) die zweite Ableitung in x_0 durch $f''(x_0) := (f')'(x_0)$ und iterativ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die n–*te Ableitung *in x_0 durch*

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$

Wenn diese für alle $x_0 \in I$ existiert, erhält man die n–te Ableitung $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ auf I. Analog erklärt man die rechts- *und* linksseitigen Ableitungen *in x_0 durch*

$$\frac{\mathrm{d}^{\pm} f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{5.2}$$

(soweit sie existieren).

In den Randpunkten von I (wenn es solche gibt), fallen (5.1) und (5.2) zusammen. Der "Differenzenquotient" $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist in diesen Formeln für $x \in I \setminus \{x_0\}$ definiert. Man beachte, dass hier im Grenzwert $x \to x_0$ der Nenner verschwindet, sodass auch der Zähler "mindestens so schnell" gegen 0 gehen muss. Wir diskutieren zwei Motivationen für den Begriff der Ableitung.

1) Sei f in x_0 differenzierbar und sei $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ für $x \in \mathbb{R}$ die *Tangente* an f bei x_0. Sei $g(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ für $x \in \mathbb{R}$ und ein $a \neq f'(x_0)$ eine andere Gerade durch $(x_0, f(x_0))$. Für $x \to x_0$ konvergieren dann

$$\left|\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}\right| = \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a\right| \longrightarrow |f'(x_0) - a| > 0,$$
$$\left|\frac{f(x) - t(x)}{x - x_0}\right| = \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| \longrightarrow |f'(x_0) - f'(x_0)| = 0.$$

Satz 4.4 mit $\varepsilon := |f'(x_0) - a|/3$ liefert nun so ein $\delta > 0$, dass

$$\left|\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}\right| \geq |f'(x_0) - a| - \varepsilon = 2\varepsilon > \varepsilon > \left|\frac{f(x) - t(x)}{x - x_0}\right|$$

für alle $x \in I$ mit $0 < |x - x_0| \leq \delta$ gilt. Für diese x folgt also $|f(x) - g(x)| > |f(x) - t(x)|$, sodass die Tangente die beste lineare Approximation an f in der Nähe von x_0 ist.

2) Sei $u(t)$ der Wert einer Größe (z.B. Stoffmenge oder Ort) zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ und sei $h \neq 0$. Dann ist $\frac{1}{h}(u(t + h) - u(t))$ die mittlere Änderung von u im Intervall $[t, t + h]$, bzw. $[t + h, t]$. Somit ist $u'(t)$ die momentane Änderungsgeschwindigkeit der Größe u zur Zeit t (soweit existent). Auf dieser und ähnlichen Interpretationen beruht die Bedeutung der Ableitung in den Anwendungen.

Bevor wir die grundlegenden Eigenschaften der Ableitung herleiten, besprechen wir einige Beispiele, die man ohne weitere Theorie behandeln kann.

Beispiel 5.2. a) Es seien $m, a \in \mathbb{R}$ fest gegeben und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = mx + a$. Dann existiert $f'(x) = m$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da der Differenzenquotient durch

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{m(x + h) + a - mx - a}{h} = m$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ bestimmt ist.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = |x|$. Dann existieren die halbseitigen Ableitungen $\frac{\mathrm{d}^{\pm} f}{\mathrm{d}x}(0) = \pm 1$, aber f ist in 0 nicht differenzierbar. Dies folgt aus der Gleichung

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, & x > 0, \\ \frac{-x}{x} = -1, & x < 0. \end{cases}$$

c) Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{x}$. Dann existiert $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x > 0$, aber f ist bei 0 nicht differenzierbar.

Beweis. Seien $x_0 > 0$ und $x \geq 0$ mit $x \neq x_0$. Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x - x_0}{x - x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}.$$

Im Grenzwert $x \to x_0$ erhalten wir die Ableitung $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Für $x_0 = 0$ divergiert aber der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow \infty \qquad \text{für } x \to 0^+. \qquad \square$$

Zunächst zeigen wir, dass Differenzierbarkeit eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit ist. Umgekehrt sind die Funktionen in Beispiel 5.2b) und c) zwar stetig, aber in 0 nicht differenzierbar.

Satz 5.3. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in einem $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann ist f in x_0 stetig.*

Beweis. Sei $x \in I \setminus \{x_0\}$. Die Differenzierbarkeit von f und Satz 4.5 implizieren

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,(x - x_0) \longrightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

für $x \to x_0$, sodass f bei x_0 stetig ist. $\square$

Der nächste Satz beschreibt, wie die Ableitung zur algebraischen Struktur von $\mathbb{R}$ passt. Dies ist etwas komplexer als in Satz 4.5 für den Grenzwert selbst.

Satz 5.4. *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in einem $x_0 \in I$ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Es existiert $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$.

b) Es existiert $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. (Produktregel)

c) Wenn zusätzlich $g(x_0) \neq 0$ ist, dann existieren

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2},$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

Beweis. Es seien $x \in I \setminus \{x_0\}$ mit $x \to x_0$. Aufgrund der Voraussetzung und Satz 5.3 strebt dann $g(x)$ gegen $g(x_0)$. Diese Beobachtung, die Annahmen und Satz 4.5 implizieren ferner die in a) und b) behaupteten Limiten

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha f(x) + \beta g(x) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} &= \alpha\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&\longrightarrow \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0), \\
\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,g(x) + f(x_0)\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&\longrightarrow f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

Sei nun $g(x_0) \neq 0$. Gemäß Satz 4.5 gibt es dann so einen Radius $r > 0$, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| \leq r$ gilt. Wie oben erhalten wir damit den ersten Teil von c) mit der Rechnung

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{g(x)g(x_0)} \longrightarrow -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Mit Aussage b) folgt daraus auch der zweite Teil von c). □

BEISPIEL 5.5. a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und den Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ definieren wir das Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $p(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$. Dann ist p differenzierbar mit der Ableitung $p'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1$ für $x \in \mathbb{R}$.

BEWEIS. Seien $x \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$. Mittels Beispiel 0.3 berechnen wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\Big((x+h)^n - x^n\Big) - nx^{n-1} &= \frac{1}{h}\Big(x^n + nx^{n-1}h + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k - x^n\Big) - nx^{n-1}\\ &= \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

für $h \to 0$, sodass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$ gilt. Die Behauptung folgt dann aus Satz 5.4. □

b) Seien p und $q \neq 0$ Polynome. Gemäß a) und Satz 5.4 ist dann die rationale Funktion $f = \frac{p}{q}$ auf $\{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ differenzierbar. ◊

Es folgen zwei weitere wichtige Ableitungsregeln zur Komposition und der Umkehrung von Abbildungen. Es sei betont, dass diese und die obigen Regeln von zentraler Bedeutung für die Analysis und ihre Anwendungen sind!

SATZ 5.6 (Kettenregel). *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ in einem $x_0 \in I$ und $g : J \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ differenzierbar, wobei J ein Intervall mit $f(I) \subseteq J$ sei. Dann ist die Funktion $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar mit der Ableitung*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

BEWEIS. Es seien $x_n \in I\setminus\{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Gemäß Voraussetzung und Satz 5.3 konvergiert $(f(x_n))_n$ gegen $f(x_0)$. Die Voraussetzung und Satz 4.5 implizieren nun

$$\begin{aligned}\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \begin{cases} 0, & f(x_n) = f(x_0),\\ \frac{g(f(x_n))-g(f(x_0))}{f(x_n)-f(x_0)}\,\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x-x_0}, & f(x_n) \neq f(x_0),\end{cases}\\ &\longrightarrow\ g'(f(x_0))f'(x_0), \qquad n \to \infty.\end{aligned}$$

Beim Grenzwert haben wir dabei verwendet, dass $f'(x_0) = 0$ gilt, wenn der erste Fall unendlich oft auftritt, also $f(x_{n_j})$ gleich $f(x_0)$ für eine Teilfolge $(x_{n_j})_j$ ist. □

Bei den Anwendung der Ketten- und Produktregel muss man zunächst Abbildungen finden, aus denen die gegebene Funktion zusammengesetzt ist und deren Ableitungen man kennt.

Beispiel 5.7. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, ist differenzierbar mit $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es gilt $f = h \circ g$ für die Funktionen $g : \mathbb{R} \to [1, \infty)$; $y = g(x) = 1 + x^2$, und $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$; $h(y) = \sqrt{y}$. Diese besitzen die Ableitungen $g'(x) = 2x$ und $h'(y) = (2\sqrt{y})^{-1}$ nach Beispiel 5.2. Gemäß der Kettenregel ist dann f für $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\, g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,. \qquad \square$$

Satz 5.8 (Umkehrregel). *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ strikt monoton und stetig, sowie differenzierbar in einem $x_0 \in I$, wobei $f'(x_0) \neq 0$ gelte. Dann ist die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis. Aufgrund der Stetigkeit von f, ist $f(I)$ nach Korollar 4.26 ein Intervall. Sei $y = f(x) \in f(I) \setminus \{y_0\}$ mit $y \to y_0$. Da f strikt monoton ist, existiert die stetige und injektive Umkehrabbildung f^{-1} gemäß Theorem 4.30. Daraus folgt die Konvergenz $x = f^{-1}(y) \to x_0 = f^{-1}(y_0)$ und dass $x \neq x_0$ ist. Wegen $f'(x_0) \neq 0$, liefert Satz 4.5 schließlich

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \;\longrightarrow\; \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\,. \qquad \square$$

Beispiel 5.9. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^n$, für ein festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Nach Beispiel 4.31 existiert die Umkehrabbildung $w := f^{-1} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$. Die Funktion w ist differenzierbar mit $w'(y) = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$ für alle $y > 0$.

Beweis. Sei $x > 0$ und $y = x^n$. Dann gilt $x = y^{1/n}$. Nach Beispiel 5.5 besitzt f die Ableitung $f'(x) = nx^{n-1} > 0$. Die Umkehrregel zeigt nun die Differenzierbarkeit von w und die Gleichung

$$w'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}\, y^{\frac{1}{n}-1}. \qquad \square$$

Auf der Grundlage tiefer liegender Resultate werden wir in Theorem 6.22 sehen, wie man Potenzreihen ableiten kann. Wir differenzieren aber jetzt schon die Potenzreihen exp, sin und cos mit einem direkten Zugang. Anschließend können wir dann den Tangens, den Logarithmus und die allgemeine Potenz behandeln.

Beispiel 5.10. a) Seien $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Dann existiert $f'(x) = a\mathrm{e}^{ax}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und speziell ist $\exp' = \exp$ auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Es seien $x \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$. Mittels Beispiel 3.25 berechnen wir

$$\left|\frac{1}{h}\Big(\mathrm{e}^{a(x+h)} - \mathrm{e}^{ax}\Big) - a\mathrm{e}^{ax}\right| = |a|\,\mathrm{e}^{ax}\left|\frac{1}{ah}\Big(\mathrm{e}^{ah} - 1\Big) - 1\right| = |a|\,\mathrm{e}^{ax}\left|\frac{1}{ah}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ah)^k}{k!} - 1\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= |a|\,\mathrm{e}^{ax}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ah)^{k-1}}{k!}-1\right| = |a|\,\mathrm{e}^{ax}\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(ah)^{k-1}}{k!}\right| \\
&= |a|\,\mathrm{e}^{ax}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(ah)^{j+1}}{(j+2)!}\right| = |h|\,|a|^2\,\mathrm{e}^{ax}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(ah)^{j}}{(j+2)!}\right| \\
&\leq |h|\,|a|^2\,\mathrm{e}^{ax}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|ah|^j}{j!} = |h|\,|a|^2\,\mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{|ah|} \\
&\longrightarrow\ 0, \qquad h \to 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

b) Es existieren die Ableitungen $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Als Vorbetrachtung bemerken wir, dass man auch für Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$ die Ableitung $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))$ definieren kann, wenn der Grenzwert in $\mathbb{C}$ existiert. Weiter existiert dann die reelle Ableitung

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{Re} f)(x) &= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{h}\left(\operatorname{Re} f(x+h) - \operatorname{Re} f(x)\right) = \lim_{h\to 0}\operatorname{Re}\left(\tfrac{1}{h}\left(f(x+h)-f(x)\right)\right) \\
&= \operatorname{Re} f'(x),
\end{aligned}
$$

und entsprechend für $\operatorname{Im} f$. Hierbei haben wir Satz 4.5 verwendet. Man sieht ferner wie in a), dass die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ besitzt.

Mit der Eulerformel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ in Satz 3.32 gelten $\cos x = \operatorname{Re}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ und $\sin x = \operatorname{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, sodass die Gleichungen $\cos'(x) = \operatorname{Re}(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \mathrm{i}^2\sin x = -\sin x$ und $\sin'(x) = \operatorname{Im}(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \cos x$ folgen. $\square$

c) Die Funktion $\tan = \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{R}\setminus\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, siehe Definition 4.42, ist differenzierbar mit der Ableitung

$$
\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},
$$

wobei wir die Quotientenregel, Teil b) und Satz 3.32 benutzt haben.

d) Der Logarithmus $\ln = \exp^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ besitzt die Ableitung $\ln'(y) = \frac{1}{y}$ für $y > 0$, vergleiche Definition 4.38.

Beweis. Sei $y = \mathrm{e}^x > 0$ für $x = \ln y \in \mathbb{R}$. Da $\exp'(x) = \mathrm{e}^x > 0$ ist, liefert die Umkehrregel die Ableitung $\ln'(y) = \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{y}$. $\square$

e) Gemäß Definition 4.39 sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a\ln x}$, für ein festes $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist f differenzierbar mit $f'(x) = ax^{a-1}$ für alle $x > 0$.

Beweis. Wir schreiben $f = \exp\circ g$ für die Funktion $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $g(x) = a\ln x$. Da $g'(x) = a/x$ nach d) gilt, folgern wir aus der Kettenregel, dass f differenzierbar ist und die Ableitung $f'(x) = \mathrm{e}^{a\ln x}\frac{a}{x} = ax^{a-1}$ für $x > 0$ besitzt. $\square$

Beispiel 5.11. Die Funktion

$$
f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}
$$

ist gemäß Produkt- und Kettenregel differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Ableitung

$$f'(x) = 2x \cos \tfrac{1}{x} - x^2 \sin(\tfrac{1}{x})\,(-\tfrac{1}{x^2}) = 2x \cos \tfrac{1}{x} + \sin \tfrac{1}{x}$$

für $x > 0$. Auch bei $x = 0$ besitzt f die Ableitung $f'(0) = 0$, da

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| x \cos \tfrac{1}{x} \right| \le |x| \;\longrightarrow\; 0$$

für $x \to 0$. Allerdings konvergiert $f'(x)$ für $x \to 0^+$ **nicht**, siehe Beispiel 4.44. Somit ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unstetig. $\Diamond$

Die nächste Definition schließt solche unangenehmen Funktionen aus.

Definition 5.12. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* stetig differenzierbar*, wenn f auf I differenzierbar und f' auf I stetig ist. Entsprechend definiert man n–*fach stetig differenzierbare *Funktionen für $n \in \mathbb{N}$. Man schreibt $C^n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } n\text{–mal stetig differenzierbar}\}$ und $C^\infty(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I)$.*

Wir bemerken, dass $C^n(I)$ ein Vektorraum und die Abbildung $D : C^1(I) \to C(I)$; $Df = f'$, linear ist (siehe Sätze 5.4 und 4.11).

5.2. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Ableitungen erlauben weitgehende Aussagen über das qualitative Verhalten von Funktionen, wobei die resultierenden Bedingungen oft vergleichsweise leicht nachzuprüfen sind. Wir beginnen mit einer grundlegenden Definition.

Definition 5.13. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $x_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f hat ein* lokales Minimum *(*Maximum*) in x_0, wenn es so ein $r > 0$ gibt, dass $f(x_0) \underset{(\ge)}{\le} f(x)$ für alle $x \in D \cap B(x_0, r)$ gilt. In beiden Fällen spricht man von einem* Extremum*. Man nennt x_0 dann* Minimalstelle *(*Maximalstelle*). Das Extremum heißt* global*, wenn die Gleichung $f(x_0) \underset{(\ge)}{\le} f(x)$ sogar für alle $x \in D$ gilt.*

Der folgende Satz zeigt eine wichtige notwendige Bedingung für Extrema in einem offenen Intervall.

Satz 5.14. *Sei $-\infty \le a < b \le \infty$. Die differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze ein lokales Extremum in $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Seien x_0 eine lokale Maximalstelle, $r > 0$ wie in Definition 5.13 und $\delta := \min\{x_0 - a, b - x_0, r\} > 0$, wobei $x_0 - (-\infty)$ und $\infty - x_0$ gleich ∞ gesetzt werden. Dann liegt $J := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ in (a, b) und es gilt $f(x) \le f(x_0)$ für alle $x \in J$. Daraus folgen die Ungleichungen

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \ge 0, & x < x_0, \\ \le 0, & x > x_0, \end{cases}$$

für $x \in J \setminus \{x_0\}$. Im Grenzwert $x \to x_0^{\pm}$ liefert dann Satz 4.5 die beiden Relationen $f'(x_0) \geq 0$ und $f'(x_0) \leq 0$, woraus die Behauptung folgt.

Wenn x_0 eine lokale Minimalstelle ist, dann hat $-f$ ein lokales Maximum in x_0. Der erste Schritt zeigt dann $-f'(x_0) = 0$ und damit die Behauptung. □

In Satz 5.14 ist die Implikation "$\Leftarrow$" im Allgemeinen falsch. So besitzt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$, bei $x_0 = 0$ kein Extremum, obwohl $f'(0) = 0$ gilt. Man beachte, dass Satz 5.14 keine Aussage über Randextrema macht. Diese müssen getrennt behandelt werden.

Das nächste Beispiel zeigt, wie das obige Kriterium und der Satz von Maximum (Theorem 4.22) es oft ermöglichen, Extrema zu berechnen ohne höhere Ableitungen zu bemühen, vergleiche Korollar 5.18. Weiter kann Satz 5.14 die Eindeutigkeit lokaler Extrema oder von Extremstellen implizieren.

Beispiel 5.15. a) Die Funktion $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ hat das globale Maximum $\frac{1}{\mathrm{e}}$ und das globale Minimum 0. Diese werden nur bei $x_1 = 1$ bzw. $x_0 = 0$ angenommen. Es gibt keine weiteren lokalen Extrema. Ferner gilt $f([0, \infty)) = [0, \frac{1}{\mathrm{e}}]$.

Beweis. Es gelten offenbar $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x > 0$, sodass $x_0 = 0$ die einzige globale Minimalstelle ist.

Wenn f eine weitere lokale Extremstelle x_1 in $\mathbb{R}_+$ haben sollte, dann genügt diese nach Satz 5.14 der Gleichung $0 = f'(x_1) = \mathrm{e}^{-x_1} - x_1\mathrm{e}^{-x_1}$, woraus $x_1 = 1$ folgt.

Wir sehen unten in Beispiel 5.23, dass $f(x)$ für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Also finden wir ein $b > 1$ derart, dass $f(x) < f(1) = 1/\mathrm{e}$ für alle $x \geq b$ gilt. Nach Theorem 4.22 besitzt f auf $[0, b]$ ein Maximum. Wegen des Verhaltens von f in 0 und auf $[b, \infty)$ wird dieses Maximum in einer Stelle $\xi \in (0, b)$ angenommen, und es ist global auf $[0, \infty)$. Gemäß der obigen Überlegung ist $\xi = x_1 = 1$. Somit besitzt f bei 1 ein globales Maximum und es gibt neben 0 und 1 keine weiteren lokalen Extremstellen von f. Die letzte Aussage folgt dann aus dem Intervallsatz Korollar 4.26. □

b) Die Funktion cos besitzt genau die globalen Maxima 1 bei $2k\pi$ und die globalen Minima -1 bei $(2k+1)\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Bei sin liegen diese bei $(2k + \frac{1}{2})\pi$, bzw. $(2k + \frac{3}{2})\pi$. Diese Eigenschaften folgen aus Bemerkung 4.41 und Gleichung (4.9). ♢

Das nächste Theorem basiert auf Theorem 4.22 und Satz 5.14, und es ist die Grundlage für viele der folgenden Resultate. Man beachte aber, dass über die Zwischenstelle $\xi \in (a, b)$ nichts weiter bekannt ist.

Theorem 5.16 (Mittelwertsatz). *Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Dann existiert ein Punkt $\xi \in (a, b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Für die Funktion $g(x) = x$ folgt der Mittelwertsatz

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Falls speziell $f(b) = f(a)$ ist, erhalten wir $f'(\xi) = 0$ (*Satz von Rolle*).*

Beweis. 1) Sei $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) mit $h(a) = h(b)$. Wenn h konstant ist, verschwindet h' natürlich auf ganz $[a, b]$. Sei h nicht konstant. Nach Theorem 4.22 hat h ein Maximum und Minimum auf $[a, b]$, wovon nun mindestens eines an einer Stelle $\xi \in (a, b)$ angenommen werden muss. Satz 5.14 impliziert dann die Behauptung $h'(\xi) = 0$ in diesem Fall.

2) Sei $g(a) = g(b)$. Dann existiert nach Schritt 1) ein $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$, sodass die Behauptung folgt. Andernfalls setzen wir

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)), \qquad x \in [a, b].$$

Diese Funktion erfüllt $h(a) = f(a) = h(b)$. Schritt 1) liefert nun ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi).$$

Mit einer Umformung ergibt sich die behauptete Gleichung. □

Das Vorzeichen von f' bestimmt das Monotonieverhalten von f, wie der folgende Satz zeigt. Mit I^0 bezeichnen wir das Intervall I ohne seine Randpunkte.

Satz 5.17. *Für eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gelten die folgenden Aussagen.*

a) f wächst (bzw. fällt) genau dann, wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in I$ gilt. Also ist f genau dann konstant, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ gilt.

b) Wenn $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in I^0$ ist, dann wächst (bzw. fällt) f strikt.

c) Wenn $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I^0$ gilt, dann ist f injektiv.

Beweis. 1) Seien $x, y \in I$ mit $y > x$. Nach dem Mittelwertsatz Theorem 5.16 gibt es einen Punkt $\xi \in (x, y) \subseteq I^0$ mit $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$. Wegen $y - x > 0$, folgen daraus b), c), und die Implikation '$\Leftarrow$' in a).

2) Sei $x \neq \max I$ und f wachse (falle). Nach Satz 4.5 gilt dann

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \tfrac{1}{h}(f(x + h) - f(x)) \underset{(\leq)}{\geq} 0.$$

Dies zeigt '$\Rightarrow$' in a). Für $x = \max I$ verwendet man den Limes mit $h \to 0^-$. □

In Satz 5.17b) und c) ist die Implikation "$\Leftarrow$" im Allgemeinen falsch, wie die strikt wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$, mit $f'(0) = 0$ zeigt.

Wir folgern ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema, die nicht am Intervallrand liegen. Es ist keine Charakterisierung, da die Funktion $f(x) = x^4$ in 0 das globale Minimum 0 auf $I = \mathbb{R}$ hat, obwohl $f'(0) = f''(0) = 0$ gelten.

Korollar 5.18. *Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $x_0 \in (a, b)$ sowie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Wenn es so ein $r > 0$ gibt, dass $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (a, b)$, $f'(x) \underset{(\geq)}{\leq} 0$ für alle $x \in (x_0 - r, x_0]$ und $f'(x) \underset{(\leq)}{\geq} 0$ für alle $x \in [x_0, x_0 + r)$ gelten, dann besitzt f bei x_0 ein lokales Minimum (Maximum).

b) Es sei f zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$). Dann hat f bei x_0 ein striktes *lokales Minimum (bzw. Maximum); d.h., es gibt so ein $\delta > 0$, dass $f(x_0) \underset{(>)}{<} f(x)$ für alle $x \in (a, b)$ mit $0 < |x - x_0| \leq \delta$ gilt.*

Beweis. Wir beweisen die Aussagen für Minima. (Maxima behandelt man, indem man $-f$ betrachtet.)

a) Nach Voraussetzung und Satz 5.17a) gelten für alle $x_0 - r < x_1 \leq x_0 \leq x_2 < x_0 + r$ die Ungleichungen $f(x_1) \geq f(x_0)$ und $f(x_0) \leq f(x_2)$. Dies ist gerade die Behauptung in a).

b) Die Annahmen und Satz 4.4 liefern so einen Radius $\delta > 0$, dass $J := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ in (a, b) liegt und

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f''(x_0)}{2} > 0$$

für alle $x \in J \setminus \{x_0\}$ gelten. Somit fällt f strikt auf $(x_0 - \delta, x_0]$ und wächst strikt auf $[x_0, x_0 + \delta)$ gemäss Satz 5.17b). Wie in a) folgt nun die Behauptung. $\square$

Wir diskutieren nun Eigenschaften, in denen sich etwa die auf $[0, \infty)$ strikt wachsenden Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ unterscheiden.

Definition 5.19. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* konvex *(*konkav*), wenn sie*

$$\forall\, x, y \in I \quad \forall\, t \in (0, 1) : \quad f((1 - t)x + ty) \underset{(\geq)}{\leq} (1 - t)f(x) + tf(y)$$

erfüllt.

Eine Funktion f ist genau dann konkav, wenn $-f$ konvex ist. Die affine Abbildung $f(x) = mx + a$ ist auf $\mathbb{R}$ konvex und konkav. Die Funktion $g(x) = |x|$ ist konvex auf $\mathbb{R}$ (aber nicht differenzierbar in 0). Man kann diese beiden Eigenschaften bequem durch die zweite Ableitung charakterisieren, falls diese existiert.

Satz 5.20. *Für eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gelten die folgenden Aussagen.*

a) f ist genau dann konvex (bzw. konkav), wenn f' wächst (bzw. fällt).

b) Sei f zusätzlich zweimal differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex (bzw. konkav), wenn $f''(x) \geq 0$ (bzw. $f''(x) \leq 0$) für alle $x \in I$ gilt.

Beweis. Nach Satz 5.17 folgt b) aus a). Um a) zu zeigen, seien $x, y \in I$ mit $x < y$, $t \in (0, 1)$ und $\xi := (1 - t)x + ty \in (x, y)$. Wir betrachten nur den konvexen Fall, den konkaven behandelt man mit $-f$.

1) Es wachse f'. Theorem 5.16 liefert dann Punkte $u \in (x, \xi)$ und $v \in (\xi, y)$ mit

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{t(y-x)} = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = f'(u) \leq f'(v) = \frac{f(y) - f(\xi)}{y - \xi} = \frac{f(y) - f(\xi)}{(1-t)(y-x)},$$

wobei die Ungleichung $u \leq v$ einging. Mittels $y > x$ und $t \in (0,1)$, folgern wir die Relation $(1-t)(f(\xi) - f(x)) \leq t(f(y) - f(\xi))$, woraus sich die Konvexität ergibt.

2) Es nun f konvex. Da $t(y-x) > 0$ gilt, erhalten wir daraus die Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t(y-x)} = \frac{f((1-t)x + ty) - f(x)}{t(y-x)} &\leq \frac{(1-t)f(x) + tf(y) - f(x)}{t(y-x)} \\ &= \frac{f(y) - f(x)}{y - x} =: D.\end{aligned}$$

Im Grenzwert $t \to 0^+$ impliziert diese Ungleichung mit Satz 4.5, dass $f'(x) \leq D$ gilt. Genauso zeigt man die untere Schranke

$$\frac{f(y + (1-t)(x-y)) - f(y)}{(1-t)(x-y)} \geq D$$

und damit $f'(y) \geq D$ im Limes $t \to 1^-$. Also wächst f'. $\square$

Mittels der obigen Charakterisierung, untersuchen wir einige Funktionen auf Konvexität oder Konkavität, und leiten damit Ungleichungen her.

Beispiel 5.21. a) Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^\alpha$, ist für $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ konvex und für $\alpha \in [0,1]$ konkav, da für $x > 0$ die Ungleichungen

$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2} \begin{cases} \geq 0, & \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty), \\ \leq 0, & \alpha \in [0,1], \end{cases}$$

gelten.

b) Sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sin(x)$. Da $\sin'' = -\sin \leq 0$ auf $[0, \pi]$ gilt, ist f konkav. Seien $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $t := 2x/\pi \in (0,1)$. Mit $x = (1-t)0 + t\frac{\pi}{2}$ folgt dann die Ungleichung $\sin x \geq (1-t)\sin 0 + t \sin\frac{\pi}{2} = \frac{2x}{\pi}$.

c) Für alle $x, y > 0$ und $p \in (1, \infty)$ gilt

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p'}y^{p'}, \qquad \text{(Youngsche Ungleichung)}$$

wobei $p' := \frac{p}{p-1}$ und somit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ sind.

Beweis. Der Logarithmus $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist nach Satz 5.20 konkav, da $\ln'(x) = 1/x$ und $\ln''(x) = -x^{-2} < 0$ für $x > 0$ gelten. Mit $t := \frac{1}{p'} = (1 - \frac{1}{p}) \in (0,1)$ und Bemerkung 4.40 folgt damit

$$\ln\left(\tfrac{1}{p}\, x^p + \tfrac{1}{p'}\, y^{p'}\right) \geq \tfrac{1}{p}\ln(x^p) + \tfrac{1}{p'}\ln(y^{p'}) = \ln x + \ln y.$$

Wenn wir hierauf exp anwenden, erhalten wir die gewünschte Ungleichung

$$\tfrac{1}{p}\, x^p + \tfrac{1}{p'}\, y^p \geq \exp(\ln x + \ln y) = xy. \qquad \square$$

Der nächste Satz erlaubt es oft, Grenzwerte vom Typ “$\frac{0}{0}$” oder “$\frac{\infty}{\infty}$” zu berechnen. Wenn dabei die Voraussetzung b) vorliegt und f beschränkt ist, so folgt allerdings schon direkt aus Bemerkung 4.6 und Satz 3.37, dass $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ für $x \to b^-$.

THEOREM 5.22 (L'Hospital). *Es seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Es existiere entweder*

a) $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = 0$, *oder*

b) $\lim_{x\to b^-} g(x) = \pm\infty$.

Ferner existiere $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ *für ein* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *(im uneigentlichen Sinne für* $\ell \in \{-\infty, \infty\}$*). Dann existiert* $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$ *in* $\overline{\mathbb{R}}$. *(Entsprechendes gilt für $x \to a^+$.)*

BEWEIS. Wir behandeln nur den Limes für $x \to b^-$, der für $x \to a^+$ kann analog untersucht werden. Da g' nirgends verschwindet, ist g nach Satz 5.17 injektiv und hat somit höchstens eine Nullstelle $x_0 \in (a, b)$. Wenn es keine Nullstelle geben sollte, setzen wir $x_0 = a$. Wir zeigen nun für f/g getrennt eine obere und eine untere Abschätzung, die dann den behaupteten Grenzwert implizieren.

1) Sei zuerst $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Seien $\ell_0 > \ell_1 > \ell$ beliebig gegeben. Aufgrund der Voraussetzung und Satz 4.4 bzw. Bemerkung 4.6, gibt es so eine Zahl $x_1 \in (x_0, b)$, dass die Ungleichung

$$\frac{f'(u)}{g'(u)} \leq \ell_1 \qquad \text{für alle} \;\; u \in [x_1, b)$$

gilt. Wir wählen eine Zahl $x \in [x_1, b)$ und betrachten $y \in (x, b)$. Theorem 5.16 liefert dann eine Stelle $\xi \in (x, y)$ mit

$$(f(y) - f(x))g'(\xi) = f'(\xi)(g(y) - g(x)).$$

Wegen der Vorüberlegung und der Annahme können wir dividieren und erhalten

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \leq \ell_1 < \ell_0, \tag{5.3}$$

da $\xi > x \geq x_1$. Wenn nun a) gilt, so folgt schon

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to b^-} \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \leq \ell_1 < \ell_0 \qquad \text{für alle} \;\; x \in [x_1, b). \tag{5.4}$$

Es gelte b). Dabei sei zuerst $\lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$. Nach Bemerkung 4.6 gibt es dann so eine Zahl $x_2 \in (x, b)$, dass die Abschätzung $g(y) > \max\{0, g(x)\}$ für alle $y \in [x_2, b)$ erfüllt ist. Für $y \in [x_2, b)$ folgen damit aus (5.3) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \ell_1 &\geq \frac{f(y) - f(x)}{g(y)} \frac{g(y)}{g(y) - g(x)}, \\ \frac{f(y)}{g(y)} &\leq \frac{g(y) - g(x)}{g(y)} \ell_1 + \frac{f(x)}{g(y)} = \Big(1 - \frac{g(x)}{g(y)}\Big)\ell_1 + \frac{f(x)}{g(y)}. \end{aligned}$$

Gemäß der Annahme b) und Bemerkung 4.6, konvergiert die rechte Seite für $y \to b^-$ gegen ℓ_1. Wir finden also so eine Stelle $x_3 \in [x_2, b)$, dass

$$\frac{f(y)}{g(y)} \le \ell_0 \qquad \text{für alle } \ y \in [x_3, b) \tag{5.5}$$

gilt. Diese Aussage zeigt man entsprechend, wenn man $\lim_{x\to b^-} g(x) = -\infty$ annimmt. Sie folgt auch im Falle a) aus der Ungleichung (5.4). Wenn $\ell = -\infty$ ist, schließen wir aus (5.5) schon die Behauptung, da ℓ_0 beliebig gewählt werden kann (vergleiche Bemerkung 4.6).

2) Sei nun $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Sei $\ell_0' < \ell$ beliebig gegeben. Wie in Schritt 1), erhalten wir so eine Zahl $x_3' \in (x_0, b)$, dass

$$\frac{f(y)}{g(y)} \ge \ell_0' \qquad \text{für alle } \ y \in (x_3', b)$$

erfüllt ist. Diese Abschätzung liefert die Behauptung im Falle $\ell = \infty$ alleine und für $\ell \in \mathbb{R}$ gemeinsam mit (5.5). $\square$

In den folgenden Beispiele beachte man, dass die L'Hospitalsche Regel auch iteriert angewendet werden kann und dass man oft den vorliegenden Term erst auf die Gestalt f/g für geeignete f und g bringen muss. Weiter läßt sich die Regel mit der Stetigkeit bekannter Funktionen kombinieren. Siehe auch die Übungen.

Beispiel 5.23. a) Es existiert $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Beweis. Hier wählt man $f, g : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ und $g(x) = \sin x$. Dann gelten $g'(x) = \cos x > 0$ für $x \in (0, \pi/2)$, sowie $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \to 0^+$. Somit is a) in Theorem 5.22 erfüllt. Ferner konvergiert

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{\cos x} \;\longrightarrow\; 1, \qquad x \to 0^+.$$

Also folgt die Behauptung aus der L'Hospitalschen Regel. $\square$

b) Sei $\alpha > 0$ fest. Es existiert $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$.

Beweis. Es sei $g(x) = x^{-\alpha}$. Die L'Hospitalsche Regel zeigt von rechts nach links die Existenz der Limiten

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0.$$

Hier gilt a) in Theorem 5.22, da $g(x)$ für $x \to 0^+$ uneigentlich gegen ∞ strebt. $\square$

c) Mit der Stetigkeit von exp folgt aus b), dass der Grenzwert $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \exp(x \ln x) = 1$ existiert.

d) Es existiert $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für $n = 2$; der allgemeine Fall folgt per Induktion. Eine zweimalige Anwendung der L'Hospitalschen Regel impliziert die

Gleichungen

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0,$$

wobei jeweils die Nenner für $x \to \infty$ uneigentlich gegen ∞ streben. $\square$

e) Für die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \cos x$ gelten bei $a = 0$ weder a) noch b) in Theorem 5.22. Hier erhält man direkt $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$. Die L'Hospitalsche Regel würde das **falsche** Ergebnis $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-\sin x} = -\infty$ liefern! $\Diamond$

5.3. Der Satz von Taylor

Wir wollen jede n-mal stetig differenzierbare Funktion in der Nähe eines Punktes durch ein Polynom vom Grad n approximieren. In Theorem 6.22 werden wir sehen, wie so ein Polynom gewählt werden muss. Dies führt auf die folgenden Begriffe.

Definition 5.24. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $-\infty \le a < b \le \infty$ und $x_0 \in (a,b)$. Für eine n–fach differenzierbare Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ wird das n-te* Taylorpolynom *von f im Entwicklungspunkt x_0 durch*

$$T_{n,x_0} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

*für $x \in \mathbb{R}$ definiert. Wir nennen $R_{n,x_0} f := f - T_{n,x_0} f$ das n–*te Taylor–Restglied *von f in x_0. Weiter heißt*

$$T_{x_0} f(x) := \sum_{k\ge 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

die Taylorreihe *von f im Entwicklungspunkt x_0.*

Bemerkung 5.25. Es gilt $T_{0,x_0} f(x) = f(x_0)$, und für $n = 1$ ist $T_{1,x_0} f$ gerade die Tangente an f bei x_0. Wenn man $h = x - x_0$ setzt, wird aus einer Taylorreihe die Potenzreihe $\sum_{k\ge 0} a_k h^k$ mit $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. $\Diamond$

Der folgende Satz zeigt die gewünschte Approximationseigenschaft. Man hat keine weiteren Informationen über $\theta \in (0,1)$, das von n und x abhängen kann.

Theorem 5.26 (Taylor). *Es seien $n \in \mathbb{N}$, $-\infty \le a < b \le \infty$, $x, x_0 \in (a,b)$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ n–mal differenzierbar. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Es gibt so eine Zahl $\theta = \theta(x,n) \in (0,1)$, dass die Gleichung

$$f(x) - T_{n-1,x_0} f(x) = R_{n-1,x_0} f(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^n$$

*gilt. (*Lagrangesche Restgliedformel*)*

b) Wenn es zusätzlich so ein $M_n > 0$ gibt, dass $|f^{(n)}(y)| \le M_n$ für alle $y \in (a,b)$ gilt, dann folgt die Abschätzung

$$|f(x) - T_{n,x_0} f(x)| = |R_{n,x_0} f(x)| \le \frac{2M_n}{n!}|x - x_0|^n.$$

c) Falls f in $C^n((a,b))$ liegt, so strebt $|x-x_0|^{-n}\,|R_{n,x_0}f(x)|$ für $x\to x_0$ gegen 0.

d) Wenn f in $C^\infty((a,b))$ liegt und $R_{n,x_0}f(x)\to 0$ für ein $x\in(a,b)$ und $n\to\infty$ gilt, dann konvergiert die Taylorreihe $T_{x_0}f(x)$ gegen $f(x)$.

Beweis. Wir wenden den Mittelwertsatz auf die differenzierbaren Funktionen

$$p(t)=(1-t)^n \qquad \text{und} \qquad g(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0+t(x-x_0))}{k!}\,(x-x_0)^k\,(1-t)^k$$

für $t\in[0,1]$ an, wobei $n\in\mathbb{N}$ und $x,x_0\in(a,b)$ fest gewählt sind. Es gelten

$$g(0)=T_{n-1,x_0}f(x), \quad g(1)=f(x), \quad p(0)=1, \quad p(1)=0.$$

Theorem 5.16 liefert nun ein $\theta\in(0,1)$ mit

$$(g(1)-g(0))p'(\theta)=(p(1)-p(0))g'(\theta).$$

Da $p'(\theta)=-n(1-\theta)^{n-1}\neq 0$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(x)-T_{n-1,x_0}f(x)&=\frac{(1-\theta)^{1-n}}{n}\Bigg[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{k!}\,(x-x_0)^{k+1}\,(1-\theta)^k\\
&\qquad -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(k-1)!}\,(x-x_0)^k\,(1-\theta)^{k-1}\Bigg]\\
&=\frac{(1-\theta)^{1-n}}{n}\,\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n-1)!}\,(x-x_0)^n\,(1-\theta)^{n-1}\\
&=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}\,(x-x_0)^n,
\end{aligned}$$

sodass a) gezeigt ist. Mit der Beziehung

$$T_{n,x_0}f(x)=T_{n-1,x_0}f(x)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n$$

folgt aus a) die Gleichung

$$\begin{aligned}
|f(x)-T_{n,x_0}f(x)|&=\left|f(x)-T_{n-1,x_0}f(x)-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n\right|\\
&=\frac{1}{n!}\,|f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))-f^{(n)}(x_0)|\,|x-x_0|^n.
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich leicht die Behauptungen b) und c). Die Aussage d) ist eine direkte Konsequenz von Definition 5.24. □

Beispiel 5.27. a) Seien $f(x)=\sin x$, $x_0=0$ und $n=5$. Dann gelten $f(0)=0$, $f'(0)=\cos 0=1$, $f''(0)=-\sin 0=0$, $f^{(3)}(0)=-\cos 0=-1$, $f^{(4)}(0)=\sin 0=0$ und $f^{(5)}=\cos$. Daraus folgen $T_{4,0}f(x)=x-\frac{1}{6}x^3$ und $|f^{(5)}(x)|\leq 1$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Somit liefert Theorem 5.26 a) die Abschätzung

$$|R_{4,0}f(x)|=\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\right|\leq\frac{|x|^5}{120} \qquad \text{für alle } x\in\mathbb{R},$$

was für $|x| \le \frac{1}{10}$ auf $|R_{4,0}f(x)| \le 10^{-7}$ führt. Das (unbeschränkte) Taylorpolynom ist aber für große $|x|$ eine sehr schlechte Approximation von sin.

b) (Logarithmusreihe) Es gelten

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{für } -1 < x \le 1 \quad \text{und somit} \quad \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Beweis. Sei $f(x) = \ln(1+x)$ für $x > -1$. Es gelten $f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}$ und induktiv

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \qquad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $x \in [-1/2, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Nach Theorem 5.26 gibt es ein $\theta \in (0,1)$ mit

$$\begin{aligned} |R_{n,0}f(x)| &= \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n!\,|x|^{n+1}}{(n+1)!\,|1+\theta x|^{n+1}} \\ &\le \left.\begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1}, & 0 \le x \le 1, \\ \frac{1}{n+1}\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n-1}, & -\frac{1}{2} \le x < 0, \end{cases}\right\} \le \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ folgt die Behauptung für $x \in [-1/2, 1]$. Der Fall $x \in (-1, -1/2]$ kann mit einer anderen Restgliedformel ähnlich gezeigt werden, siehe Abschnitt IV.3.9d) in [**1**]. □

Die folgende Schreibweise erweist sich gerade in Anwendungen als nützlich.

Definition 5.28 (Landausymbole). *Es seien $n \in \mathbb{Z}$, $r > 0$ und $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$. Es gebe so eine Konstante $c \ge 0$, dass $|f(x)| \le c|x|^n$ für alle $x \in (-r, r)$ gilt. Dann schreibt man $f(x) = \mathcal{O}(|x|^n)$ für $x \to 0$. Falls sogar $\frac{|f(x)|}{|x|^n} \to 0$ für $x \to 0$ konvergiert, so schreibt man $f(x) = o(|x|^n)$ für $x \to 0$. Entsprechend behandelt man die Fälle $x \to 0^{\pm}$ und $x \to \pm\infty$.*

Aus der obigen Definition folgt leicht, dass $x^m \mathcal{O}(|x|^n) = \mathcal{O}(|x|^{m+n})$ für $x \to 0$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt und ebenso für o. Sei $m < n$. Dann folgt aus $f(x) = \mathcal{O}(|x|^n)$ auch $f(x) = \mathcal{O}(|x|^m)$ für $x \to 0$, da $|x|^n \le r^{n-m}|x|^m$ für $|x| \le r$ gilt. Zur Illustration vertiefen wir Beispiel 5.27a):

$$\begin{aligned} (x + \tfrac{1}{x}) \sin x &= (x + \tfrac{1}{x})\Big(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(|x|^5)\Big) \\ &= x^2 - \tfrac{1}{6}x^4 + \mathcal{O}(|x|^6) + 1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \mathcal{O}(|x|^4) \\ &= 1 + \tfrac{5}{6}x^2 + \mathcal{O}(|x|^4), \qquad x \to 0. \end{aligned}$$

Beispiel 5.29 (Binomialreihe). a) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die *verallgemeinerten Binomialkoeffizienten*

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-n+1)}{n!} \qquad \text{und} \qquad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Für $n > \alpha$ ist dann $\binom{\alpha}{n} = 0$, und für $\alpha \in \mathbb{N}$ und $\alpha \geq n$ stimmt die obige Definition mit der des Binomialkoeffizienten vor (0.1) überein. Nun gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \text{für } x \in (-1,1).$$

Im Falle eine Polynoms mit $\alpha \in \mathbb{N}_0$ bricht diese Reihe ab und man erhält den binomischen Satz aus Beispiel 0.3. Die obige Aussage wird etwa in Satz 22.7 von [**3**] bewiesen. Dabei folgt die Konvergenz der Reihe unproblematisch aus dem Quotientenkriterium. Um jedoch die behauptete Gleichung zu zeigen, benötigt man z.B. die Restglieddarstellung in Satz 6.14. Wir übergehen den etwas technischen Beweis, geben aber zwei Zahlenbeispiele an:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(|x|^4), \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \mathcal{O}(|x|^4).$$

Wir diskutieren eine bekannte Anwendung aus der Physik. Sei c die Lichtgeschwindigkeit und $v \in (-c,c)$ die Geschwindigkeit eines Teilchens mit Masse $m > 0$. Dann hat das Teilchen die relativistische Energie

$$\begin{aligned} E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= mc^2\Big(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \mathcal{O}\Big(\frac{|v|^6}{c^6}\Big)\Big) \\ &= mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + \frac{3mv^4}{8c^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{|v|^6}{c^4}\Big). \end{aligned}$$

Hier ist mc^2 die Ruheenergie, $\frac{m}{2}v^2$ die klassische kinetische Energie und $\frac{3mv^4}{8c^2}$ die erste relativistische Korrektur.

b) (Cauchy) Sei $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ für $x \leq 0$. Induktiv sieht man ein, dass f auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig oft differenzierbar ist und es für jedes $n \in \mathbb{N}$ so ein Polynom p_n gibt, dass $f^{(n)}(x) = p_n(1/x)f(x)$ für $x > 0$ gilt. Die Substitution $y = 1/x$ liefert zunächst den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} \mathrm{e}^{-y} = 0.$$

Dann sehen wir per Induktion, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, denn aus Beispiel 5.23 folgern wir die Gleichungen

$$\lim_{x\to 0^+} \tfrac{1}{x}\,(f^{(n-1)}(x) - 0) = \lim_{x\to 0^+} \tfrac{1}{x}\, p_{n-1}(\tfrac{1}{x})\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} y\, p_{n-1}(y)\mathrm{e}^{-y} = 0.$$

Also gehört die Funktion f zu $C^\infty(\mathbb{R})$ und natürlich konvergiert ihre Tayloreihe $T_0 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x > 0$ ist aber der Reihenwert **ungleich** $f(x)$. $\Diamond$

Das obige Beispiel zeigt, dass es selbst für Funktionen f in $C^\infty(\mathbb{R})$ mit konvergenter Taylorreihe nicht klar ist, ob deren Grenzwert mit f übereinstimmt. Diese Frage klären wir erst im vierten Semester.

Wir diskutieren eine Anwendung der bislang entwickelten Theorie in der numerischen Mathematik. Sei dazu $f \in C^2([a,b])$ mit $f(a)f(b) \le 0$. Nach dem Nullstellensatz Korollar 4.25 gibt es einen Punkt $x_* \in [a,b]$ mit $f(x_*) = 0$. Diese Nullstelle wird man aber oft nicht explizit angeben können, sodass man sie zumindest mit sukzessiv berechenbaren Zahlen approximieren möchte. Dazu nehmen wir an, wir hätten eine Approximation $x_n \in [a,b]$ gefunden. Wir definieren nun x_{n+1} als Nullstelle der Tangente t_n von f bei x_n, also durch die Gleichung

$$t_n(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Wenn $f'(x_n) \neq 0$ ist, erhalten wir die Iterationsvorschrift des *Newton Verfahrens*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.6}$$

Man beachte, dass hier x_{n+1} durch in diesem Iterationsschritt bekannte Terme bestimmt wird.

Es ergeben sich aber sofort mehrere Fragen: Ist $f'(x_n) \neq 0$? Liegt x_{n+1} in $[a,b]$? Konvergiert das Verfahren? Ist der Grenzwert eine Nullstelle von f, was geschieht im Falle mehrerer Nullstellen? Wie wählt man x_0? Wir beschränken uns hier auf einen einfachen Fall, in dem diese Schwierigkeiten gar nicht auftreten oder gelöst werden können.

THEOREM 5.30 (Newton Verfahren). *Es seien $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $f \in C^2([a,b])$ mit $f(a)f(b) \le 0$ und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Weiter sei f konvex oder konkav. Wähle $x_0 = b$, wenn $f'(x) > 0$ und $f''(x) \ge 0$ oder wenn $f'(x) < 0$ und $f''(x) \le 0$ für alle $x \in [a,b]$ gelten. In den anderen Fällen wähle $x_0 = a$.*

Dann liegen die Punkte x_n aus (5.6) für jedes $n \in \mathbb{N}$ in $[a,b]$ und sie konvergieren gegen die einzige Nullstelle x_* von f in $[a,b]$. Setze weiter $m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)| > 0$ und $M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| < \infty$. Dann genügt der Approximationsfehler der Abschätzung

$$|x_{n+1} - x_*| \le \frac{M}{2m} |x_{n+1} - x_n|^2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{5.7}$$

BEWEIS. Die Zahlen $M \ge 0$ und $m > 0$ existieren nach Theorem 4.22 und Korollar 4.23. Laut Korollar 4.25 und Satz 5.17 implizieren die Voraussetzungen, dass es genau eine Zahl $x_* \in [a,b]$ mit $f(x_*) = 0$ gibt. Wir betrachten nur den Fall, dass $f' > 0$ und $f'' \ge 0$ auf $[a,b]$ gelten; die anderen kann man analog behandeln. Aufgrund von Satz 5.17 und Bemerkung 4.29 wachsen dann die Funktionen f und f' auf $[a,b]$ und f^{-1} auf $f([a,b])$.

1) Wir behaupten zunächst, dass alle x_n in $[x_*, b]$ liegen und (x_n) fällt. Wir haben $x_0 = b \in [x_*, b]$. Es gelte $x_n \in [x_*, b]$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Die Monotonie von f liefert somit die Ungleichung $f(x_n) \ge f(x_*) = 0$. Die Definition (5.6), die Ungleichung $f' > 0$ und die Induktionsvoraussetzung zeigen nun die obere Schranke

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \le x_n \le b.$$

Insbesondere fällt (x_n) solange die Folge in $[x_*, b]$ bleibt. Um auch die Ungleichung $x_{n+1} \geq x_*$ zu zeigen, setzen wir

$$g(x) = f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n), \qquad x \in [a, b].$$

Für $x \in [a, x_n]$ ergibt sich $g'(x) = f'(x) - f'(x_n) \leq 0$, sodass g auf $[a, x_n]$ fällt. Daraus und aus (5.6) folgen die Relationen

$$f(x_*) = 0 = g(x_n) \leq g(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = f(x_{n+1}).$$

Da auch f^{-1} wächst, erhalten wir $x_{n+1} \geq x_*$ und damit die Zwischenbehauptung per Induktion.

2) Die fallende und nach unten beschränkte Folge (x_n) konvergiert nach Theorem 2.14 gegen eine Zahl $y \geq x_*$. Wir können nun in (5.6) der Grenzwert $n \to \infty$ nehmen, was auf die Gleichung $y = y - f(y)/f'(y)$ führt. Also gelten $f(y) = 0$ und somit $y = x_*$.

Wenn $x_{n+1} = x_*$ ist, gilt natürlich (5.7). Es sei also $x_{n+1} > x_*$. Zunächst verwenden wir die Taylorentwicklung von f bei x_n. Gemäß Theorem 5.26 gilt für ein $\theta \in (0, 1)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2} f''(x_n + \theta(x_{n+1} - x_n))(x_{n+1} - x_n)^2 \\ &= \frac{1}{2} f''(x_n + \theta(x_{n+1} - x_n))(x_{n+1} - x_n)^2 \leq \frac{M}{2} (x_{n+1} - x_n)^2, \end{aligned}$$

wobei wir auch (5.6) und die Voraussetzung verwendet haben. Andererseits liefert der Mittelwertsatz Theorem 5.16 eine Zwischenstelle $\xi \in (x_*, x_{n+1})$ mit

$$f(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - f(x_*) = f'(\xi)(x_{n+1} - x_*) \geq m(x_{n+1} - x_*).$$

Die beiden obigen Ungleichungen implizieren die Fehlerschranke (5.7). □

Im letzten Beweisschritt sieht man, dass die Iteration (5.6) so gewählt wurde, dass gewisse Taylorterme verschwinden. Das Heronverfahren aus Beispiel 2.15 ist ein Spezialfall mit $f(y) = y^2 - x$ für eine gegebene Zahl $x > 0$. Mit der Fehlerschranke (5.7) kann man den Fehler nach jedem Iterationsschritt durch bekannteGrößen kontrollieren, was eine Abbruchbedingung bei einem vorgegebenen Maximalfehler ermöglicht. Man beachte, dass man in Beispielen die Zahlen a und b oft so wählen kann, um möglichst kleine Konstanten M und $1/m$ zu erhalten.

Beispiel 5.31. Man löse $x = \mathrm{e}^{-x}$ mit einem Fehler kleiner als $5 \cdot 10^{-7}$. Wir wählen dazu $f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} > 0$ und $f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist f auf $\mathbb{R}$ strikt wachsend und konkav. Weiter erhalten wir $f(x) < 0$ für alle $x \leq 0$ und $f(1) = 1 - 1/\mathrm{e} > 0$. Folglich ist Theorem 5.30 mit $a = 0$, $b = 1$ und $x_0 = 0$ anwendbar. Aus (5.6) ergibt sich die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\mathrm{e}^{-x_n} - x_n}{\mathrm{e}^{-x_n} + 1}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Diese Zahlen konvergieren gegen die einzige Nullstelle x_* von f auf $\mathbb{R}$. Schließlich erhalten wir $f'(x) \geq 1 + 1/\mathrm{e} =: m$ und $|f''(x)| \leq 1 =: M$ für alle $x \in [0, 1]$. Ungleichung (5.7) impliziert die Fehlerschranke

$$|x_{n+1} - x_*| \leq \frac{1}{2(1 + 1/\mathrm{e})} |x_{n+1} - x_n|^2$$

Wir berechnen $x_1 = 1/2$, $x_2 \approx 0,5663110$ und $x_3 \approx 0,5671432$. Daraus folgt $|x_3 - x_*| \leq \frac{1}{2} \cdot 6,939 \cdot 10^{-7}$, wie verlangt. $\lozenge$

KAPITEL 6

Integralrechnung

Soweit nichts anderes gesagt wird, seien a und b reelle Zahlen mit $a < b$.

6.1. Das Riemannintegral

Wir wollen den Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer positiven Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und der x–Achse bestimmen. Dazu approximieren wir diese Fläche durch die Vereinigung von Rechtecken, deren Inhalt durch eine *Riemannsumme* gegeben ist.

Wir schreiben $|I| = \beta - \alpha$ für die Länge eines beschränkten Intervalls I mit Infimum α und Supremum β. Wir erinnern auch an die Schreibweise $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ aus Definition 4.32.

Definition 6.1. *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Eine* markierte Zerlegung *Z von $[a, b]$ ist eine Menge der Form*

$$Z = \{(t_0, t_1, \dots, t_n), (\tau_1, \dots, \tau_n) \,|t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b,$$
$$\tau_k \in I_k = I_k^Z := [t_{k-1}, t_k] \text{ für alle } k \in \{1, \dots, n\}\}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben dafür kurz $Z = \{t_k, \tau_k; k \le n\}$. Die Zahlen t_k heißen Zerlegungsstellen und die τ_k Markierungen. Die Menge aller markierten Zerlegungen von $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{Z}(a, b)$.

Die Riemannsumme *von f für $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ ist durch*

$$S(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)(t_k - t_{k-1})$$

gegeben. Die Feinheit *von Z ist $|Z| = \max\{t_k - t_{k-1} \mid k = 1, \dots, n\}$.*

Für das Intervall $[a, a]$ gibt es nur die Zerlegung $Z_a = \{t_0 = a = t_1, \tau_0 = a\}$ mit der Riemannsumme $S(f, Z_a) = f(a)(a - a) = 0$.

Wir führen nun die Klasse der Funktionen ein, für die wir eine Integrationstheorie entwickeln wollen.

Definition 6.2. *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt* stückweise stetig, *wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ und Zahlen $a = s_0 < s_1 < \dots < s_m = b$ so gibt, dass für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ die* Einschränkung *$f|_{I_j^s} : I_j^s := (s_{j-1}, s_j) \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f(x)$, stetig ist und für $x \to s_{j-1}^+$ und $x \to s_j^-$ einen Grenzwert besitzt. Die Menge dieser Funktionen wird mit $PC([a, b])$ bezeichnet.*

Bemerkung 6.3. a) Es sei f wie in Definition 6.2. Dann hat $f|_{I_j^s}$ eine stetige Fortsetzung $f_j : [s_{j-1}, s_j] \to \mathbb{R}$. Nach Theorem 4.22 sind dann alle Funktionen f_j und damit auch f beschränkt.

b) Es gilt $C([a,b]) \subseteq PC([a,b])$. Für ein Intervall $I \subseteq [a,b]$ liegt $\mathbb{1}_I$ in $PC([a,b])$.

c) Es seien $f, g \in PC([a,b])$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch αf, $f+g$, fg und $|f|$ Elemente von $PC([a,b])$.

Beweis. Die Behauptung für die Funktionen αf und $|f|$ folgt direkt aus Definition 6.2 und den Sätzen 4.11 und 4.5. Weiter seien s_j^f und s_k^g die Zwischenstellen für f und g gemäß Definition 6.2. Wir bilden ihre Vereinigung $\{s_1, \dots, s_p\} := \{s_1^f, \dots, s_m^f\} \cup \{s_1^g, \dots s_n^g\}$. Wenn wir nun die Voraussetzungen und die Sätze 4.11 und 4.5 auf den Intervallen (s_{l-1}, s_l) anwenden, erhalten wir auch die Beziehungen $f+g, fg \in PC([a,b])$. $\square$

Das folgende Theorem wird auf die Riemannsche Definition des Integrals führen.

Theorem 6.4. *Sei $f \in PC([a,b])$. Dann gibt es so eine Zahl $J \in \mathbb{R}$, dass für jede Folge $(Z_n)_n$ in $\mathcal{Z}(a,b)$ mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$ die Riemannsummen $S(f, Z_n)$ gegen J konvergieren. Die Zahl J hängt nicht von den Funktionswerten $f(s_j)$ an der Stelle $s_0, \dots, s_m$ aus Definition 6.2 ab.*

Beweis. Wir betrachten zuerst stetige Funktionen f und isolieren dafür zunächst den Hauptschritt des Beweises, bevor wir die Aussage herleiten. Danach untersuchen wir f aus $PC([a,b])$ in einem zweiten Teil.

1) Sei $f \in C([a,b])$. Nach Theorem 4.18 ist f gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es also ein $\delta_\varepsilon > 0$ mit

$$\forall\, x, y \in [a,b] \ \text{ mit } \ |x-y| \le \delta_\varepsilon : \quad |f(x) - f(y)| \le \varepsilon.$$

a) Gegeben seien markierte Zerlegungen $Z = \{t_k, \tau_k; k \le n\}$ und $W = \{s_j, \sigma_j; j \le m\}$ in $\mathcal{Z}(a,b)$, die der Abschätzung $|Z|, |W| \le \delta_\varepsilon/2$ genügen. Wir benötigen die Vereinigung $R = \{r_0, \dots, r_p\} = \{t_0, \dots, t_n\} \cup \{s_0, \dots, s_m\}$. Sei $l \in \{1, \dots, p\}$. Dann existiert genau ein Index $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $I_l^R := [r_{l-1}, r_l] \subseteq I_k^Z$. Wir definieren $\tau_l' := \tau_k$. Entsprechend gibt es genau ein $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $I_l^R \subseteq I_j^W$, und wir setzen $\sigma_l' := \sigma_j$.

Für jedes $l \in \{1, \dots, p\}$ erhalten wir somit Indizes j und k derart, dass $\tau_l' - \sigma_l' = \tau_k - \sigma_j$ und $I_l^R \subset I_k^Z \cap I_j^W$ gelten. Insbesondere überlappen sich I_k^Z und I_j^W, woraus die Ungleichung

$$|\tau_l' - \sigma_l'| = |\tau_k - \sigma_j| \le 2\delta_\varepsilon/2 = \delta_\varepsilon$$

folgt. Die gleichmäßige Stetigkeit von f liefert also die Abschätzung $|f(\tau_l') - f(\sigma_l')| \le \varepsilon$. Ferner können wir etwa

$$t_k - t_{k-1} = r_l - r_{l-1} + r_{l-1} - \dots - r_{l-i+1} + r_{l-i+1} - r_{l-i}$$

für ein $i \in \{1, \dots, l\}$ schreiben. Man beachte, dass dazu passend $\tau_k = \tau_l' = \dots = \tau_{l-i+1}'$ gilt. Genauso gehen wir bei den Termen $s_j - s_{j-1}$ und σ_j vor. Mittels dieser

Überlegungen berechnen wir

$$\begin{aligned}|S(f,Z)-S(f,W)| &= \Big|\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)(t_k-t_{k-1}) - \sum_{j=1}^{m} f(\sigma_j)(s_j-s_{j-1})\Big| \\ &= \Big|\sum_{l=1}^{p}(f(\tau_l')-f(\sigma_l'))(r_l-r_{l-1})\Big| \le \sum_{l=1}^{p} |f(\tau_l')-f(\sigma_l')|\,(r_l-r_{l-1}) \\ &\le \varepsilon\sum_{l=1}^{p}(r_l-r_{l-1}) = \varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

b) Wir betrachten nun markierte Zerlegungen $Z_n \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gibt es so einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, dass $|Z_n| \le \delta_\varepsilon/2$ für alle $n \ge N_\varepsilon$ gilt. Schritt a) zeigt nun die Ungleichung

$$|S(f,Z_n) - S(f,Z_m)| \le \varepsilon(b-a)$$

für alle $n,m \ge N_\varepsilon$. Damit ist $(S(f,Z_n))_n$ eine Cauchyfolge und hat nach Theorem 2.26 einen Grenzwert J.

Seien $W_n \in \mathcal{Z}(a,b)$ weitere markierte Zerlegungen mit $|W_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann konvergiert auch die Folge $(S(f,W_n))_n$ gegen eine Zahl J'. Wir können so einen Index $N_\varepsilon' \ge N_\varepsilon$ wählen, dass auch $|W_n| \le \delta_\varepsilon/2$ für alle $n \ge N_\varepsilon'$ erfüllt ist. Aus a) folgt somit die Abschätzung

$$|S(f,Z_n) - S(f,W_n)| \le \varepsilon(b-a)$$

für alle $n \ge N_\varepsilon'$. Diese Ungleichung liefert $|J - J'| \le \varepsilon(b-a)$ im Limes $n \to \infty$. Es folgt $J = J'$, da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, und wir haben die erste Aussage für stetige f bewiesen.

2) Sei nun $f \in PC([a,b])$ mit den Punkten $s_0 = a < s_1 < \cdots < s_m = b$ wie in Definition 6.2 und den Funktionen $f_j \in C([s_{j-1},s_j])$ aus Bemerkung 6.3. Gegeben seien markierte Zerlegungen $Z_n \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Wir fügen die Zerlegungsstellen $\{s_1,\dots,s_{m-1}\}$ zu jedem Z_n hinzu. Wenn ein Intervall $I_k^{Z_n}$ durch eine Stelle s_j zerteilt wird, so wählen wir in beiden resultierenden Teilintervallen die Markierung s_j. Alle anderen Intervalle und Markierungen in Z^n bleiben unverändert. So erhalten wir Zerlegungen $Z_n^j \in \mathcal{Z}(s_{j-1},s_j)$ mit $|Z_n^j| \le |Z_n|$ für alle $j \in \{1,\dots,m\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Diese Konstruktion führt auf die Ungleichung

$$|S(f,Z_n) - (S(f_1,Z_n^1) + \cdots + S(f_m,Z_n^m))| \le 2(m-1)\,2\|f\|_\infty\,|Z_n| \;\longrightarrow\; 0, \qquad n \to \infty.$$

Nach Teil 1b) konvergieren die Riemannsummen $S(f_j,Z_n^j)$ für $n \to \infty$ gegen Zahlen J_j, und somit hat $(S(f,Z_n))$ den Grenzwert $J := J_1 + \cdots + J_m$. Wenn man mit einer anderen Folge (W_n) in $\mathcal{Z}(a,b)$ mit $|W_n| \to 0$ für $n \to \infty$ startet, streben die Riemannsummen $S(f,W_n)$ wegen Teil 1b) auch gegen J. Die Limiten J_j hängen von den Funktionen f_j ab, in die Funktionswerte $f(s_i)$ gar nicht eingehen. □

Definition 6.5. *Sei $f \in PC([a,b])$. Die Zahl J aus Theorem 6.4 heißt* (Riemann–)Integral *von f und man schreibt*

$$J = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \textit{sowie} \quad \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{und} \quad \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Für jedes $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ und $r \in \mathbb{R}$ erhält man $S(r\mathbb{1}_{[a,b]}, Z) = r(b-a)$. Somit gilt

$$\int_a^b r\,\mathrm{d}t = r(b-a).$$

Weniger triviale Beispiele werden wir später behandeln, wenn wir mehr Theorie zur Verfügung haben.

Im nächsten Satz sammeln wir die grundlegenden Eigenschaften des Integrals. Im Folgenden werden stets diese Eigenschaften und nicht Definition 6.5 verwendet. Man beachte dabei, dass nach Bemerkung 6.3 alle vorkommenden Funktionen in $PC([a,b])$ liegen. Wir bezeichnen ferner die Einschräkung von $f \in PC([a,b])$ auf Teilintervalle ebenfalls mit f.

Satz 6.6. *Es seien $f, g \in PC([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $c, d, e \in [a,b]$ und $I \subseteq [a,b]$ ein Intervall mit $x = \inf I$ und $y = \sup I$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) $\int_a^b \mathbb{1}_I(t)\,\mathrm{d}t = |I|$ *und speziell* $\int_a^b \mathbb{1}_{\{c\}}(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

b) $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

c) $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_a^b \mathbb{1}_I(t) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Es sei ferner $f(t) \le g(t)$ für alle $t \in [a,b]$. Dann folgt $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

e) $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \le |b-a|\,\|f\|_\infty$.

f) $\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t + \int_d^e f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^e f(t)\,\mathrm{d}t$.

Beweis. Den ersten Teil von c) haben wir in Schritt 2) des Beweises von Theorem 6.4 gezeigt. Der zweite Teil folgt dann aus der Beobachtung

$$\int_a^b \mathbb{1}_I(t) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x 0 \cdot f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^y 1 \cdot f(t)\,\mathrm{d}t + \int_y^b 0 \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

wobei das Beispiel nach Definition 6.5 mit $r = 0$ verwendet wurde. Die Behauptung a) ergibt sich aus c) mit $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$ und aus diesem Beispiel.

Für Teil b) seien $Z_n = \{t_{k,n}, \tau_{k,n}; k \le m_n\}$ markierte Zerlegungen in $\mathcal{Z}(a,b)$ mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
S(\alpha f + \beta g, Z_n) &= \sum_{k=1}^{m_n} (\alpha f(\tau_{k,n}) + \beta g(\tau_{k,n}))(t_{k,n} - t_{k-1,n}) \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{m_n} f(\tau_{k,n})(t_{k,n} - t_{k-1,n}) + \beta \sum_{k=1}^{m_n} g(\tau_{k,n})(t_{k,n} - t_{k-1,n}) \\
&= \alpha S(f, Z_n) + \beta S(g, Z_n).
\end{aligned}$$

Nach Definition 6.5 und Satz 2.7 konvergiert diese Gleichung für $n \to \infty$ gegen die in b) behauptete.

Die Aussage d) zeigt man ähnlich wie b). Teil e) folgt dann aus d) und den Ungleichungen $\pm f \leq |f| \leq \|f\|_\infty \mathbb{1}_{[a,b]}$. Teil f) ist eine direkte Konsequenz aus c), wenn $c \leq d \leq e$ gilt. Sei etwa $c \leq e \leq d$. Dann schließen wir aus c) die Gleichung

$$\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^e f(t)\,\mathrm{d}t + \int_e^d f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^e f(t)\,\mathrm{d}t - \int_d^e f(t)\,\mathrm{d}t,$$

und daraus die Behauptung.[1] Die anderen Fälle in f) ergeben sich analog. □

Bemerkung 6.7. Beschränkte Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißen Riemann–integrierbar, wenn sie den Aussagen von Theorem 6.4 genügen. Für sie gilt Satz 6.6 analog. Die Funktion $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist nicht Riemann–integrierbar, da $S(f,Z) = 0$ ist, falls $\tau_k \notin \mathbb{Q}$ für alle k gilt, und $S(f,Z) = 1$, falls $\tau_k \in \mathbb{Q}$ für alle k. ◊

6.2. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz besagt grob gesprochen, dass das Integrieren die Umkehroperation zum Ableiten ist. Auf diesen fundamentalen Zusammenhang beruhen u.a. die Methoden, mit denen Integrale berechnet werden.

Definition 6.8. *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt* Stammfunktion *von f, wenn F differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt. Man schreibt dann $F = \int f = \int f(t)\,\mathrm{d}t$ oder $F = f^{[1]}$.*

Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann ist auch $F + c$ für jedes feste $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Das nächste Lemma liefert uns Stammfunktionen mittels Integration. Es ist der Schlüssel zum Hauptsatz, hängt aber wesentlich von einer Stetigkeitsvorauassetzung ab.

Lemma 6.9. *Es sei $f \in PC([a,b])$ in einem $x_0 \in [a,b]$ stetig. Dann ist das* unbestimmte Integral *$F_0(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ mit $x \in [a,b]$ im Punkt x_0 differenzierbar, und es gilt $F_0'(x_0) = f(x_0)$.*

Beweis. Sei $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ mit $x \to x_0$. Aus Satz 6.6 und der Stetigkeit von f bei x_0 folgern wir die behauptete Konvergenz

$$\begin{aligned}\left|\frac{F_0(x) - F_0(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\ &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{|x - x_0|}{|x - x_0|} \sup_{|t-x_0|\leq|x-x_0|} |f(t) - f(x_0)| \;\longrightarrow\; 0.\end{aligned}$$

□

Theorem 6.10 (Hauptsatz). *a) Sei $f \in C([a,b])$. Dann ist jede Stammfunktion F von f durch die Gleichung*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

[1] Diese Überlegung wurde in der Vorlesung an anderer Stelle behandelt.

für alle $x \in [a,b]$ gegeben. Speziell gilt

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) =: F\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

b) Sei $g \in C^1([a,b])$. Dann gilt

$$\int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t = g(b) - g(a).$$

Beweis. Lemma 6.9 liefert die Stammfunktion F_0 von f, da f stetig ist. Sei F eine weitere Stammfunktion. Dann verschwindet die Ableitung $(F - F_0)' = f - f = 0$ auf $[a,b]$, sodass nach Satz 5.17 die Funktion $F - F_0$ konstant ist, also $F(x) - F_0(x) = F(a) - F_0(a) = F(a)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt. Wir haben damit die Behauptung a) gezeigt, woraus b) mit $f := g'$ und $F := g$ folgt. □

Für gewisse unstetige Funktionen gelten Varianten des Hauptsatzes, die aber deutlich komplizierter sind. Wir diskutieren einige Beispiele, in denen man eine Stammfunktion direkt angeben kann. Wir verwenden dabei die in der Vorlesung oder in den Übungen schon hergeleiteten Ableitungen ohne weitere Kommentare.

Beispiel 6.11. a) Der Flächeninhalt A zwischen den Graphen von $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = x^2 - \pi x$ für $0 \le x \le \pi$ ist gemäß des Hauptsatzes durch

$$A := \int_0^\pi (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x - (\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}\pi x^2)\Big]_0^\pi = \mathrm{e}^\pi + \tfrac{1}{6}\pi^3 - 1$$

gegeben. Man beachte dabei, dass $f(x) \ge g(x)$ für alle $0 \le x \le \pi$ gilt.

b) Es sei $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ für $0 \le x \le \frac{1}{2}$ und $f(x) = (\cos x)^{-2}$ für $\frac{1}{2} < x \le 1$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \arcsin x\Big|_0^{1/2} + \tan x\Big|_{1/2}^1\\ &= \arcsin(\tfrac{1}{2}) + \tan(1) - \tan(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{\pi}{6} + \tan(1) - \tan(\tfrac{1}{2}),\end{aligned}$$

da $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ nach (4.11) gilt.

c) Die Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ verrichtet am Widerstand R die momentane Leistung $P(t) = \frac{1}{R}U(t)^2$, wobei $R, U_0, \omega > 0$ Konstanten sind und $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ die Frequenz ist. Die Spannung U hat dann die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und die mittlere Leistung ist

$$\overline{P} := \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{1}{T}\sum_{k=1}^n P\Big(\frac{kT}{n}\Big)\frac{T}{n}.$$

Dabei liegen diese Riemannsummen mit $t_{k,n} = \tau_{k,n} = kT/n$ für große n nahe am Integral, und sie liefern mit dem Faktor $1/T$ einen Mittelwert der Funktionswerte. Um $\overline{P}$ zu berechnen, verwenden wir die Formel

$$\begin{aligned}&\cos(2\omega t) = \cos(\omega t + \omega t) = \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) = 1 - 2\sin^2(\omega t),\\ &\sin^2(\omega t) = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))\end{aligned}$$

aus einer Übung. Nun folgen mit dem Hauptsatz die Gleichungen

$$\begin{aligned}\overline{P} &= \frac{U_0^2}{RT}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{2RT}\int_0^T (1-\cos(2\omega t))\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{U_0^2}{2RT}\Big[t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\Big]_0^T = \frac{U_0^2}{2RT}\Big(T - \frac{\sin(4\pi)}{2\omega} - 0\Big) = \frac{U_0^2}{2R}. \qquad \lozenge\end{aligned}$$

Wir folgern nun aus dem Hauptsatz die beiden wichtigsten Integrationsregeln, die der Produkt- bzw. der Kettenregel der Differentialrechnung entsprechen.

Satz 6.12 (Partielle Integration). *Für $f, g \in C^1([a,b])$ gilt die Gleichung*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + (fg)\Big|_a^b.$$

Beweis. Theorem 6.10 und Satz 5.4 implizieren die Identitäten

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (fg)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t,$$

und damit die Behauptung. □

Wir diskutieren einige typische Beispiele für die partielle Integration. Man beachte dabei, dass Polynome sich beim Ableiten vereinfachen, während exp, sin und cos sich nicht bzw. wenig ändern.

Beispiel 6.13. a) Mit $g(x) := x$ und $f'(x) = \sin x$ liefert Satz 6.12

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot(-\cos x)\,\mathrm{d}x + x(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \sin x\Big|_0^{\pi/2} + 0 - 0 = 1$$

b) In manchen Fällen hilft es mehrfach partiell zu integrieren, bzw. die rechte mit der linken Seite zu verrechnen. Für $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir so mit $f' := \exp$ und $g := \sin$, bzw. $g := \cos$, die Gleichungen

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t &= -\int_0^x \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^t\sin t\Big|_0^x \\ &= \int_0^x \mathrm{e}^t(-\sin t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{e}^t\cos t\Big|_0^x + \mathrm{e}^x\sin x - 0, \\ 2\int_0^x \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t &= -(\mathrm{e}^x\cos x - 1) + \mathrm{e}^x\sin x, \\ \int_0^x \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c) Wenn man nur eine Stammfunktion F sucht, lässt man oft zuerst die Integrationsgrenzen weg und fügt am Ende die freie Variable (z.B. x) als obere Grenze ein. Die untere Grenze würde nur einer additiven Konstante entsprechen, die man gleich 0 setzen kann. Man muss hierbei aufpassen, dass das Integrationsintervall im Definitionsbereich des Integranden enthalten ist. Im folgenden Beispiel integriert man in $\mathbb{R}_+$ und wählt $x > 0$, sowie $f' = \mathbb{1}$ und $g = \ln$.

$$\int \ln t\,\mathrm{d}t = \int 1\cdot\ln t\,\mathrm{d}t = -\int t\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + x\ln x = -x + x\ln x. \qquad \lozenge$$

Im nächsten Satz verhilft uns die partielle Integration zu einer Darstellung des Taylorrestgliedes ohne eine Zwischenstelle θ.

Satz 6.14 (Integralrestglied für Taylor). *Seien $f \in C^{n+1}((a,b))$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt*

$$f(x) - T_{n,x_0}f(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{für } x \in (a,b).$$

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ ist die Behauptung

$$f(x) - T_{0,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

gerade der Hauptsatz Theorem 6.10. Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und f gehöre zu $C^{n+2}((a,b))$. Daraus und aus Satz 6.12 folgt

$$\begin{aligned} f(x) - T_{n,x_0}f(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\,f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(t)\Big|_{t=x_0}^{x} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(x_0) \end{aligned}$$

für $x \in (a,b)$. Die Behauptung folgt dann aus der Gleichung

$$T_{n+1,x_0}f(x) = T_{n,x_0}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}. \qquad \square$$

Es folgt die zweite oben angekündigte Integrationsregel.

Satz 6.15 (Substitutionsregel). *Es seien $\phi \in C^1([a,b])$, $J = \phi([a,b])$ und $f \in C(J)$. Dann gilt die Gleichung*

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Beweis. Seien $y, y_0 \in J$, $F(y) = \int_{y_0}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t$ und $x \in [a,b]$. Da f stetig ist, besitzt F nach Lemma 6.9 die Ableitung f. Satz 5.6 liefert dann die Identität

$$(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x).$$

Aus Theorem 6.10 und Satz 6.6 schließen wir nun

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) &= \int_{y_0}^{\phi(b)} f(y)\,\mathrm{d}y - \int_{y_0}^{\phi(a)} f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \qquad \square$$

Im folgenden wenden wir die Substitutionsregel sowohl von links nach rechts (wobei man die Funktionen f und ϕ in den Integranden 'hineinlesen' muss) also auch von rechts nach links (wobei man ein geeignetes ϕ finden muss) an.

Beispiel 6.16. a) Es gilt

$$A := \int_0^2 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4}).$$

Beweis. Wir wählen $y=\phi(x)=-x^2$ und $f(y)=\mathrm{e}^y$. Es gelten $\phi'(x)=-2x$, $\phi(0)=0$ und $\phi(2)=-4$. Mit Satz 6.15 berechnen wir dann

$$A = -\frac{1}{2}\int_0^2 \phi'(x)f(\phi(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{-4} f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-4}^0 \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4}). \qquad \square$$

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Dann gilt

$$A := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^\alpha \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Beweis. Wir substituieren $y=\phi(x)=\cos x$, sodass $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\phi'(x)=-\sin x$ gilt, was wir formal als $\sin x\,\mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}y$ schreiben. Weiter folgen $y(0)=1$ und $y(\pi/2)=0$. Satz 6.15 impliziert nun

$$A = -\int_1^0 y^\alpha\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^\alpha\,\mathrm{d}y = \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}. \qquad \square$$

c) Es seien $a<b$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, J das abgeschlossene Intervall mit den Randpunkten $\alpha a+\beta$ und $\alpha b+\beta$, sowie $f\in C(J)$. Mit der Substitution $y=\alpha x+\beta$ folgt die Gleichung

$$\int_a^b f(\alpha x+\beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

d) Sei $x\in\mathbb{R}$. Dann gilt

$$A := \int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Beweis. Wir integrieren zunächst partiell (mit $f' := \mathbb{1}$ und $g := \arctan$)

$$A = \int_0^x 1\cdot\arctan t\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + t\arctan t\Big|_0^x.$$

Dann substituieren wir $s=t^2$, wobei $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=2t$ (also $t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}s$), $s(0)=0$ und $s(x)=x^2$ gelten, und erhalten

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+s}\,\mathrm{d}s + x\arctan x - 0\\ &= -\frac{1}{2}\ln(1+s)\Big|_0^{x^2} + x\arctan x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2). \end{aligned}$$

e) Es sei A die Fläche der Kreisscheibe $\overline{B}(0,r)$ in $\mathbb{R}^2$ für ein $r>0$. Diese ist die Menge aller Punkte $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ mit $s^2+t^2\le r^2$, was äquivalent zu den Relationen $s\in[-r,r]$ und $-\sqrt{r^2-s^2}\le t\le\sqrt{r^2-s^2}$ ist. Somit gilt

$$A = \int_{-r}^r \Big(\sqrt{r^2-s^2} - (-\sqrt{r^2-s^2})\Big)\,\mathrm{d}s = 2\int_{-r}^r \sqrt{r^2-s^2}\,\mathrm{d}s.$$

Wir setzen nun $f(s) = \sqrt{r^2 - s^2}$ für $s \in [-r, r]$ und $s = \phi(x) = r \sin x$ für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dann gelten $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \phi'(x) = r \cos x$, also $\mathrm{d}s = r \cos x \, \mathrm{d}x$ und $\phi([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-r, r]$. Satz 6.15 impliziert nun

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_{-r}^{r} f(s) \, \mathrm{d}s = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\phi(x)) \phi'(x) \, \mathrm{d}x = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 x} \, r \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, \mathrm{d}x = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2x)) \, \mathrm{d}x \\ &= r^2 \Big[x + \tfrac{1}{2} \sin(2x) \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = r^2 \Big(\tfrac{\pi}{2} - 0 - (-\tfrac{\pi}{2} - 0) \Big) = \pi r^2. \end{aligned}$$

Ähnlich wie in Beispiel 6.11 haben wir dabei die Formel $2 \cos^2 x = 1 + \cos(2x)$ verwendet. ♢

Im nächsten Beispiel skizzieren wir, wie man für rationale Funktionen eine Stammfunktion finden kann, wenn die Nullstellen des Nennerpolynoms bekannt sind. (Siehe etwa Abschnitt 11.6.I in [4] für Beweise.)

Beispiel 6.17 (Integration rationaler Funktionen). [2] Es sei $f = p/q$ für reelle, gekürzte Polynome p und $q \neq 0$. Der Koeffizient höchster Ordnung von q sei 1. Die Berechnung einer Stammfunktion von f vollzieht sich in mehreren Schritten.

1) Mit Polynomdivision erhält man Polynome r und p_0 mit $\operatorname{grad} p_0 < \operatorname{grad} q$ und $f = r + \frac{p_0}{q}$. Somit gilt

$$\int f = \int r + \int \frac{p_0}{q}.$$

2) Gemäß des Fundamentalsatzes der Algebra gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ und $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ derart, dass $q(x) = (x - z_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - z_m)^{n_m}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, wobei $z_i \neq z_j$ für alle $i \neq j$ ist.

3) Die komplexe *Partialbruchzerlegung* liefert solche eindeutig bestimmte Zahlen $c_{jk} \in \mathbb{C}$, dass

$$\frac{p_0(x)}{q(x)} = \frac{c_{11}}{x - z_1} + \ldots + \frac{c_{1n_1}}{(x - z_1)^{n_1}} + \ldots + \frac{c_{m1}}{x - z_m} + \ldots + \frac{c_{mn_m}}{(x - z_m)^{n_m}} \qquad (6.1)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ gilt.

4) a) Wenn c_{jk} und z_j reell sind, kann der entsprechende Summand in (6.1) integriert werden.

b) Wenn c_{jk} oder z_j nicht reell sind, dann existiert so ein Index l, dass $\overline{z_j} = z_l$ und $\overline{c_{jk}} = c_{lk}$ gelten.

c) Im komplexen Fall mit Potenz $k = 1$ hat man Terme der Form

$$\frac{c}{x - z} + \frac{\overline{c}}{x - \overline{z}} =: \frac{ax + b}{x^2 - \alpha x + \beta}$$

[2] Von diesen Resultaten wurde nur das abschließende Beispiel in der Vorlesung behandelt.

für gewisse $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta > \frac{\alpha^2}{4}$. Der reelle Bruch kann integriert werden (siehe Übungen).

d) Der komplexe Fall mit Potenz $k > 1$ wird hier nicht behandelt.

Als Beispiel behandeln wir die Funktion $f(x) = ((x-\alpha)(x-\beta))^{-1}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}$ und feste Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq \beta$. Dabei zeigen wir eine Möglichkeit, wie man die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung hier (im einfachsten Fall) berechnet. Nach (6.1) gibt es Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{c_1}{x-\alpha} + \frac{c_2}{x-\beta}.$$

Wir multiplizieren mit dem Nenner und erhalten $1 = c_1(x-\beta) + c_2(x-\alpha)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ nach stetiger Fortsetzung. Wenn wir hier $x = \alpha$ und $x = \beta$ einsetzen, ergeben sich $1 = c_1(\alpha - \beta)$ und $1 = c_2(\beta - \alpha)$. Daraus folgt

$$f(x) = \frac{1}{\alpha-\beta}\Big(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\Big).$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}\int f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\alpha-\beta}\Big(\int \frac{\mathrm{d}t}{t-\alpha} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t-\beta}\Big) = \frac{1}{\alpha-\beta}\,(\ln|x-\alpha| - \ln|x-\beta|)\\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\ln\frac{|x-\alpha|}{|x-\beta|}.\end{aligned}$$

Damit kann man nun $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ berechnen, wenn α und β nicht in $[a, b]$ liegen. $\Diamond$

6.3. Konvergenzsätze für Integral und Ableitung

Wir wollen zunächst Integral und Grenzwerte vertauschen. Das nächste Beispiel zeigt, dass dies nicht ohne weiteres möglich ist.

Beispiel 6.18. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir definieren $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$;

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x, & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n}, \\ 0, & \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Dann konvergiert (f_n) punktweise für $n \to \infty$ gegen $f = 0$. Es gilt natürlich $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Mit der Substitution $y = \frac{2}{n} - x$ erhalten wir andererseits

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = n^2 \int_0^{1/n} x\,\mathrm{d}x + n^2 \int_{1/n}^{2/n} (\tfrac{2}{n} - x)\,\mathrm{d}x = 2n^2 \int_0^{1/n} x\,\mathrm{d}x = 1. \qquad \Diamond$$

Im Falle gleichmäßiger Konvergenz (siehe Definition 4.32) erhält man jedoch einen einfachen Grenzwertsatz. Wir vertiefen dieses Thema in Analysis 3.

Satz 6.19. *Es seien $f_n, f \in PC([a,b])$ für $n \in \mathbb{N}$ und (f_n) konvergiere gleichmäßig für $n \to \infty$ gegen f. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Satz 6.6 und die Annahme liefern für $n \to \infty$ den gewünschten Limes

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (f(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}x\right| \le (b-a)\|f - f_n\|_\infty \longrightarrow 0. \quad \square$$

Der gleichmäßige Limes eine Folge in $PC([a,b])$ muss nicht notwendig in $PC([a,b])$ liegen, da er unendlich viele Sprungstellen besitzen kann.

Wir werden nun den Hauptsatz ausnützen, um Ableitung und Grenzwerte zu vertauschen und damit auch Potenzreihen abzuleiten. Wieder beginnen wir mit einfachen Beispielen, in denen dieses Vertauschen auf falsche Ergebnisse führt.

Beispiel 6.20. a) Es seien $f_n(x) = \sqrt{x^2 + n^{-2}}$ und $f(x) = |x|$ für $x \in [-1,1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann liegen die Funktionen f_n in $C^1([-1,1])$ und f ist bei 0 nicht differenzierbar. Gleichwohl konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f. In der Tat haben wir $x^2 + n^{-2} \le (\sqrt{x^2} + 1/n)^2$ für alle $x \in [-1,1]$ und somit

$$0 \le f_n(x) - f(x) = \sqrt{x^2 + n^{-2}} - \sqrt{x^2} \le 1/n \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty.$$

b) Die Funktionen $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ konvergieren für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen die (differenzierbare) Nullfunktion $f = 0$. Trotzdem divergiert $f_n'(0) = \sqrt{n}$ für $n \to \infty$. $\Diamond$

Theorem 6.21. *Gegeben seien Funktionen $f_n \in C^1([a,b])$ und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derart, dass $f_n \to f$ punktweise und $f_n' \to g$ gleichmäßig für $n \to \infty$ konvergieren. Dann liegt f in $C^1([a,b])$ und es gilt $f' = g$; wir erhalten also*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x).$$

Beweis. Nach Theorem 4.34 ist g stetig. Seien $\varepsilon > 0$ und $x \in [a,b]$. Lemma 6.9 liefert dann so ein $\delta > 0$, dass für alle $y \in [a,b]$ mit $0 < |y - x| \le \delta$ die Ungleichung

$$\left|\frac{1}{y-x}\int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t - g(x)\right| \le \varepsilon$$

gilt. Für alle solchen y berechnen wir nun mittels Theorem 6.10 und Satz 6.6

$$\begin{aligned}
\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - g(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} - g(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y-x}\int_x^y f_n'(t)\,\mathrm{d}t - g(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y-x}\int_x^y (f_n'(t) - g(t))\,\mathrm{d}t + \frac{1}{y-x}\int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t - g(x)
\end{aligned}$$

Die letzte Differenz ist im Betrag kleiner gleich ε und der Term davor kleiner gleich

$$\frac{|y-x|}{|y-x|}\,\|f_n'-g\|_\infty \;\longrightarrow\; 0$$

für $n\to\infty$, wobei Satz 6.6 und die Annahme eingehen. Es folgt die Ungleichung

$$\Big|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-g(x)\Big|\le\varepsilon$$

für alle $y\in[a,b]$ mit $0<|y-x|\le\delta$, und damit die Behauptung. □

Das folgende Theorem liefert die gewünschte Ableitungsregel für Potenzreihen und die Rechtfertigung für die Wahl der Taylorkoeffizienten in Definition 5.24.

THEOREM 6.22. *Es sei $f(x)=\sum_{k\ge0}a_kx^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho>0$. Dann hat auch die Potenzreihe $g(x)=\sum_{k\ge1}ka_kx^{k-1}$ den Konvergenzradius ρ und f ist differenzierbar mit $f'(x)=g(x)$ für $x\in(-\rho,\rho)$. Weiter liegt $f\in C^\infty((-\rho,\rho))$ und $a_n=\frac{f^n(0)}{n!}$ gilt für alle $n\in\mathbb{N}_0$.*

BEWEIS. Aus Satz 2.28 und einer Übung folgt zunächst die Gleichung

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{k\,|a_k|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}\cdot\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=1/\rho.$$

Somit hat die Potenzreihe $h(x)=\sum_{k\ge0}ka_kx^k$ den Konvergenzradius ρ. Die Charakterisierung von ρ in Theorem 3.28 zeigt dann, dass auch $g(x)=h(x)/x$ den Konvergenzradius ρ besitzt.

Sei $|x|\le r<\rho$. Das Polynom $f_n(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$ strebt dann für $n\to\infty$ gegen $f(x)$. Beispiel 4.37 impliziert ferner, dass die Ableitung $f_n'(x)=\sum_{k=1}^n ka_kx^{k-1}$ gleichmäßig auf $[-r,r]$ gegen g konvergiert. Aus Theorem 6.21 schließen wir dann, dass f auf $[-r,r]$ (und damit auf $(-\rho,\rho)$) die Ableitung g hat. Dies kann man iterieren, sodass f unendlich oft differenzierbar ist. Dabei gilt etwa $f''(x)=\sum_{k=2}^\infty k(k-1)a_kx^{k-2}$ für $x\in(-\rho,\rho)$. Wenn man nun $x=0$ einsetzt, erhält man die letzte Behauptung. □

KOROLLAR 6.23 (Identitätssatz für Potenzreihen). *Es seien $f(x)=\sum_{n\ge0}a_nx^n$ und $g(x)=\sum_{n\ge0}b_nx^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradius $\rho^f,\rho^g>0$. Es existiere so eine Zahl $0<\delta<\rho^f,\rho^g$, dass $f(x)=g(x)$ für alle $x\in(-\delta,\delta)$ gilt. Dann folgen schon die Identitäten $a_n=b_n$ für jedes $n\in\mathbb{N}_0$.*

BEWEIS. Nach Theorem 6.22 liegen f und g in $C^\infty((-\rho,\rho))$. Die Annahme impliziert dann die Gleichheit von $f^{(n)}(0)$ und $g^{(n)}(0)$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$. Somit folgt die Behauptung aus dem letzten Teil von Theorem 6.22. □

BEISPIEL 6.24. Gemäß Beispiel 3.31 gilt

$$\sin x=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\qquad\text{für alle }\;x\in\mathbb{R}.$$

Man beachte, dass die Potenzreihe den Koeffizienten $a_0 = 0$ hat. Theorem 6.22 liefert nun die Ableitung

$$\sin' x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos x \qquad \text{für alle} \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Ähnlich berechnet man $\exp' = \exp$ und $\cos' = -\sin$ leichter als in Beispiel 5.10. $\Diamond$

Man kann nun auch bequem eine Stammfunktion für jede Potenzreihe angeben.

Korollar 6.25. *Sei $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann hat auch die Potenzreihe $F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ den Konvergenzradius ρ und es gelten $F' = f$ und $F(0) = 0$.*

Beweis. Der erste Behauptung zeigt man wie im Beweis von Theorem 6.22, und die zweite durch Ableiten von F mittels Theorem 6.22. $\square$

Wir können die Potenzreihe einer weiteren klassischen Funktion bestimmen.

Beispiel 6.26. Eine Übung und Beispiel 3.2 implizieren die Gleichungen

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

für alle $x \in (-1, 1)$. Aus Korollar 6.25 und $\arctan 0 = 0$ folgern wir dann die Reihendarstellung

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{für } x \in (-1, 1). \qquad \Diamond$$

6.4. Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir diskutieren nun eine Anwendung der Integralrechung auf einfache Differentialgleichungen, mit denen etwa Wachstumsprozesse beschrieben werden. Kompliziertere werden am Ende von Analysis 2 diskutiert.

Beispiel 6.27. Es soll ein Anfangskapital $u_0 > 0$ zu einen Zinssatz $a > 0$ (für eine Zeiteinheit) für einen Zeitraum $t > 0$ so angelegt werden, dass zu dem Zeitpunkten $k\frac{t}{n}$ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ und einem $n \in \mathbb{N}$ die Zinsen für den Zeitraum $[(k-1)\frac{t}{n}, k\frac{t}{n}]$ dem Kapital hinzugefügt werden. Es sei u_k das Kapital zur Zeit kt/n. Dann gelten

$$u_1 = u_0 + \tfrac{at}{n} u_0 = (1 + \tfrac{at}{n}) u_0, \qquad u_2 = u_1 + \tfrac{at}{n} u_1 = (1 + \tfrac{at}{n})^2 u_0, \qquad \dots.$$

Induktiv sieht man, dass das Kapital zur Zeit t durch $u_n = (1 + \frac{at}{n})^n u_0$ gegeben ist. Gemäß einer Übung konvergiert die Folge (u_n) für $n \to \infty$ gegen $u(t) = \mathrm{e}^{at} u_0$, was das Kapital zur Zeit t bei "instantaner" Verzinsung angibt.

Die Funktion $t \mapsto \mathrm{e}^{ta} u_0$ ist die einzige Lösung in $C^1([0, \infty))$ des Anfangswertproblems

$$u'(t) = au(t), \quad t \geq 0, \qquad u(0) = u_0. \tag{6.2}$$

Beweis. Es ist nur die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei dazu $v \in C^1([0,\infty))$ eine weitere Lösung von (6.2). Sei $t > 0$. Setze $w(s) = \mathrm{e}^{(t-s)a}v(s)$ für $s \in [0,t]$. Diese Funktion hat die Ableitung

$$w'(s) = \mathrm{e}^{(t-s)a}(-a)v(s) + \mathrm{e}^{(t-s)a}v'(s) = 0, \qquad s \in [0,t],$$

da $v'(s) = av(s)$ gilt. Nach Satz 5.17 ist w konstant, sodass die Behauptung $v(t) = w(t) = w(0) = \mathrm{e}^{ta}u_0$ aus $v(0) = u_0$ folgt. $\square$

Es sei $u(t)$ die Größe einer Population zur Zeit $t \geq 0$ mit Anfangsgröße $u_0 > 0$ für $t = 0$. Dann ist die relative momentane Änderung von $u(t)$ durch $\frac{u'(t)}{u(t)}$ gegeben. In (6.2) ist dieser Bruch konstant gleich a, was für $a > 0$ zu unbeschränktem und sehr schnellen Wachstum führt. Dies ist z.B. bei biologischen Modellen offenbar Unfug. Verhulst hat 1837 das folgende Modell gedämpften Wachstums vorgeschlagen.

Beispiel 6.28. Die Größe $u(t)$ besitze die relative momentane Änderung

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = \lambda\left(1 - \frac{u(t)}{u_\infty}\right)$$

für alle $t \geq 0$ und gegebene Konstanten $\lambda, u_\infty > 0$. Daraus erhalten wir das Anfangswertproblem

$$u'(t) = \lambda\left(1 - \frac{u(t)}{u_\infty}\right)u(t), \quad t \geq 0, \qquad u(0) = u_0. \tag{6.3}$$

Man beachte, dass für $u_0 = 0$ bzw. $u_0 = u_\infty$ die konstanten Funktionen $u = 0$ bzw. $u = u_\infty$ das Problem (6.3) lösen. Wir nehmen an, dass es eine Lösung $u \in C^1([0,b])$ von (6.3) gebe. Es sei $u_0 > 0$ und $u_0 \neq u_\infty$. Mittels Satz 4.14 finden wir dann so eine Zeit $t_1 > 0$, dass $u(t) > 0$ und $u(t) \neq u_\infty$ für alle $t \in [0,t_1]$ gelten. Aus (6.3) folgt dann für alle $s \in [0,t_1]$ die Gleichung

$$\frac{u'(s)}{(u_\infty - u(s))u(s)} = \frac{\lambda}{u_\infty}.$$

Wir integrieren nun über $s \in [0,t]$ mit $t \leq t_1$ und substituieren $x = u(s)$. Mit Beispiel 6.17 erhalten wir dann die Gleichungen

$$\begin{aligned}
t\frac{\lambda}{u_\infty} &= \int_0^t \frac{u'(s)}{(u_\infty - u(s))u(s)}\,\mathrm{d}s = -\int_{u_0}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x(x-u_\infty)} = \frac{1}{u_\infty}\ln\frac{|x|}{|x-u_\infty|}\bigg|_{u_0}^{u(t)},\\
\ln\frac{u(t)}{|u(t)-u_\infty|} &= \lambda t + \ln\frac{u_0}{|u_0 - u_\infty|},\\
\frac{u(t)}{|u(t)-u_\infty|} &= \frac{u_0}{|u_0-u_\infty|}\,\mathrm{e}^{\lambda t}.
\end{aligned}$$

Mittels einer Rechnung folgt daraus die Formel

$$u(t) = \frac{u_0 u_\infty}{u_0 + (u_\infty - u_0)\mathrm{e}^{-\lambda t}}.$$

Eine Probe zeigt, dass diese Funktion das Problem (6.3) für alle $t \geq 0$ löst. Weiter gilt $u(t) \to u_\infty$ für $t \to \infty$. $\Diamond$

Es seien $f \in C^1((a,b))$, $g \in C([0,\infty))$ und $u_0 \in (a,b)$ gegeben. Wir suchen ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $\min I = 0$ und eine Funktion $u \in C^1(I)$ mit $u(t) \in (a,b)$ für alle $t \in I$ und

$$u'(t) = g(t)f(u(t)), \quad t \in I, \qquad u(0) = u_0. \tag{6.4}$$

Mit ähnlichen Überlegungen wie in Beispiel 6.28 zeigt man den folgenden Satz.

Satz 6.29 (Trennung der Variablen). *Unter den obigen Voraussetzungen gelte zusätzlich $f(u_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Zeit $t_1 > 0$ und eine eindeutige Lösung $u \in C^1([0,t_1])$ von (6.4). Dabei existiert so ein $\delta > 0$, dass $u(t) \in (u_0 - \delta, u_0 + \delta) \subseteq (a,b)$ und*

$$H(u(t)) := \int_{u_0}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s =: G(t) \tag{6.5}$$

für alle $t \in [0,t_1]$ gelten und die Abbildung $H : (u_0 - \delta, u_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ injektiv ist. Es folgt also $u(t) = H^{-1}(G(t))$ für alle $0 \leq t \leq t_1$.

Wir verzichten auf einen Beweis (siehe etwa Satz 1.5.1 in [**6**]), verwenden aber die Aussage, um mittels einfacher Beispiel einen ersten Einblick in das mögliche Verhalten von Differentialgleichungen zu erhalten.

Beispiel 6.30. a) Sei $u_0 > 0$. Die Funktion $u(t) = \left(\frac{1}{u_0} - t\right)^{-1}$ mit $0 \leq t < \frac{1}{u_0} =: \tau$ ist die einzige Lösung von

$$u'(t) = u(t)^2, \quad t \geq 0, \qquad u(0) = u_0. \tag{6.6}$$

Hier gilt $u(t) \to \infty$ für $t \to \tau^-$.

Beweis. Hier gelten $g(t) = 1$ und $f(x) = x^2$. Nach Satz 6.29 gibt es eine Zeit $t_1 > 0$ und eine Lösung $u \in C^1([0,t_1])$ mit

$$\begin{aligned} t = G(t) &= \int_{u_0}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{u_0}^{u(t)} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u(t)}, \\ u(t) &= \left(\frac{1}{u_0} - t\right)^{-1}. \end{aligned}$$

für $0 \leq t \leq t_1$. Man sieht nun direkt, dass diese Funktion (6.6) auf $[0, 1/u_0)$ löst. Es gebe eine weitere Lösung $v \neq u$ auf diesem Intervall. Dann findet man Zeiten $0 \leq t < t_n < 1/u_0$ mit $t_n \to t$ derart, dass die Relationen $u(t) = v(t)$ und $u(t_n) \neq v(t_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Die Eindeutigkeitsaussage von Satz 6.29 (genauer die Variante mit Anfangszeit t) liefert nun einen Widerspruch, sodass u auch auf $[0, 1/u_0)$ die einzige Lösung ist.[3] $\square$

b) Es sei $a \in C([0,\infty))$ und $u_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $u(t) = \exp(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s)u_0$ die einzige Lösung von

$$u'(t) = a(t)u(t), \quad t \in [0,\infty), \qquad u(0) = u_0. \tag{6.7}$$

[3]Die Eindeutigkeit auf dem vollen Intervall $[0,\tau)$ wurde in der Vorlesung nicht angesprochen.

Beweis. Wir haben $f(x) = x$ und $g(t) = a(t)$. Sei z.B. $u_0 > 0$. Nach Satz 6.29 gibt es eine Zeit $t_1 > 0$ und eine Lösung $u \in C^1([0, t_1])$ mit

$$\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln u(t) - \ln u_0,$$
$$u(t) = \exp\Big(\ln u_0 + \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\Big) = \exp\Big(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\Big)u_0.$$

für $0 \le t \le t_1$. Eine Probe zeigt, dass diese Funktion für jedes $u_0 \in \mathbb{R}$ das Problem (6.7) auf $[0, \infty)$ löst. Wie in a) folgt auch ihre Eindeutigkeit auf $[0, \infty)$. $\square$

c) Das Problem

$$u'(t) = \sqrt{u(t)}, \quad t \ge 0, \qquad u(0) = 0, \tag{6.8}$$

hat die Lösung $v = 0$. Wenn wir andererseits (6.5) für $t \ge \varepsilon > 0$ anwenden, erhalten wir

$$t - \varepsilon = \int_\varepsilon^t 1\,\mathrm{d}s = \int_{u(\varepsilon)}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big|_{u(\varepsilon)}^{u(t)} = 2\sqrt{u(t)} - 2\sqrt{u(\varepsilon)}.$$

Im Grenzwert $\varepsilon \to 0$ liefert dies die Funktion $u(t) = t^2/2$. Ein Probe zeigt, dass auch diese Funktion auf $[0, \infty)$ das Problem (6.8) löst. Hier sind die Lösungen also nicht eindeutig bestimmt. Man beachte, dass hier $f(u_0) = f(0) = 0$ gilt. $\Diamond$

6.5. Uneigentliche Riemann-Integrale

Wir erweitern nun den Begriff des Integrals auf offene oder unbeschränkte Integrationsintervalle, wobei wir uns auf Beispiele konzentrieren.

Definition 6.31. *a) Es seien $-\infty < a < b \le +\infty$ und $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ so, dass die Einschränkung $f|_{[a,\beta]}$ für jedes $\beta \in (a, b)$ zu $PC([a, \beta])$ gehört. Falls der Grenzwert*

$$\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

in $\mathbb{R}$ existiert, heißt f uneigentlich(Riemann-)integrierbar*. Entsprechend wird das Intervall $(a, b]$ für $-\infty \le a < b < \infty$ behandelt.*

b) Es seien $-\infty \le a < b \le +\infty$ und $f \in (a, b) \to \mathbb{R}$ so, dass die Einschränkung $f|_{[\alpha,\beta]}$ für alle $a < \alpha < \beta < b$ zu $PC([\alpha, \beta])$ gehört. Wähle $c \in (a, b)$. Wenn $f|_{(a,c]}$ und $f|_{[c,b)}$ uneigentlich integrierbar sind, dann heißt f uneigentlich (Riemann-)integrierbar *auf (a, b) und man setzt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung 6.32. a) Definition 6.31b) ist unabhängig von der Wahl der Stelle $c \in (a, b)$. Um dies einzusehen, seien etwa $a < \alpha < c < d < \beta < b$. Dann liefert Satz 6.6 die Gleichung

$$\int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_\alpha^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Die Aussagen von Satz 6.6b), c) und d) gelten entsprechend für uneigentlich integrierbare Funktionen (wegen der Rechenregeln für den Grenzwert). Zum Verhalten von $|f|$ vergleiche Satz 6.34 und Beispiel 6.35. $\Diamond$

Wir beginnen mit einigen einfachen Beispielen, bei denen man die uneigentliche Integrale direkt ausrechnen kann.

Beispiel 6.33. a) Es existiert $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$, da $\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}|_0^b = 1 - \mathrm{e}^{-b}$ für $b \to \infty$ gegen 1 konvergiert.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Genau für $\alpha < 1$ existiert $\int_0^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}$. Genau für $\alpha > 1$ existiert $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}$. Für kein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert somit $\int_0^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$.

Beweis. Für $b > a > 0$ berechnen wir

$$\int_a^b x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\,|_a^b = \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}), & \alpha \neq 1, \\ \ln x\,|_a^b = \ln b - \ln a, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Es sei $b = 1$ und $a \to 0^+$. Dann konvergiert das obige Integral genau für $\alpha < 1$ und dann gegen $\frac{1}{1-\alpha}$. Es sei $a = 1$ und $b \to \infty$. Nun konvergiert das Integral genau für $\alpha > 1$ und zwar gegen $\frac{1}{\alpha-1}$. $\square$

c) Das Integral $\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}x$ existiert nicht, da etwa die Folge

$$\int_0^{k\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{k\pi} = 1 - \cos(k\pi) = \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{N}_0 \text{ ist gerade}, \\ 2, & k \in \mathbb{N}_0 \text{ ist ungerade}, \end{cases}$$

in $k \in \mathbb{N}_0$ divergiert.

d) Es existiert $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$, da

$$\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^b = \arcsin b \;\longrightarrow\; \frac{\pi}{2}$$

für $b \to 1$ konvergiert. Ähnlich zeigt man die Gleichung $\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pi/2$.

e) Für $b \in (0, \frac{\pi}{2})$ konvergiert $\int_{-b}^b \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos b) + \ln(\cos(-b)) = 0$ für $b \to \frac{\pi}{2}$, obwohl $\int_0^b \tan x\,\mathrm{d}x = \ln(\cos b)$ für $b \to \frac{\pi}{2}$ divergiert. Es ist also wichtig, in Definition 6.31b) die Integrationsgrenzen getrennt zu betrachten. $\Diamond$

Die Existenz uneigentlicher Integrale wird oft durch (noch) ein Majorantenkriterium gesichert.

Satz 6.34 (Majorantenkriterium für Integrale). *Es seien $-\infty < a < b \leq +\infty$ und $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ mit $f, g \in PC([a, c])$ für alle $c \in (a, b)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Wenn $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b)$ gilt und g auf $[a,b)$ uneigentlich integrierbar ist, dann sind f und $|f|$ auf $[a,b)$ uneigentlich integrierbar und

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Wenn $f(x) \geq g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b)$ gilt und g auf $[a,b)$ nicht uneigentlich integrierbar ist, dann ist auch f auf $[a,b)$ nicht uneigentlich integrierbar.

Entsprechende Aussagen gelten für die Intervalle $(a,b]$ und (a,b).

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 4.4 und Bemerkung 4.6 gibt es so eine Zahl $c_\varepsilon \in (a,b)$, dass für alle $c_\varepsilon \leq c < d < b$ die Ungleichungen

$$0 \leq \int_c^d g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon$$

gelten, wobei wir auch Satz 6.6 verwendet haben. Daraus und aus der Annahme folgt wieder mit diesem Satz die Abschätzung

$$0 \leq \left|\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_c^d |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_c^d g(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Seien nun $\beta_n \in [a,b)$ mit $\beta_n \to b$ für $n \to \infty$ gewählt. Dann ist $(\int_a^{\beta_n} f(x)\,\mathrm{d}x)_n$ eine Cauchyfolge und hat also einen Grenzwert J. Es konvergiere auch $\beta_n' \to b^-$. Wir erhalten ebenso den Limes J' von $(\int_a^{\beta_n'} f(x)\,\mathrm{d}x)_n$. Die obige Abschätzung für f impliziert dann

$$|J - J'| = \lim_{n\to\infty} \left|\int_a^{\beta_n} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{\beta_n'} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\beta_n, \beta_n' \geq c_\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir $J = J'$, sodass das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = J$ existiert.

Genauso zeigt man die uneigentliche Integrierbarkeit von $|f|$. Mit Satz 6.6 und der Annahme schließen wir weiter

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \lim_{\beta\to b^-} \left|\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Teil b) folgt per Negation. Die Fälle $(a,b]$ und (a,b) behandelt man analog. □

Beispiel 6.35. a) Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^\alpha \mathrm{e}^{-x}$. Genau für $\alpha > -1$ ist f uneigentlich integrierbar.

Beweis. 1) Sei $\alpha \leq -1$. Es gilt $f(x) \geq x^\alpha/\mathrm{e} =: g(x)$ für alle $x \in (0,1]$. Nach Beispiel 6.33 ist g auf $(0,1]$ nicht uneigentlich integrierbar, sodass dies gemäß Satz 6.34 auch für f folgt.

2) Sei $\alpha > -1$. Für $x \in (0,1]$ ist $f(x)$ kleiner gleich x^α, und damit ist f nach Beispiel 6.33 und Satz 6.34 auf $(0,1]$ uneigentlich integrierbar.

Wir betrachten nun $x \geq 1$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \alpha$. Dann gilt $x^\alpha \leq x^n$ wegen (4.6). Eine Variante von Beispiel 5.23 zeigt, dass die Funktion $\varphi(x) = x^n \mathrm{e}^{-x/2}$ für

$x \to \infty$ gegen 0 strebt. Wir in Beispiel 5.15 folgern wir daraus, dass φ auf $[1, \infty)$ durch eine Konstante $c > 0$ beschränkt ist. Somit gilt die Abschätzung

$$0 \leq f(x) \leq x^n \mathrm{e}^{-x/2} \mathrm{e}^{-x/2} \leq c\mathrm{e}^{-x/2}$$

für $x \geq 1$. Da die rechte Seite auf $[1, \infty)$ uneigentlich integrierbar ist (vergleiche Beispiel 6.33), liefert Satz 6.34 die Behauptung. □

b) Es sei $\alpha > 0$ und $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$. Dann ist f uneigentlich integrierbar.

Beweis. Im Vergleich zu Beispiel 6.33 müssen wir eine Potenz von x gewinnen, wofür wir partiell integrieren. Für $b > 1$ und mit $\sin = -\cos'$ zeigen wir

$$\begin{aligned}\int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^b x^{-\alpha} \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_1^b (-\alpha) x^{-\alpha-1}(-\cos x)\,\mathrm{d}x + x^{-\alpha}(-\cos x)\Big|_1^b \\ &= -\alpha \int_1^b x^{-\alpha-1} \cos x\,\mathrm{d}x + \cos 1 - b^{-\alpha} \cos b.\end{aligned}$$

Der letzte Integrand ist im Betrag kleiner gleich der (laut Beispiel 6.33) uneigentlich integrierbaren Funktion $g(x) = x^{-\alpha-1}$ auf $[1, \infty)$. Satz 6.34 sichert also im letzten Integral die Existenz des Limes für $b \to \infty$. Der letzte Term ist im Betrag durch $b^{-\alpha}$ beschränkt und strebt somit für $b \to \infty$ gegen 0. □

c) Die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{|\sin(x)|}{x}$ ist nicht uneigentlich integrierbar. (Ohne den Betrag liefert Teil b) die uneigentliche Integrierbarkeit, was auf den Vorzeichenwechseln beruht.)

Beweis. Wir wissen, dass $|\sin|$ π-periodisch ist und dass $\sin t \geq 1/\sqrt{2}$ für $t \in [\pi/4, 3\pi/4]$ gilt, siehe (4.10) und (4.9), bzw. (4.11) und Bemerkung 4.41. Daraus folgt die untere Schranke

$$f(x) \geq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi(k+\frac{3}{4})}, & \pi(k+\frac{1}{4}) \leq x \leq \pi(k+\frac{3}{4}),\ k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

für $x \geq 1$. Wir erhalten nun

$$\int_1^{\pi(n+\frac{3}{4})} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^n \int_{\pi(k+\frac{1}{4})}^{\pi(k+\frac{3}{4})} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi(k+\frac{3}{4})}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2\sqrt{2}\pi(k+\frac{3}{4})}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Nach Beispiel 3.2 divergiert die rechte Reihe für $n \to \infty$, woraus die Behauptung folgt. □

Man kann (uneigentliche) Integrale auch verwenden, um die Konvergenz von Reihen nachzuweisen.

Beispiel 6.36. Es sei $\alpha > 1$ und $s_n = \sum_{k=1}^n k^{-\alpha}$ für $n \in \mathbb{N}$. Da $k^{-\alpha} \leq x^{-\alpha}$ für $x \in [k-1, k]$ nach (4.6) gilt, folgern wir aus Satz 6.6 und Beispiel 6.33 die

Ungleichungen

$$s_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} k^{-\alpha}\,\mathrm{d}x \le 1 + \int_1^n x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x \le 1 + \int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{\alpha - 1},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$. Also ist $(s_n)_n$ beschränkt, und somit existiert $\sum_{k=1}^\infty k^{-\alpha}$ für jedes $\alpha > 1$ nach Satz 3.4. (Vergleiche Beispiel 3.13.) ◊

Die folgende wichtige Funktion ist ein kontinuierliches Analogon der Fakultät.

Beispiel 6.37 (Gammafunktion). Sei $x > 0$. Nach Beispiel 6.35 existiert

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Dabei gelten $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ und $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Partielle Integration (mit $\mathrm{e}^{-t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-t}$) impliziert die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \lim_{a\to 0^+, b\to\infty} \int_a^b t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{a\to 0^+, b\to\infty} \left(-\int_a^b x t^{x-1}(-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t + t^x(-\mathrm{e}^{-t})\Big|_{t=a}^{b} \right) \\
&= \lim_{a\to 0^+, b\to\infty} \left(x\int_a^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + a^x\mathrm{e}^{-a} - b^x\mathrm{e}^{-b} \right) \\
&= x\Gamma(x),
\end{aligned}$$

wobei die Limiten $a \to 0^+$ und $b \to \infty$ getrennt betrachtet werden und wir (den Beweis von) Beispiel 6.35a) verwenden. Da $\Gamma(1) = 1$ nach Beispiel 6.33 gilt, folgt die zweite Behauptung nun per Induktion. □

Literaturverzeichnis

[1] H. Amann und J. Escher, *Analysis I.* Dritte Auflage. Birkhäuser, 2006.
[2] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, D. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel und R. Remmert, *Zahlen.* Dritte verbesserte Auflage. Springer-Verlag, 1992.
[3] O. Forster, *Analysis 1.* Achte verbesserte Auflage. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2006.
[4] K. Königsberger, *Analysis 1.* Fünfte neu bearbeitete Auflage, Springer–Verlag, 2001.
[5] E. Landau, *Grundlagen der Analysis.* Dritte Auflage. Chelsea Publishing, New York, 1960.
[6] Jan W. Prüss und M. Wilke, *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme.* Birkhäuser, 2010.
[7] W. Rudin, *Analysis.* Dritte Auflage. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2005.