

Analysis 3

Skriptum Wintersemester 2021/22

Dieses Skriptum folgt meiner Vorlesung im Wintersemester 2021/22, wobei gelegentlich kleinere Korrekturen und Ergänzungen vorgenommen wurden. Die Nummerierung blieb unverändert. Die Beweise und Rechnungen im Skriptum sind typischerweise etwas knapper gehalten als in der Vorlesung. Es fehlen darüber hinaus die meisten Schaubilder und die Mehrzahl der mündlichen Erläuterungen aus der Vorlesung. Referenzen auf Analysis 1 und 2 beziehen sich auf meine gleichnamigen Skripten aus dem akademischen Jahr 2020/21. Gelegentlich verwende ich aber auch Begriffe, Notation und Standardresultate aus diesen Vorlesungen ohne weiteren Kommentar.

Ich bedanke mich herzlich bei Esther Bleich und Andreas Geyer-Schulz für ihre Unterstützung bei der Erstellung früherer Versionen dieses Skriptums, sowie für die Erstellung der Bilder.

Karlsruhe, 9. Mai 2022

Roland Schnaubelt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Das Lebesguemaß	1
1.1. Etwas Maßtheorie	1
1.2. Konstruktion des Lebesguemaßes	10
1.3. Anhang: Der Beweis des Maßeindeutigkeitssatzes	25
Kapitel 2. Messbare Funktionen und das Lebesgue-Integral	28
2.1. Messbare Funktionen	28
2.2. Konstruktion des Lebesgue-Integrals	38
Kapitel 3. Vertiefungen der Integrationstheorie	51
3.1. Nullmengen	51
3.2. Der Lebesguesche Konvergenzsatz	54
3.3. Iterierte Integrale	61
3.4. Der Transformationssatz	73
Kapitel 4. Oberflächenintegral und Integralsätze	87
4.1. Etwas Differentialgeometrie	87
4.2. Oberflächenintegral	91
4.3. Die Sätze von Gauß und Stokes	103
Kapitel 5. Die Lebesgueschen Räume und Fourierreihen	115
5.1. Die L^p -Räume	115
5.2. Fourierreihen	124
Literaturverzeichnis	136

KAPITEL 1

Das Lebesguemaß

In dieser Vorlesung entwickeln wir einen recht allgemeinen Integralbegriff, der insbesondere auf Henri Lebesgue zurückgeht und der für die moderne Mathematik von fundamentaler Bedeutung ist. In der Stochastik wird diese Integrationstheorie ebenfalls verwendet. Unser Zugang beruht auf dem Konzept des Maßes, das wir in diesem Kapitel diskutieren. Wir verwenden dabei ohne weitere Kommentare die grundlegenden Regeln der Mengenalgebra, vergleiche etwa die Abschnitte I.2 und I.3 des Lehrbuches [1] und die Übungen.

Uns interessiert in diesem Kurs vor allem das Lebesguemaß, welches im \mathbb{R}^m das Elementarvolumen etwa von Quadern auf allgemeinere Teilmengen fortsetzen und dabei gewisse natürliche Eigenschaften besitzen soll. Beispiele wie z.B. Satz 1.27 unten zeigen, dass dies nicht auf der ganzen Potenzmenge des \mathbb{R}^m gelingen kann. Deswegen muss man sich auf gewisse Systeme von Teilmengen einschränken. Im ersten Abschnitt definieren und diskutieren wir die entsprechenden Begriffe in großer Allgemeinheit. Im zweiten Teil konstruieren wir dann als Beispiel die gewünschte Fortsetzung des elementaren Volumens von Quadern auf eine Klasse von Teilmengen des \mathbb{R}^m , die alle relevanten Objekte enthält.

1.1. Etwas Maßtheorie

Es sei stets X eine nichtleere Menge und $\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subseteq X\}$ ihre Potenzmenge. Wir führen zunächst die Systeme von Teilmengen ein, auf denen wir später Maße definieren werden.

DEFINITION 1.1. *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt σ -Algebra (auf X), wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt.*

- (A1) *Die Grundmenge X ist ein Element von \mathcal{A} .*
- (A2) *Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann liegt auch das Komplement $A^c := X \setminus A$ in \mathcal{A} .*
- (A3) *Seien $A_n \in \mathcal{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ in \mathcal{A} enthalten.*

Man beachte, dass σ -Algebren Mengen von Teilmengen A einer festen Grundmenge X sind. Um dies sprachlich zu unterscheiden, sprechen wir hier auch von ‘Mengensystemen’ oder ‘-familien’. Im Falle von $X = \mathbb{R}^m$ werden wir im Grunde nur eine bestimmte ‘sehr große’ σ -Algebra verwenden, siehe Definition 1.8. Um diese einzuführen und zu untersuchen, benötigen wir allerdings den obigen allgemeinen Begriff. In der Stochastik verwendet man eine größere Vielfalt von σ -Algebren, die auch eine wahrscheinlichkeitstheoretische Bedeutung haben können.

Zur Illustration diskutieren wir zunächst einige einfache Beispiele. Dabei bezeichnen wir endliche oder abzählbar unendliche Mengen als *abzählbar*. Wir verwenden im Folgenden häufig, dass Teilmengen, abzählbare Vereinigungen und endliche kartesische Produkte abzählbarer Mengen wieder abzählbar sind, siehe etwa die Sätze I.6.7 bis I.6.9 in [1] und auch Beispiel 3.20 in Analysis 1.

BEISPIEL 1.2. a) Man sieht leicht ein, dass $\mathcal{P}(X)$ und $\{\emptyset, X\}$ stets σ -Algebren auf X sind. Für die Inklusion sind diese die größte bzw. kleinste σ -Algebra auf X .

b) Sei $A \subseteq X$ nichtleer. Dann ist $\mathcal{A} := \{\emptyset, A, A^c, X\}$ eine σ -Algebra auf X , da alle Komplemente und Vereinigungen von \emptyset, A, A^c und X wieder in \mathcal{A} liegen.

c) Das Mengensystem $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ endlich}\} \cup \mathbb{N}$ ist keine σ -Algebra auf \mathbb{N} . Zum Beispiel ist die Menge $A_n = \{2n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element von \mathcal{A} , aber weder A_1^c noch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ sind in \mathcal{A} enthalten.

d) Die Familie $\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid A \text{ oder } A^c \text{ sind abzählbar}\}$ ist eine σ -Algebra auf X .

BEWEIS. Zunächst gilt (A1), da $X^c = \emptyset$ abzählbar ist. Die Bedingung (A2) folgt aus der Definition von \mathcal{A} und der Gleichung $A^{cc} = A$. Seien $A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$ und A ihre Vereinigung. Wenn alle A_n abzählbar sind, dann gilt dies nach der Vorbemerkung auch für A . Sei nun A_k für ein $k \in \mathbb{N}$ nicht abzählbar. Dann ist A_k^c und damit $A^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \subseteq A_k^c$ abzählbar. Also liegt in beiden Fällen A in \mathcal{A} . \square

Der folgende Hilfssatz zeigt, dass σ -Algebren unter abzählbaren Mengenoperationen abgeschlossen sind.

LEMMA 1.3. *Seien \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X , $n \in \mathbb{N}$ und $A_j \in \mathcal{A}$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- a) $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$.
- b) $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$.
- c) $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ und $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}$.
- d) $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^c \in \mathcal{A}$.

BEWEIS. Aussage a) folgt sofort aus den Eigenschaften (A1) und (A2). Behauptung b) ergibt sich aus Teil a), Axiom (A3) und der Gleichung

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$$

Nach (A2) und (A3) wissen wir, dass die Menge $B := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j^c$ in \mathcal{A} liegt. Dann ist nach (A2) auch das Komplement $B^c = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$ in \mathcal{A} enthalten. Den zweiten Teil von Behauptung c) zeigt man wie in b), und d) folgt aus c) und (A2). \square

Mittels des nächsten Resultats konstruieren wir die für uns relevanten σ -Algebren.

LEMMA 1.4. *Sei \mathcal{F} eine nichtleere Familie von σ -Algebren \mathcal{A} auf X . Dann ist ihr Durchschnitt*

$$\mathcal{A}_0 = \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{F}\} := \{A \subseteq X \mid A \in \mathcal{A} \text{ für alle } \mathcal{A} \in \mathcal{F}\}$$

eine σ -Algebra auf X .

BEWEIS. Die Menge X liegt in allen σ -Algebren \mathcal{A} aus \mathcal{F} und damit auch in \mathcal{A}_0 . Seien A_n für $n \in \mathbb{N}$ Mengen aus \mathcal{A}_0 . Somit sind sie in jeder σ -Algebra \mathcal{A} in \mathcal{F} enthalten, und gemäß (A2) und (A3) gilt dies auch für das Komplement A_1^c und ihre Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Also beinhaltet \mathcal{A}_0 wie gefordert A_1^c und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. \square

Somit liefert die folgende zentrale Konstruktion eine σ -Algebra.

DEFINITION 1.5. Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nichtleer. Dann heißt

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \}$$

die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra und \mathcal{E} ein Erzeuger von $\sigma(\mathcal{E})$.

Diese Begriffsbildung erinnert an Definition 2.21 in Analysis 2, wo der Abschluss \overline{N} einer Teilmenge N eines metrischen Raumes erklärt wurde. Im nächsten Hilfssatz sehen wir, dass sich einige Eigenschaften des Abschlusses auf das Erzeugen von σ -Algebren übertragen. Allerdings gibt es keine so bequeme Beschreibung von $\sigma(\mathcal{E})$ wie die von \overline{N} durch Grenzwerte in Satz 2.22 aus Analysis 2. Gleichwohl wird es uns mit den richtigen Instrumenten oft gelingen, den Nachweis von Eigenschaften einer σ -Algebra auf solche eines (einfacheren) Erzeugers zu reduzieren; vergleiche etwa Lemma 1.10, Theorem 1.20 und Satz 2.3, sowie ihre Beweise.

LEMMA 1.6. Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. Dann erhalten wir $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.
- Das Erzeugnis $\sigma(\mathcal{E})$ ist die einzige σ -Algebra, die die Aussagen in Teil a) erfüllt. (Also ist $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ -Algebra, die \mathcal{E} enthält.)
- Sei \mathcal{E} eine σ -Algebra. Dann folgt die Gleichung $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E})$.
- Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gilt die Relation $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$.

BEWEIS. Die Inklusion $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ in Teil a) folgt direkt aus Definition 1.5. Die σ -Algebra \mathcal{A} in a) liegt in dem Durchschnitt in Definition 1.5, sodass $\sigma(\mathcal{E})$ in \mathcal{A} enthalten ist.

Sei \mathcal{C} eine σ -Algebra, die die Aussagen in a) erfüllt. Zunächst ist \mathcal{C} eine \mathcal{E} enthaltende σ -Algebra, woraus die Inklusion $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{C}$ nach Schritt a) folgt. Andererseits ist auch $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ -Algebra mit $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Die Voraussetzung an \mathcal{C} liefert nun die Umkehrung $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Also gilt Behauptung b).

Wir erhalten die Aussagen c) bzw. d) aus Teil a), wenn wir dort als σ -Algebra \mathcal{A} die Systeme \mathcal{E} bzw. $\sigma(\mathcal{E}')$ wählen. \square

Wir diskutieren zunächst zwei einfache Beispiele, bei denen man die erzeugte σ -Algebra konkret angeben kann.

BEISPIEL 1.7. a) Sei $\mathcal{E} = \{A\}$ für eine nichtleere Teilmenge $A \subseteq X$. Nach Beispiel 1.2 ist $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ eine σ -Algebra. Andererseits muss jede σ -Algebra mit A auch A^c und sowieso \emptyset und X enthalten. Gemäß Lemma 1.6 folgt $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$.

b) Seien $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. Dann erhalten wir

$$\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, X\}.$$

BEWEIS. In der σ -Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ müssen neben $\{1\}$ und $\{1, 2\}$ auch die Differenzmenge $\{2\}$ und die drei Komplemente $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$ und $\{1, 3, 4, 5\}$ liegen. Man prüft nun leicht nach, dass diese Mengen zusammen mit \emptyset und X eine σ -Algebra bilden. Also ergibt sich die Behauptung wieder aus Lemma 1.6. \square

In der Analysis spielt vor allem die folgende Klasse von σ -Algebren eine Rolle.

DEFINITION 1.8. Sei X ein metrischer Raum und $\mathcal{O}(X)$ das System der in X offenen Mengen. Dann heißt $\sigma(\mathcal{O}(X)) =: \mathcal{B}(X)$ die Borelsche σ -Algebra auf X . Man setzt $\mathcal{B}_m := \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Also enthält \mathcal{B}_m alle offenen und abgeschlossenen Mengen in \mathbb{R}^m , ihre abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitte, usw. Zum Beispiel liegen die halboffene Halbkugel $B(0, 1) \cap \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 \leq 0\}$ oder \mathbb{Q}^m als abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen $\{q_j\}$ in \mathcal{B}_m . Grob gesagt, sind alle ‘vernünftigen’ Teilmengen von \mathbb{R}^m in \mathcal{B}_m enthalten. Satz 1.27 liefert andererseits eine nichtborelsche Teilmenge des \mathbb{R}^m .

Im folgenden spielen *Intervalle* im \mathbb{R}^m eine wichtige Rolle. Das sind Mengen der Form $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_m$, wobei I_1, I_2, \dots, I_m Intervalle in \mathbb{R} sind. Für $a, b \in \mathbb{R}^m$ mit $a \leq b$ (d.h., $a_j \leq b_j$ für alle Komponenten a_j und b_j) schreiben wir dabei

$$(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_m, b_m), \quad [a, b) = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_m, b_m),$$

$$(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_m, b_m], \quad [a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m],$$

wobei $(a, b), [a, b), (a, b] = \emptyset$ sind, wenn $a_k = b_k$ für ein k gilt. Für $k \in \{1, \dots, m\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die abgeschlossenen Halbräume

$$H_k^-(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_k \leq \alpha\} \quad \text{und} \quad H_k^+(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_k \geq \alpha\}.$$

Alle diese Mengen liegen in \mathcal{B}_m , z.B. gilt mit (A2) und Lemma 1.3

$$(a, b] = [a, b] \cap \bigcap_{k=1}^m H_k^-(a_k)^c \in \mathcal{B}_m.$$

Wir beschreiben nun die Borelsche σ -Algebra \mathcal{B}_m mittels bequemerer Erzeuger als $\mathcal{O}(X)$. Entsprechende Aussagen erhält man für andere Typen von Intervallen und Halbräumen, siehe etwa die Übungen.

SATZ 1.9. Es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_m &= \sigma(\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}^m, a \leq b\}) \\ &= \sigma(\{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{Q}^m, a \leq b\}) \\ &= \sigma(\{H_k^-(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{Q}, k \in \{1, \dots, m\}\}). \end{aligned}$$

Hier kann man \mathbb{Q} durch \mathbb{R} ersetzen. Weiter ist jede offene Menge im \mathbb{R}^m die abzählbare Vereinigung offener Würfel.

BEWEIS. Wir bezeichnen die σ -Algebren auf der rechten Seite mit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ bzw. \mathcal{A}_3 . Wir zeigen nacheinander die Inklusionen $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_3 \subseteq \mathcal{B}_m \subseteq \mathcal{A}_1$. Dazu seien $a, b \in \mathbb{Q}^m$ mit $a \leq b$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $k \in \{1, \dots, m\}$.

1) Wenn $a_l = b_l$ für ein l gilt, dann ist $(a, b) = \emptyset$ ein Element von \mathcal{A}_2 . Andernfalls gibt es eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $1/n_0 < b_j - a_j$ für alle j . Wegen der Gleichung

$$(a, b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \left(a, b - \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) \right]$$

und (A3) für \mathcal{A}_2 liegt (a, b) in \mathcal{A}_2 . Lemma 1.6 impliziert nun die Relation $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$.

2) Ähnlich folgt die Inklusion $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_3$ aus Lemma 1.3, (A2) und der Formel

$$(a, b] = \bigcap_{k=1}^m (H_k^-(b_k) \cap H_k^-(a_k)^c) \in \mathcal{A}_3.$$

3) Die Menge $H_k^-(\alpha)$ ist abgeschlossen und somit in \mathcal{B}_m . Also gilt $\mathcal{A}_3 \subseteq \mathcal{B}_m$.

4) Gemäß Lemma 1.6 ergibt sich die verbleibende Inklusion $\mathcal{B}_m \subseteq \mathcal{A}_1$ aus dem zweiten Zusatz. Um diesen zu zeigen, sei $O \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Wir definieren das System

$$\mathcal{W}_n = \{W = B_{|\cdot|_\infty}(x, 2^{-n}) \mid W \subseteq O, x \in \mathbb{Q}^m\}$$

offener Würfel für jedes $n \in \mathbb{N}$. Mit \mathcal{W}_n ist auch die Vereinigung

$$V := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{W \mid W \in \mathcal{W}_n\}$$

abzählbar. Nach Konstruktion ist V eine Teilmenge von O . Sei umgekehrt $y \in O$. Dann gibt es einen Radius $r > 0$ mit $B_{|\cdot|_\infty}(y, r) \subseteq O$. Wir finden nun eine natürliche Zahl n und einen Punkt $x \in O \cap \mathbb{Q}^m$ mit $|x - y|_\infty < 2^{-n} < r/2$. Damit ist y ein Element von $B_{|\cdot|_\infty}(x, 2^{-n})$, und es gilt $B_{|\cdot|_\infty}(x, 2^{-n}) \subseteq B_{|\cdot|_\infty}(y, r) \subseteq O$. Folglich liegt y in V , und wir erhalten die gewünschte Gleichung $O = V$.

Für den ersten Zusatz, sei z.B. $\tilde{\mathcal{A}}_2$ wie \mathcal{A}_2 aber mit \mathbb{R} statt \mathbb{Q} definiert. Aus dem Obigen und Lemma 1.6 folgt dann $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_2 \subseteq \tilde{\mathcal{A}}_2 \subseteq \mathcal{B}_m$ und damit $\tilde{\mathcal{A}}_2 = \mathcal{B}_m$. \square

Wir wollen nun die Borelsche σ -Algebra einer Teilmenge mit der des Grundraums in Beziehung setzen. Dafür definieren wir für eine nichtleere Menge $Y \subseteq X$ und ein nichtleeres Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die *Spur* (von \mathcal{M} in Y) durch

$$\mathcal{M}_Y = \mathcal{M} \cap Y := \{B = M \cap Y \mid M \in \mathcal{M}\} \subseteq \mathcal{P}(Y). \quad (1.1)$$

Wir fassen \mathcal{M}_Y auch als Teilsystem von $\mathcal{P}(X)$ auf (da $B \subseteq Y$ auch in X liegt).

LEMMA 1.10. Sei $\emptyset \neq Y \subseteq X$.

a) Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X . Dann ist $\mathcal{A}_Y = \mathcal{A} \cap Y$ eine σ -Algebra auf Y . Ferner ist \mathcal{A}_Y genau dann in \mathcal{A} enthalten, wenn Y in \mathcal{A} liegt. In diesem Fall erhalten wir $\mathcal{A}_Y = \{B \in \mathcal{A} \mid B \subseteq Y\}$.

b) Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gilt die Gleichung $\sigma(\mathcal{E} \cap Y) = \sigma(\mathcal{E}) \cap Y$.

BEWEIS. a) Zunächst liegt $Y = X \cap Y$ in \mathcal{A}_Y . Es seien $B_n = A_n \cap Y$ für $n \in \mathbb{N}$ Elemente aus \mathcal{A}_Y , wobei alle A_n aus \mathcal{A} sind. Wir erhalten die Gleichungen

$$Y \setminus B_1 = Y \cap (A_1 \cap Y)^c = Y \cap (A_1^c \cup Y^c) = Y \cap A_1^c,$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap Y) = Y \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Da \mathcal{A} eine σ -Algebra ist, sind auch die obigen Mengen Elemente von \mathcal{A}_Y , und \mathcal{A}_Y erweist sich so als σ -Algebra.

Sei $\mathcal{A}_Y \subseteq \mathcal{A}$. Dann liegt $Y \in \mathcal{A}_Y$ in \mathcal{A} . Nun sei Y in \mathcal{A} . Für jedes $B \in \mathcal{A}_Y$ gibt es eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $B = A \cap Y$. Folglich sind B in \mathcal{A} und die Familie \mathcal{A}_Y in $\{B \in \mathcal{A} \mid B \subseteq Y\} \subseteq \mathcal{A}$ enthalten. Falls umgekehrt \mathcal{A} eine Menge $B \subseteq Y$ beinhaltet, so ist $B = B \cap Y$ auch ein Element von \mathcal{A}_Y . Also ist Aussage a) gezeigt.

b) Lemma 1.6 impliziert die Inklusion $\sigma(\mathcal{E} \cap Y) \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \cap Y$, da das System $\sigma(\mathcal{E}) \cap Y$ die Familie $\mathcal{E} \cap Y$ umfasst und nach Teil a) eine σ -Algebra ist. Für die Umkehrung setzen wir

$$\mathcal{C} = \{A \subseteq X \mid A \cap Y \in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)\}.$$

Wir müssen die Relation $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{C}$ zeigen. Zunächst gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$, da für jedes $E \in \mathcal{E}$ der Durchschnitt $E \cap Y$ in $\sigma(\mathcal{E} \cap Y)$ enthalten ist. Gemäß Lemma 1.6 folgt nun Behauptung b), sobald \mathcal{C} als σ -Algebra auf X erkannt worden ist.

Zunächst liegt X in \mathcal{C} , da $Y = X \cap Y$ ein Element von $\sigma(\mathcal{E} \cap Y)$ ist. Zum Nachweis von (A2) und (A3) seien A_n aus \mathcal{C} für $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Es gilt also $A_n \cap Y \in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach (A2), (A3) und Lemma 1.3 für $\sigma(\mathcal{E} \cap Y)$ sind dann auch

$$(X \setminus A_1) \cap Y = Y \setminus (A_1 \cap Y) \quad \text{und} \quad Y \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap Y)$$

in $\sigma(\mathcal{E} \cap Y)$ enthalten. Also liegen die Mengen $X \setminus A_1$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in \mathcal{C} , sodass \mathcal{C} wie gefordert eine σ -Algebra ist. \square

Im letzten Beweisschritt haben wir erstmals das *Prinzip der guten Mengen* verwendet. Mit diesem werden oft Eigenschaften einer σ -Algebra $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ aus solchen ihres Erzeuger \mathcal{E} abgeleitet. Hierzu definiert man ein System \mathcal{C} ‘guter Mengen’ in solcher Weise, dass sich die gewünschte Aussage aus der Inklusion $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ ergibt. Diese Relation folgt mit Lemma 1.6 im einfachsten Fall daraus, dass \mathcal{E} in \mathcal{C} liegt und \mathcal{C} eine σ -Algebra ist. Wir verwenden den obigen Hilfssatz meist in Form der nächsten Folgerung zu Borelschen σ -Algebren.

KOROLLAR 1.11. *Seien X ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann gilt $\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X) \cap Y$. Wenn Y in $\mathcal{B}(X)$ liegt, erhalten wir $\mathcal{B}(Y) = \{B \in \mathcal{B}(X) \mid B \subseteq Y\}$.*

BEWEIS. Nach Bemerkung 2.25 in Analysis 2 gilt $\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(X) \cap Y$. Somit liefert Lemma 1.10 b) den ersten Teil. Der zweite folgt dann aus Lemma 1.10 a). \square

Wir definieren unten Maße, indem wir minimale Anforderungen an einen verallgemeinerten Volumenbegriff aufstellen. Ausgehend vom Elementarvolumen, wird man dem \mathbb{R}^m das ‘Volumen’ ∞ zuweisen wollen. Also müssen wir in der erweiterten

Zahlen-Halbgerade $[0, \infty] = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ rechnen, wobei man auch $+\infty$ statt ∞ schreibt. (Zum Folgenden siehe Abschnitt 3.4 in Analysis 1, sowie Abschnitt 2.1 dieses Skriptums.) Wir versehen dazu $[0, \infty]$ mit den zusätzlichen Rechenregeln

$$\infty + \infty = \infty, \quad \pm a + \infty = \infty \pm a = \infty, \quad a < \infty \quad \text{für alle } a \in [0, \infty) = \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Der Ausdruck $\infty - \infty$ ist **nicht** definiert. Ferner gilt $a_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, falls es für alle $K > 0$ ein $N_K \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq K$ für alle $n \geq N_K$ gibt. Für $a_n \in [0, \infty]$ existiert stets die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $[0, \infty]$. Sie ist dabei gleich ∞ , wenn ein $a_k = \infty$ ist oder wenn sie divergiert. Diese Reihe kann ferner ungeordnet werden.

Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *disjunkt*, wenn $M \cap N = \emptyset$ für alle $M, N \in \mathcal{M}$ mit $M \neq N$ gilt. Wir schreiben auch $\dot{\cup}$ für eine Vereinigung von disjunkten Mengen. Der folgende Begriff ist von grundlegender Bedeutung für große Teile der Mathematik.

DEFINITION 1.12. Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X . Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt (positives) Maß auf \mathcal{A} , wenn sie die Eigenschaften

$$(M1) \quad \mu(\emptyset) = 0,$$

$$(M2) \quad \mu(\dot{\cup}_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{für jede disjunkte Menge } \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$$

(σ -Additivität)

besitzt. Das Tripel (X, \mathcal{A}, μ) heißt dann Maßraum. Falls $\mu(X) < \infty$ gilt, nennt man μ endlich. Wenn $\mu(X) = 1$ ist, dann ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Hierbei folgt (M1) schon, wenn man (M2) und $0 \leq \mu(\emptyset) < \infty$ fordert, da dann

$$\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \dot{\cup} \emptyset \dot{\cup} \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\emptyset).$$

gilt. Seien Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt. Dann ergibt sich aus (M2) und (M1) auch die *endliche Additivität* von μ durch

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n) &= \mu(A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n \dot{\cup} \emptyset \dot{\cup} \emptyset \dot{\cup} \dots) \\ &= \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots \\ &= \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Es ist klar, dass ein sinnvoller Volumenbegriff dieser Eigenschaft genügen muss. Die stärkere σ -Additivität werden wir für Konvergenzbetrachtungen benötigen. Wir diskutieren zunächst zur Illustration einige einfache Beispiele, die man auch ohne Maßtheorie gut behandeln könnte. Die Komplexität dieser Theorie wird erst im nächsten Abschnitt beim Lebesguemaß benötigt.

BEISPIEL 1.13. a) Seien $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und $x \in X$ fest gewählt. Dann definiert

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \quad \text{für } A \subseteq X$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(X)$, das *Punktmaß* oder *Diracmaß* heißt.

BEWEIS. Offenbar gelten $\delta_x(\emptyset) = 0$, $\delta_x(X) = 1$ und $\delta_x(A) \in [0, \infty]$. Seien $A_n \subseteq X$ für $n \in \mathbb{N}$ disjunkte Teilmengen und B ihre Vereinigung. Nun liegt x genau dann in B , wenn es in einem einzigen A_k liegt. Daraus folgt die Gleichung

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1, & x \in A_k \\ 0, & x \notin B \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(A_n)$$

und somit (M2). \square

b) Seien $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $p_n \in [0, \infty]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Dann erklärt man durch

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} p_n \quad \text{für } A \subseteq \mathbb{N}$$

ein Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, das genau im Falle $\sum_n p_n = 1$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Es gilt $\mu(\{k\}) = p_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Wenn alle $p_n = 1$ sind, dann erhalten wir das *Zählmaß* $\zeta(A) = \#A$, wobei $\#A \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die Anzahl der Elemente von A ist.

BEWEIS. Alle Aussagen bis auf (M2) ergeben sich sofort aus den Definitionen. Seien $A_j \subseteq \mathbb{N}$ für $j \in \mathbb{N}$ disjunkt und B ihre Vereinigung. Da jedes $n \in B$ in genau einem A_j liegt, erhalten wir (M2) mit

$$\mu(B) = \sum_{n \in B} p_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in A_j} p_n = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j). \quad \square$$

c) Seien (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, $X_0 \subseteq X$ und \mathcal{A}_0 eine σ -Algebra auf X_0 mit $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$. Wir setzen $\mu|_{\mathcal{A}_0}(A) := \mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}_0$. Dann ist $(X_0, \mathcal{A}_0, \mu|_{\mathcal{A}_0})$ ein Maßraum, da sich (M1) und (M2) direkt von μ auf $\mu|_{\mathcal{A}_0}$ übertragen. Sei weiter $X_0 \in \mathcal{A}$. Wir wählen nun speziell $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap X_0 \subseteq \mathcal{A}$, siehe Lemma 1.10. Dann ist

$$\mu_{X_0}(B) := \mu(B) \quad \text{für } B \in \mathcal{A} \text{ mit } B \subseteq X_0$$

ein Maß auf \mathcal{A}_0 , die *Einschränkung* von μ auf X_0 . \diamond

Sei (A_n) eine Folge in $\mathcal{P}(X)$. Wir schreiben $A_n \uparrow$, falls $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, sowie $A_n \downarrow$ im Falle $A_{n+1} \subseteq A_n$. Man sagt dann, dass die Mengen *wachsen* bzw. *fallen*. Wenn zusätzlich A die Vereinigung bzw. der Durchschnitt aller A_n ist, setzt man $A_n \uparrow A$ bzw. $A_n \downarrow A$. Im nächsten Satz sammeln wir grundlegende Eigenschaften von Maßen. Vorab isolieren wir einen Beweisteil als Hilfssatz, da diese Aussage später noch benötigt wird.

LEMMA 1.14. *Seien \mathcal{A} eine σ -Algebra, $A_j \in \mathcal{A}$ für $j \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann existieren disjunkte Mengen $B_j \in \mathcal{A}$ mit $B_j \subseteq A_j$ für $j \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n B_j$.*

BEWEIS. Wir setzen rekursiv $B_1 = A_1$ und $B_j = A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1})$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann liegt jedes B_j in \mathcal{A} und ist in A_j enthalten. Weiter ergibt sich induktiv die Disjunktheit von $\{B_j \mid j \in \mathbb{N}\}$. Ferner gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\bigcup_{j=1}^n B_j = \bigcup_{j=1}^n A_j =: S_n.$$

Hieraus folgt die Beziehung

$$\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j = B_{n+1} \cup S_n = (A_{n+1} \setminus S_n) \cup S_n = \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j.$$

Also gilt die obige Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit auch für $n = \infty$. \square

SATZ 1.15. *Seien (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $A, B, A_j \in \mathcal{A}$ für $j \in \mathbb{N}$.*

a) *Sei $A \subseteq B$. Dann gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$. (Monotonie)*

Wenn ferner $\mu(A) < \infty$ ist, dann folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$. Insbesondere gilt für endliche μ die Gleichung $\mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A)$.

b) *Es gilt $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$. (σ -Subadditivität)*

c) *Sei $A_j \uparrow$. Dann strebt $\mu(A_j)$ für $j \rightarrow \infty$ gegen $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$. (Stetigkeit von unten)*

d) *Seien $A_j \downarrow$ und $\mu(A_1) < \infty$. Dann konvergiert $\mu(A_j)$ für $j \rightarrow \infty$ gegen $\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j)$. (Stetigkeit von oben)*

BEWEIS. a) Die Menge B ist die disjunkte Vereinigung von A und $B \setminus A$. Da μ endlich additiv ist und nichtnegative Werte annimmt, folgt die Relation

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

Wenn $\mu(A)$ endlich ist, erhält man auch den zweiten Teil von a).

b) Wir verwenden die Mengen B_j aus Lemma 1.14. Mittels (M2) und Teil a) schließen wir auf die behauptete Ungleichung

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

c) Es sei $A_j \uparrow A$. Dann gilt in Lemma 1.14 sogar $\bigcup_{j=1}^n B_j = A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ausgehend von der letzten abgesetzten Identität, berechnen wir nun

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(B_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

d) Es seien $A_j \downarrow$ und $\mu(A_1) < \infty$. Mittels Komplementbildung führen wir die letzte Aussage auf Teil c) zurück. Wir setzen dazu $C_j = A_1 \setminus A_j = A_1 \cap A_j^c$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Somit wachsen die Mengen C_j gegen

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j = A_1 \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c = A_1 \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c = A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Nach Voraussetzung und Behauptung a), gilt $\mu(A_j) \leq \mu(A_1) < \infty$. Deswegen können wir aus a) und c) die Gleichungen

$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C_j) = \mu(A_1) - \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j)$$

und dann Teil d) folgern. (Der letzte Limes existiert, da $(\mu(A_j))$ wegen a) fällt.) \square

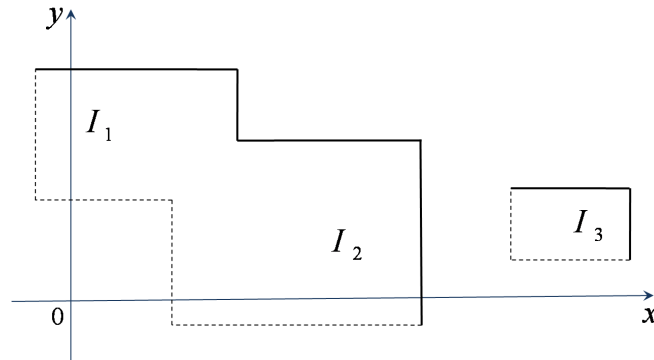


ABBILDUNG 1.1. In diesem Schaubild ist $A = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \in \mathcal{F}_2$.

In den Teilen a) und d) des obigen Satzes kann man nicht auf die Bedingungen $\mu(A), \mu(A_1) < \infty$ verzichten. Als Beispiel betrachten das wie Zählmaß ζ aus Beispiel 1.13, sowie $C = \{1, 3, 5, \dots\}$ und $B_n = \{n, n+1, \dots\}$. Hier gelten $\zeta(C) = \zeta(B_n) = \infty$, aber $\zeta(C^c) = \infty$ und $\zeta(B_n^c) = n-1$, sowie $B_n \downarrow \emptyset$.

1.2. Konstruktion des Lebesguemaßes

Sei $I = (a, b] \subseteq \mathbb{R}^m$ für $a, b \in \mathbb{R}^m$ mit $a \leq b$. Wir definieren das Elementarvolumen

$$\lambda(I) = \lambda_m(I) := (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_m - a_m). \quad (1.3)$$

Die Menge dieser Intervalle I heißt \mathcal{J}_m . Wir setzen in drei Schritten λ_m auf \mathcal{J}_m zum Lebesguemaß λ_m auf $\mathcal{B}_m = \sigma(\mathcal{J}_m)$ fort. Diese Konstruktion geht insbesondere auf Émile Borel und Henri Lebesgue (um 1900) zurück.

1. Schritt: Der Ring der Figuren.

Wir betrachten zunächst endliche Vereinigungen der Intervalle in \mathcal{J}_m und definieren die Familie \mathcal{F}_m der *Figuren* durch

$$\mathcal{F}_m = \left\{ A = \bigcup_{j=1}^n I_j \mid I_j \in \mathcal{J}_m, n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1.4)$$

Man beachte, dass die Vereinigung in der obigen Definition nicht disjunkt zu sein braucht, vergleiche Abbildung 1.1. Das Lebesguemaß für eine Figur kann man im Falle einer disjunkten Darstellung in (1.4) auf naheliegende Weise definieren, siehe (1.5). Die Existenz einer solcher disjunkten Zerlegung und andere wichtige Eigenschaften des Systems \mathcal{F}_m werden im nächsten Hilfssatz gezeigt.

LEMMA 1.16. *Seien $I, I' \in \mathcal{J}_m$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- Wir haben $\sigma(\mathcal{F}_m) = \mathcal{B}_m$.*
- Der Durchschnitt $I \cap I'$ ist in \mathcal{J}_m enthalten.*
- Die Differenzmenge $I \setminus I'$ liegt in \mathcal{F}_m und $I \setminus I'$ ist die endliche Vereinigung disjunkter Intervalle aus \mathcal{J}_m .*

d) Jedes $A \in \mathcal{F}_m$ ist die endliche Vereinigung disjunkter Intervalle aus \mathcal{J}_m .

e) Die Menge \mathcal{F}_m ist ein (Mengen-)Ring; das heißt, für alle $A, B \in \mathcal{F}_m$ liegen auch die Mengen \emptyset , $B \setminus A$ und $A \cup B$ in \mathcal{F}_m .

Man beachte, dass im Gegensatz zu einer σ -Algebra ein Ring die Grundmenge und abzählbar unendliche Vereinigungen nicht enthalten muss.

BEWEIS. a) Es gelten die Inklusionen $\mathcal{J}_m \subseteq \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{B}_m$ und nach Satz 1.9 auch die Identität $\mathcal{B}_m = \sigma(\mathcal{J}_m)$. Also folgt Behauptung a) aus Lemma 1.6.

b) Seien $I = \prod_{k=1}^m (a_k, b_k]$ und $I' = \prod_{k=1}^m (a'_k, b'_k]$. Dann erhalten wir wie gefordert

$$\begin{aligned} I \cap I' &= \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall k \in \{1, \dots, m\} : x_k \in (a_k, b_k] \cap (a'_k, b'_k]\} \\ &= \prod_{k=1}^m (\max\{a_k, a'_k\}, \min\{b_k, b'_k\}] \in \mathcal{J}_m. \end{aligned}$$

Dabei ist $I \cap I'$ leer, wenn $\max\{a_k, a'_k\} \geq \min\{b_k, b'_k\}$ für ein k ist.

c) Wir zeigen Teil c) durch Induktion über m . Für $a \leq b$ und $a' \leq b'$ in \mathbb{R} gilt $(a, b] \setminus (a', b'] = (a, b] \cap ((-\infty, a'] \cup (b', \infty)) = ((a, b] \cap (-\infty, a']) \cup ((a, b] \cap (b', \infty))$.

Rechts stehen hier zwei disjunkte, eventuell leere Intervalle aus \mathcal{J}_1 , sodass Aussage c) für $m = 1$ wahr ist.

Aussage c) sei für ein $m \in \mathbb{N}$ bewiesen. Wir schreiben die Intervalle $I, I' \in \mathcal{J}_{m+1}$ als $I = I_1 \times I_m$ und $I' = I'_1 \times I'_m$ mit $I_1, I'_1 \in \mathcal{J}_1$ und $I_m, I'_m \in \mathcal{J}_m$. Damit erhalten wir die disjunkte Vereinigung

$$I \setminus I' = ((I_1 \setminus I'_1) \times I_m) \cup ((I_1 \cap I'_1) \times (I_m \setminus I'_m)).$$

Der Induktionsanfang, Aussage b) und die Induktionsvoraussetzung zeigen, dass die Faktoren in den kartesischen Produkten jeweils endliche disjunkte Vereinigungen von Intervallen in \mathcal{J}_1 bzw. \mathcal{J}_m sind. Also ist $I \setminus I'$ eine endliche disjunkte Vereinigung von Elementen aus \mathcal{J}_{m+1} , und c) ist für $m + 1$ gezeigt. Somit gilt Behauptung c).

d) Wir verwenden eine Induktion über die Anzahl n der Intervalle in der Darstellung (1.4) von A in \mathcal{F}_m . Im Falle $A = I_1 \in \mathcal{J}_m$ ist Aussage d) offenbar erfüllt. Weiter gelte d) für ein festes $n \in \mathbb{N}$ und jede Menge der Form $\bigcup_{j=1}^n I_j$ mit $I_j \in \mathcal{J}_m$. Sei nun $A = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j$ für gewisse Intervalle I_j aus \mathcal{J}_m gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es disjunkte Intervalle $I'_1, \dots, I'_l \in \mathcal{J}_m$ mit

$$\bigcup_{j=1}^n I_j = \bigcup_{i=1}^l I'_i.$$

Daraus folgt die Gleichung

$$A = I_{n+1} \cup \bigcup_{j=1}^n I_j = I_{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^l (I'_i \setminus I_{n+1}).$$

Nach Teil c) ist jede Differenz $I'_i \setminus I_{n+1}$ eine endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen aus \mathcal{J}_m , sodass auch A diese Eigenschaft besitzt. Durch Induktion ergibt sich Teil d).

e) Die leere Menge $\emptyset = (a, a]$ gehört zu $\mathcal{J}_m \subseteq \mathcal{F}_m$. Seien $A, B \in \mathcal{F}_m$ durch

$$A = \bigcup_{j=1}^n I_j \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{j=1}^l I'_j$$

für $I_j, I'_i \in \mathcal{F}_m$ gegeben. Aufgrund der Definition (1.4) ist auch $A \cup B$ ein Element von \mathcal{F}_m . Weiter sieht man induktiv, dass endliche Vereinigungen das System \mathcal{F}_m invariant lassen.

Wir behandeln $B \setminus A$ per Induktion über die Zahl $n \in \mathbb{N}$ in der Darstellung von A . Sei zuerst $n = 1$, es gelte also $A = I_1 \in \mathcal{J}_m$. Daraus folgt die Identität

$$B \setminus A = B \cap I_1^c = \bigcup_{j=1}^l (I'_j \cap I_1^c) = \bigcup_{j=1}^l (I'_j \setminus I_1).$$

Gemäß Teil c) liegt die Menge $I'_i \setminus I_1$ in \mathcal{F}_m , sodass nach dem bisher Gezeigten auch $B \setminus A$ in \mathcal{F}_m enthalten ist.

Nun sei für ein $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $B \setminus A' \in \mathcal{F}_m$ gezeigt, wenn die Figur A' eine Darstellung wie in (1.4) mit diesem n hat. Eine Menge A aus \mathcal{F}_m besitze eine solche Darstellung mit $n + 1$. Also kann man $A = A' \cup I_{n+1}$ für ein obiges A' und ein Intervall $I_{n+1} \in \mathcal{J}_m$ schreiben. Dann gelten die Gleichungen

$$B \setminus A = B \cap (A' \cup I_{n+1})^c = (B \cap (A')^c) \cap I_{n+1}^c = (B \setminus A') \cap I_{n+1}^c = (B \setminus A') \setminus I_{n+1}.$$

Laut Induktionsvoraussetzung liegt $B \setminus A'$ in \mathcal{F}_m , und damit auch $(B \setminus A') \setminus I_{n+1}$ wegen des Induktionsanfanges. Folglich ist $B \setminus A$ für alle $A, B \in \mathcal{F}_m$ in \mathcal{F}_m enthalten. \square

2. Schritt: Das Lebesguemaß auf \mathcal{F}_m .

Wir wollen nun das Elementarvolumen $\lambda_m(I)$ aus (1.3) von den Intervallen $I \in \mathcal{J}_m$ zu deren endlichen Vereinigungen $A \in \mathcal{F}_m$ auf natürliche Weise fortsetzen, siehe (1.5). Dabei werden wir im Grunde ein Maß erhalten, allerdings ist \mathcal{F}_m keine σ -Algebra. Diese Hürde wird dann im dritten Schritt überwunden. Wir zeigen zunächst, dass die Definition von $\lambda_m(A)$ in (1.5) nicht von der Wahl der Intervalle in Lemma 1.16 d) abhängt, vergleiche Abbildung 1.2.

LEMMA 1.17. *Seien $\{I_1, \dots, I_n\}$ und $\{I'_1, \dots, I'_l\}$ zwei jeweils disjunkte Mengen von Intervallen in \mathcal{J}_m mit $\bigcup_{j=1}^n I_j = \bigcup_{i=1}^l I'_i$. Dann gilt die Identität*

$$\sum_{j=1}^n \lambda_m(I_j) = \sum_{i=1}^l \lambda_m(I'_i).$$

BEWEIS. Wie zeigen die Behauptung zuerst für $n = 1$ mit einer Induktion über die Raumdimension m . Danach schließen wir auf den Fall allgemeiner $n \in \mathbb{N}$.

1) Seien $n = 1$ und $I := I_1 \in \mathcal{J}_m$.

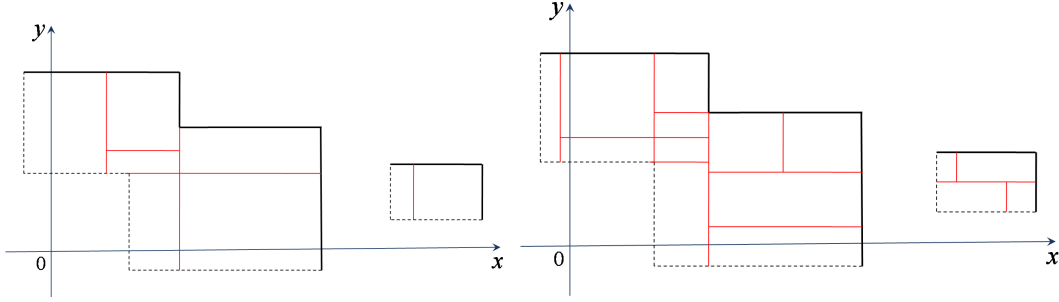


ABBILDUNG 1.2. Zwei Zerlegungen von $A \in \mathcal{F}_2$ aus Abbildung 1.1 in disjunkte Intervalle.

a) Wir betrachten zuerst den Fall $m = 1$ mit $I = (\alpha, \beta]$ und $I'_i = (\alpha'_i, \beta'_i]$ für $i \in \{1, \dots, l\}$. Indem wir gegebenenfalls umnummerieren, erhalten wir

$$\alpha = \alpha'_1 \leq \beta'_1 = \alpha'_2 \leq \dots \leq \beta'_{l-1} = \alpha'_l \leq \beta'_l = \beta.$$

Daraus folgt nun die Behauptung wegen

$$\lambda_1(I) = \beta - \alpha = \sum_{i=1}^l (\beta'_i - \alpha'_i) = \sum_{i=1}^l \lambda_1(I'_i).$$

b) Die Aussage gelte für ein $m \in \mathbb{N}$. Seien I und I'_i aus \mathcal{J}_{m+1} wie vorausgesetzt. Dann gibt es Intervalle \tilde{I} und \tilde{I}'_i in \mathcal{J}_m sowie Zahlen $\alpha < \beta$ und $\alpha'_i < \beta'_i$ mit

$$I = \tilde{I} \times (\alpha, \beta] \quad \text{und} \quad I'_i = \tilde{I}'_i \times (\alpha'_i, \beta'_i]$$

für $i \in \{1, \dots, l\}$. Wir ordnen die Zahlen $\alpha'_1, \beta'_1, \dots, \alpha'_l, \beta'_l$ der Größe nach an und nummerieren sie neu zu γ_k für $k \in \{1, \dots, p+1\}$, wobei mehrfach auftretende Zahlen nur einmal berücksichtigt werden. Wir erhalten so nichtleere disjunkte Intervalle $J_k = (\gamma_k, \gamma_{k+1}]$ für $k \in \{1, \dots, p\}$ mit Vereinigung $(\alpha, \beta]$, wobei der Durchschnitt $J_k \cap (\alpha'_i, \beta'_i]$ für alle k und i entweder leer oder gleich J_k ist. Weiter gibt es für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$ Indizes $k(i, 1), \dots, k(i, q_i) \in \{1, \dots, p\}$ mit $(\alpha'_i, \beta'_i] = J_{k(i,1)} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} J_{k(i,q_i)}$. Daraus folgt die Identität

$$I'_i = \tilde{I}'_i \times \bigcup_{r=1}^{q_i} J_{k(i,r)}$$

für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$. Wir verwenden nun die Definition (1.3) und den Schritt a) in den Gleichungen

$$\lambda_{m+1}(I'_i) = \lambda_m(\tilde{I}'_i) \lambda_1\left(\bigcup_{r=1}^{q_i} J_{k(i,r)}\right) = \lambda_m(\tilde{I}'_i) \sum_{r=1}^{q_i} \lambda_1(J_{k(i,r)}) = \sum_{r=1}^{q_i} \lambda_{m+1}(\tilde{I}'_i \times J_{k(i,r)}).$$

Um die folgende Summe über i zu manipulieren, definieren wir die Indexmenge

$$N(k) = \{i \in \{1, \dots, l\} \mid \exists r \in \{1, \dots, q_i\} \text{ mit } k = k(i, r)\}$$

für jedes $k \in \{1, \dots, p\}$. Sie gibt die Indizes i an, für die J_k im Intervall $(\alpha'_i, \beta'_i]$ liegt. Indem wir die Summen vertauschen, berechnen wir

$$\begin{aligned} S &:= \sum_{i=1}^l \lambda_{m+1}(I'_i) = \sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^{q_i} \lambda_{m+1}(\tilde{I}'_i \times J_{k(i,r)}) = \sum_{k=1}^p \sum_{i \in N(k)} \lambda_{m+1}(\tilde{I}'_i \times J_k) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{i \in N(k)} \lambda_m(\tilde{I}'_i) \lambda_1(J_k) = \sum_{k=1}^p \lambda_1(J_k) \sum_{i \in N(k)} \lambda_m(\tilde{I}'_i), \end{aligned}$$

wobei wir auch (1.3) verwendet haben. Die Intervalle I'_i sind disjunkt und es gilt $\tilde{I}'_i \times J_k \subseteq I'_i$ für alle $i \in N(k)$. Also sind auch die Mengen $\{\tilde{I}'_i \mid i \in N(k)\}$ für jedes feste $k \in \{1, \dots, p\}$ disjunkt. Sie liegen ferner in \tilde{I} . Seien umgekehrt $k \in \{1, \dots, p\}$ und $x \in \tilde{I} \times J_k$. Nach Voraussetzung gibt es genau ein $i \in \{1, \dots, l\}$ mit $x \in I'_i$. Damit ist $J_k \cap (\alpha'_i, \beta'_i]$ nicht leer, sodass i in $N(k)$ liegt. Insgesamt ist \tilde{I} für jedes $k \in \{1, \dots, p\}$ gleich der disjunkten Vereinigung der Intervalle \tilde{I}'_i mit $i \in N(k)$. Wir können hierauf die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten

$$S = \sum_{k=1}^p \lambda_1(J_k) \lambda_m(\tilde{I}) = (\beta - \alpha) \lambda_m(\tilde{I}) = \lambda_{m+1}(I).$$

Im Falle $n = 1$ gilt demnach die Behauptung für die Dimension $m + 1$ und damit per Induktion für alle $m \in \mathbb{N}$.

2) Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig und die Intervalle I_j und I'_i wie in der Behauptung gegeben. Wir erhalten dann die disjunkten Vereinigungen

$$I_j = \dot{\bigcup}_{i=1}^l (I_j \cap I'_i) \quad \text{und} \quad I'_i = \dot{\bigcup}_{j=1}^n (I'_i \cap I_j)$$

für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ bzw. jedes $i \in \{1, \dots, l\}$. Für beide Zerlegungen benutzen wir Schritt 1) und folgern die Behauptung

$$\sum_{j=1}^n \lambda_m(I_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^l \lambda_m(I_j \cap I'_i) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n \lambda_m(I'_i \cap I_j) = \sum_{i=1}^l \lambda_m(I'_i). \quad \square$$

Für eine Figur $A \in \mathcal{F}_m$ definieren wir nun

$$\lambda(A) = \lambda_m(A) := \sum_{j=1}^n \lambda_m(I_j), \quad (1.5)$$

wobei die Intervalle $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{J}_m$ disjunkt sind und $A = I_1 \cup \dots \cup I_n$ ist. Gemäß der Lemmata 1.16 und 1.17 definiert (1.5) eine Abbildung $\lambda_m : \mathcal{F}_m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Seien $A, B, A_j \in \mathcal{F}_m$. Es gelten die Aussagen

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus ((B \setminus A) \cup (A \setminus B)) \in \mathcal{F}_m, \quad (1.6)$$

$$\lambda_m(A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n) = \lambda_m(A_1) + \dots + \lambda_m(A_n) \quad \text{wenn } A_j \text{ disjunkt,} \quad (1.7)$$

$$\lambda_m(A) \leq \lambda_m(B) \quad \text{wenn } A \subseteq B, \quad (1.8)$$

$$\lambda_m(A \cup B) \leq \lambda_m(A) + \lambda_m(B). \quad (1.9)$$

Dabei folgt (1.6) aus Lemma 1.16, und (1.7) impliziert Behauptungen (1.8) und (1.9) genauso wie im Beweis von Satz 1.15 a) und b). Um (1.7) zu zeigen, seien $A \cap B = \emptyset$, $A = \bigcup_{i=1}^n I_j$ und $B = \bigcup_{i=1}^l I'_i$ für jeweils disjunkte $I_j \in \mathcal{J}_m$ und $I'_i \in \mathcal{J}_m$. Wir setzen

$$I''_k = \begin{cases} I_k, & k \in \{1, \dots, n\}, \\ I'_{k-n}, & k \in \{n+1, \dots, n+l\}. \end{cases}$$

Dann ist $A \cup B$ die disjunkte Vereinigung der Intervalle I''_1, \dots, I''_{n+l} und die Definition (1.5) impliziert die Gleichung

$$\lambda_m(A \cup B) = \sum_{k=1}^{n+l} \lambda_m(I''_k) = \sum_{j=1}^n \lambda_m(I_j) + \sum_{i=1}^l \lambda_m(I'_i) = \lambda_m(A) + \lambda_m(B).$$

Induktiv folgt dann Aussage (1.7). Genauso zeigt man (1.6) in jedem Ring, sowie (1.8) und (1.9) für jede endlich additive Funktion $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ auf einem Ring.

Als nächstes weisen wir nach, dass λ_m auf \mathcal{F}_m sogar σ -additiv ist (soweit die Vereinigung der A_n noch in \mathcal{F}_m liegt).

SATZ 1.18. *Die Abbildung $\lambda_m : \mathcal{F}_m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ aus (1.5) ist ein Prämaß auf dem Ring \mathcal{F}_m ; das heißt, sie besitzt die folgenden Eigenschaften.*

(M1) $\lambda_m(\emptyset) = 0$.

(M2') Sei $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}_m$ disjunkt und $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ liege in \mathcal{F}_m . Dann gilt $\lambda_m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m(A_n)$.

BEWEIS. Zunächst ergibt sich (M1) schon aus (1.3), da $\emptyset = (a, a]$ ein Element von \mathcal{J}_m ist. Seien A_n und A wie in der Behauptung. Wir führen in einem ersten Schritt die Behauptung (M2') auf eine Konvergenzaussage zurück, die dann aus einer gewissen Abschätzung folgen wird.

1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ liegt die Menge $B_n := A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ nach Lemma 1.16 e) in \mathcal{F}_m . Damit gelten $B_n \downarrow \emptyset$ und $A = A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n \dot{\cup} B_n$. Formel (1.7) liefert nun

$$\lambda_m(A) = \lambda_m(A_1) + \dots + \lambda_m(A_n) + \lambda_m(B_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit folgt die Aussage aus der nächsten Behauptung.

2) *Behauptung 1.* Seien $B_n \in \mathcal{F}_m$ mit $B_n \downarrow \emptyset$. Dann gilt $\lambda_m(B_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Beweis von Behauptung 1. a) Sei $\varepsilon > 0$. Wir konstruieren in diesem Schritt für jedes $n \in \mathbb{N}$ solche Figuren C_n , dass

$$\overline{C_n} \subseteq B_n \quad \text{und} \quad \lambda_m(B_n \setminus C_n) \leq 2^{-n} \varepsilon$$

gelten. Zunächst liefert Lemma 1.16 disjunkte nichtleere Intervalle $I_j = \prod_{k=1}^m (a_{kj}, b_{kj}]$ aus \mathcal{J}_m für $j \in \{1, \dots, l\}$ mit $B_n = I_1 \cup \dots \cup I_l$, wobei I_j , l , a_{kj} und b_{kj} von n abhängen können. Wir setzen $d_n := \max_{k,j} (b_{kj} - a_{kj})$ und wählen Zahlen

$$\delta_n \in \left(0, \min_{k \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, l\}} \{b_{kj} - a_{kj}, \varepsilon 2^{-n} (lm)^{-1} d_n^{1-m}\} \right).$$

Nun definieren wir die verkleinerten Intervalle $I'_j = \prod_{k=1}^m (a_{kj} + \delta_n, b_{kj}]$ in \mathcal{F}_m und die Figuren $C_n = I'_1 \cup \dots \cup I'_l$. Dann liegt $\overline{C_n} = \bigcup_j \overline{I'_j}$ in B_n und es gilt

$$\begin{aligned} B_n \setminus C_n &= \bigcup_{j=1}^l I_j \cap \bigcap_{i=1}^l (I'_i)^c = \bigcup_{j=1}^l \left(\bigcap_{i=1}^l I_j \cap (I'_i)^c \right) \subseteq \bigcup_{j=1}^l (I_j \setminus I'_j) \\ &= \bigcup_{j=1}^l \bigcup_{k=1}^m \{x \in I_j \mid x_k \in (a_{jk}, a_{jk} + \delta_n]\}. \end{aligned}$$

Mittels (1.9) und (1.3) folgt daraus die gewünschte Ungleichung durch $\lambda_m(B_n \setminus C_n) \leq l m d_n^{m-1} \delta_n \leq \varepsilon 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Da $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \emptyset$ und $\overline{C_n} \subseteq B_n$ ist, erhalten wir $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{C_n} = \emptyset$ und somit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{C_n}^c = \mathbb{R}^m \supseteq \overline{B_1}$. Also überdecken die offenen Mengen $\overline{C_n}^c$ das Kompaktum $\overline{B_1}$. Theorem 2.46 von Heine–Borel aus Analysis 2 liefert Indizes $n_1 < \dots < n_p$ mit $\overline{B_1} \subseteq \overline{C_{n_1}}^c \cup \dots \cup \overline{C_{n_p}}^c$. Per Komplement ergibt sich die Inklusion $D := \overline{C_{n_1}} \cap \dots \cap \overline{C_{n_p}} \subseteq \overline{B_1}^c$. Auf der anderen Seite liegen aber alle $\overline{C_{n_i}}$ in $B_{n_i} \subseteq B_1$, sodass auch $D \subseteq B_1$ gilt. Wir erhalten also die Identität

$$\overline{C_{n_1}} \cap \dots \cap \overline{C_{n_p}} = \emptyset.$$

Dies bedeutet, dass für alle $n \geq n_p =: N_\varepsilon$ der Durchschnitt $\bigcap_{j=1}^n \overline{C_j}$ leer ist. Wir setzen nun $D_n = \bigcap_{j=1}^n C_j$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach (1.6) und einer Induktion liegen alle D_n in \mathcal{F}_m . Wir haben eben gesehen, dass D_n für $n \geq N_\varepsilon$ leer ist.

Behauptung 2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lambda_m(B_n \setminus D_n) \leq (1 - 2^{-n})\varepsilon \leq \varepsilon$.

Wir werden diese Behauptung gleich zeigen. Aus ihr folgt dann Behauptung 1 mittels der Abschätzung

$$\lambda(B_n) = \lambda_m(B_n \setminus D_n) \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N_\varepsilon$, und damit wird der Satz bewiesen sein.

3) *Beweis von Behauptung 2.* Wir zeigen diese Aussage mit Induktion über n . Der Fall $n = 1$ wurde in Schritt 2a) etabliert. Behauptung 2 gelte nun für ein $n \in \mathbb{N}$. Die Eigenschaften (1.9) und (1.8) sowie die Inklusion $B_{n+1} \subseteq B_n$ implizieren

$$\begin{aligned} \lambda_m(B_{n+1} \setminus D_{n+1}) &= \lambda_m(B_{n+1} \setminus (D_n \cap C_{n+1})) = \lambda_m((B_{n+1} \setminus D_n) \cup (B_{n+1} \setminus C_{n+1})) \\ &\leq \lambda_m(B_{n+1} \setminus D_n) + \lambda_m(B_{n+1} \setminus C_{n+1}) \\ &\leq \lambda_m(B_n \setminus D_n) + \lambda_m(B_{n+1} \setminus C_{n+1}) \\ &\leq (1 - 2^{-n})\varepsilon + 2^{-n-1}\varepsilon = (1 - 2^{-n-1})\varepsilon, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Induktionsvoraussetzung und nochmals Schritt 2a) verwendet haben. Per Induktion folgt Behauptung 2 und damit der Satz. \square

3. Schritt: Das Lebesguemaß auf \mathcal{B}_m .

Im letzten Schritt setzen wir λ_m von \mathcal{F}_m zu einem Maß auf \mathcal{B}_m fort. Die ist ein Spezialfall des folgenden *Maßfortsetzungssatzes* von Carathéodory (1914).

THEOREM 1.19. *Seien $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß. Dann existiert so eine σ -Algebra $\mathcal{A}(\mu)$ und ein Maß $\bar{\mu}$ auf $\mathcal{A}(\mu)$, dass $\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}(\mu)$ und $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$ für jedes $A \in \mathcal{R}$ gelten. Insbesondere ist die Einschränkung $\bar{\mu}|_{\sigma(\mathcal{R})}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$.*

Wir gehen unten auf den Beweis ein. Die hier auftretende σ -Algebra $\mathcal{A}(\mu)$ wird in (1.11) definiert. Im Falle des Lebesguemaßes läßt sie sich näher bestimmen, siehe Satz II.6.4 in [3] und auch unsere Bemerkung 3.3. Im Folgenden benötigen wir außerdem den nachstehenden *Maßeindeutigkeitssatz*, vergleiche etwa Satz 3.24.

THEOREM 1.20. *Seien $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ der Erzeuger einer σ -Algebra $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$, sowie μ und ν Maße auf \mathcal{A} , für die $\mu(E) = \nu(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$ und die folgenden Eigenschaften gelten.*

- A) Für alle $E, F \in \mathcal{E}$ liegt auch der Durchschnitt $E \cap F$ in \mathcal{E} . (\cap -Stabilität)
- B) Es gibt Mengen $E_n \in \mathcal{E}$ mit $\mu(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$. (σ -Endlichkeit)

Daraus folgt $\mu = \nu$.

Der Beweis ist nicht Teil der Vorlesung, siehe aber Abschnitt 1.3. Das Theorem besagt, dass Maße schon durch ihr Verhalten auf einem (genügend großen) Erzeuger festgelegt sind, was jedoch erstaunlich schwierig zu zeigen ist. Die folgenden Beispiele zeigen, dass man hier weder auf Annahme A) noch auf B) verzichten kann.

Man betrachte zuerst die Menge $X = \{a, b, c\}$ mit der σ -Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, die vom nicht \cap -stabilen System $\mathcal{E} = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$ erzeugt wird. Wir setzen $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \mu(\{c\}) = 1$, sowie $\nu(\{a\}) = 2$ und $\nu(\{b\}) = \nu(\{c\}) = 0$. Wie in Beispiel 1.13 liefert dies Maße μ und ν auf $\mathcal{P}(X)$, die offenbar verschieden sind, aber auf \mathcal{E} übereinstimmen.

Ferner erzeugt $\mathcal{E} = \{\emptyset\}$ die triviale σ -Algebra $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ auf X . Hier definieren wir Maße durch $\mu(X) = 1$ und $\mu(\emptyset) = 0$, sowie $\nu(X) = \nu(\emptyset) = 0$. Wieder erhalten wir zwei unterschiedliche Maße, die auf \mathcal{E} gleich sind.

Aus den obigen Resultaten folgt nun leicht die Existenz und Eindeutigkeit des Lebesguemaßes auf \mathcal{B}_m .

THEOREM 1.21. *Es gibt genau ein Maß auf \mathcal{B}_m , das das Elementarvolumen $\lambda_m : \mathcal{J}_m \rightarrow [0, \infty)$ aus (1.3) fortsetzt. Dieses Maß ist auch eine Fortsetzung des Prämaßes $\lambda_m : \mathcal{F}_m \rightarrow [0, \infty)$ aus (1.5). Es heißt Lebesguemaß und wird ebenfalls mit $\lambda = \lambda_m$ bezeichnet.*

BEWEIS. Nach Satz 1.18 und Lemma 1.16 e) läßt sich λ_m von \mathcal{J}_m zu einem Prämaß auf dem Ring \mathcal{F}_m fortsetzen. Theorem 1.19 und Lemma 1.16 a) liefern nun eine Fortsetzung von λ_m auf $\mathcal{B}_m = \sigma(\mathcal{F}_m)$. Gemäß (1.6) besitzt $\mathcal{E} = \mathcal{J}_m$ die Eigenschaft A). Weiter wird B) durch die Mengen $E_n = (-n, n]^m \in \mathcal{J}_m$ erfüllt. Laut Theorem 1.20 kann λ_m also nur auf eine Weise nach \mathcal{B}_m fortgesetzt werden. \square

Auf ähnliche Weise erhält man auch die *Hausdorff-* und *Lebesgue-Stieltjes-Maße* auf \mathbb{R}^m , siehe etwa Abschnitt IX.3 und S. 36 in [2]. Wir diskutieren zunächst

Varianten des Lebesguemaßes und berechnen $\lambda_m(A)$ in einigen einfachen Fällen. Substantielle Rechenbeispiele können erst ab Abschnitt 3.3 behandelt werden.

BEISPIEL 1.22. a) Sei $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_m$. Gemäß Beispiel 1.13 und Korollar 1.11 definiert die Einschränkung von λ_m auf $\mathcal{B}(X) = \{A \in \mathcal{B}_m \mid A \subseteq X\}$ ein Maß auf $\mathcal{B}(X)$. Es wird auch mit $\lambda_m = \lambda$ bezeichnet und heißt ebenfalls *Lebesguemaß*.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}^m$ mit $a \leq b$. Dann erhalten wir $(a - (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}), b) \downarrow [a, b]$ und somit wegen Satz 1.15 d) und Definition (1.3) die Gleichung

$$\lambda_m([a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_m((a - (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}), b)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m (b_k - a_k + \frac{1}{n}) = \prod_{k=1}^m (b_k - a_k).$$

Entsprechendes gilt für andere beschränkte Intervalle. Satz 1.15 a) liefert dann auch die Gleichung $\lambda_m(\partial I) = 0$ für den Rand $\partial I = \bar{I} \setminus I^\circ$ jedes beschränkten Intervalls im \mathbb{R}^m . Ferner hat jede einpunktige Menge $\{a\} = [a, a]$ das Lebesguemaß 0 und somit auch \mathbb{Q}^m als abzählbare Vereinigung solcher Mengen.

c) Unbeschränkte Intervalle I im \mathbb{R}^m mit positiven Kantenlängen haben das Volumen $\lambda_m(I) = \infty$. Sei etwa $I = (a, b)$ mit $b_k > a_k + \delta > 0$ für $k \in \{1, \dots, m\}$ und ein $\delta \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, sowie $b_1 = \infty$. Für $n \geq a_1$ erhalten wir dann

$$\lambda_m(I) \geq \lambda_m\left((a_1, n) \times \prod_{k=2}^m (a_k, a_k + \delta)\right) \geq (n - a_1)\delta^{m-1} \longrightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

d) Es gilt $\lambda_m(H) = 0$ für $H = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_m = 0\}$, da H die Vereinigung der Intervalle $[-n, n]^{m-1} \times \{0\}$ mit Lebesguemaß 0 ist. (Verwende etwa Satz 1.15 b).) Diese Aussage zeigt man analog für jede achsenparallele affine Hyperebene im \mathbb{R}^m . Nach Satz 1.15 a) und b) haben somit alle abzählbaren Vereinigungen von Teilmengen solcher Hyperebenen das Lebesguemaß 0.

e) Eine beschränkte Borelmenge A hat endliches Lebesguemaß, da sie in einem Würfel $[-n, n]^m$ mit Maß $(2n)^m$ liegt. \diamond

Um den Maßfortsetzungssatz zu beweisen, setzt man das Prämaß zunächst zu einem sogenannten äußerem Maß auf $\mathcal{P}(X)$ fort. Dazu sei $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß auf einem Ring \mathcal{R} . Für $M \subseteq X$ definieren wir

$$\mu^*(M) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n) \mid R_n \in \mathcal{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \right\}. \quad (1.10)$$

Dabei sei $\inf \emptyset := \infty$. Dann wird μ^* auf das System der μ -messbaren Mengen

$$\mathcal{A}(\mu) := \{A \subseteq X \mid \forall M \subseteq X \text{ gilt } \mu^*(M) \geq \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A^c \cap M)\}. \quad (1.11)$$

eingeschränkt, um dort ein Maß zu erhalten. Wir sehen im nächsten Hilfssatz, dass μ^* monoton und σ -subadditiv ist. Also gilt die umgekehrte Ungleichung in (1.11) auf $\mathcal{P}(X)$. Maße auf σ -Algebren erfüllen (1.11) hingegen mit Gleichheit, da $M = (M \cap A) \dot{\cup} (M \cap A^c)$ ist. Für A aus der Familie $\mathcal{A}(\mu)$ erhält man diese Gleichheit sogar für alle Teilmengen M von X .

LEMMA 1.23. Die in (1.10) definierte Abbildung μ^* ist ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$; das heißt, es gelten

- a) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- b) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ für alle $A, B \subseteq X$ mit $A \subseteq B$,
- c) $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ für alle $A_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$.

BEWEIS. Die ersten beiden Behauptungen folgen aus (1.10), da man \emptyset mit $\emptyset \cup \emptyset \cup \dots$ überdecken bzw. die Mengen R_j für B auch für A verwenden kann.

Um c) zu zeigen, seien $A_n \subseteq X$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung gilt, wenn $\mu^*(A_k) = \infty$ für ein k erfüllt ist. Sei also $\mu^*(A_n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Gemäß (1.10) gibt es dann Mengen R_{jn} aus \mathcal{R} mit $A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_{jn}$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(R_{jn}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also wird die Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ durch die Familie $\{R_{jn} \mid j, n \in \mathbb{N}\}$ überdeckt. Mit (1.10) erhalten wir nun die Abschätzung

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{j,n=1}^{\infty} \mu(R_{jn}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(A_n) + \varepsilon 2^{-n}) = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt Aussage c). \square

Im nächsten Hilfssatz¹ zeigen wir die entscheidenden Eigenschaften der Objekte aus (1.10) und (1.11).

LEMMA 1.24. Das System $\mathcal{A}(\mu)$ aus (1.11) ist eine σ -Algebra auf X und die Einschränkung $\bar{\mu} : \mathcal{A}(\mu) \rightarrow [0, \infty]$ von μ^* ist ein Maß.

BEWEIS. 1) Aus der Definition (1.11) folgt sofort, dass $\mathcal{A}(\mu)$ den Eigenschaften (A1) und (A2) genügt. Außerdem erfüllt $\bar{\mu}$ das Axiom (M1) nach Lemma 1.23 a), wobei $\emptyset = X^c$ gemäß (A1) und (A2) in $\mathcal{A}(\mu)$ liegt.

Mittels verschiedener Abschätzungen leiten wir in den nächsten beiden Schritten aus (1.11) und (1.10) ab, dass $\mathcal{A}(\mu)$ invariant unter endlichen Vereinigungen und Durchschnitten ist und dass μ^* auf $\mathcal{A}(\mu)$ einer verschärften endlichen Additivität genügt. Im letzten Teil vollziehen wir dann den Grenzübergang zur Eigenschaft (A3) und der σ -Additivität. Sei dazu $M \subseteq X$.

2) Seien $A, B \in \mathcal{A}(\mu)$. Wir wollen die Ungleichung in (1.11) für $A \cup B$ und M nachweisen. Um hier $(A \cup B)^c \cap M = A^c \cap B^c \cap M$ zu kontrollieren, verwenden wir diese Ungleichung für $B \in \mathcal{A}(\mu)$ und $A^c \cap M$ anstelle von M und erhalten

$$\mu^*(A^c \cap M) \geq \mu^*(B \cap A^c \cap M) + \mu^*(B^c \cap A^c \cap M).$$

Weiter gilt die Identität

$$M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap A^c \cap B).$$

Die Subadditivität von μ^* aus Lemma 1.23 liefert damit

$$\mu^*(M \cap (A \cup B)) \leq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c \cap B).$$

¹Das folgende Lemma wurde in einer zusätzlichen Vorlesung bewiesen.

Da A ein Element von $\mathcal{A}(\mu)$ ist, führen die obigen Ungleichungen auf

$$\begin{aligned}\mu^*(M) &\geq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c \cap B) + \mu^*(M \cap A^c \cap B^c) \\ &\geq \mu^*(M \cap (A \cup B)) + \mu^*(M \cap (A \cup B)^c).\end{aligned}$$

Also ist $A \cup B$ in $\mathcal{A}(\mu)$ enthalten. Per Induktion erhält man, dass die Vereinigung von endlich vielen Mengen A_1, \dots, A_n aus $\mathcal{A}(\mu)$ auch in $\mathcal{A}(\mu)$ liegt.

Zusammen mit Schritt 1) sehen wir weiter, dass auch $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ ein Element von $\mathcal{A}(\mu)$ ist.

3) Seien nun $A, B \in \mathcal{A}(\mu)$ mit $A \cap B = \emptyset$. Aus der Disjunktheit, (1.11) für A und Lemma 1.23 erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap B) &= \mu^*(M \cap (A \dot{\cup} B) \cap A) + \mu^*(M \cap (A \dot{\cup} B) \cap A^c) \\ &\leq \mu^*(M \cap (A \dot{\cup} B)) = \mu^*((M \cap A) \cup (M \cap B)) \\ &\leq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap B).\end{aligned}$$

Also folgt die Gleichung

$$\mu^*(M \cap (A \dot{\cup} B)) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap B).$$

Induktiv ergibt sich daraus

$$\mu^*((A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n) \cap M) = \mu^*(A_1 \cap M) + \dots + \mu^*(A_n \cap M)$$

für alle disjunkten $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}(\mu)$.

4) Gegeben sei schließlich eine disjunkte Familie $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{A}(\mu)$. Wir wollen zeigen, dass auch $A := \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n$ in $\mathcal{A}(\mu)$ liegt und $\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ ist. Nach einer Übung und den Schritten 1) und 2) ist dann $\mathcal{A}(\mu)$ eine σ -Algebra und somit μ^* ein Maß auf $\mathcal{A}(\mu)$.

Dazu setzen wir $B_n := \dot{\bigcup}_{j=1}^n A_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn wir zweimal Schritt 3) und außerdem Lemma 1.23 b) für $(A^c \cap M) \subseteq (B_n^c \cap M)$ anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu^*(M) &= \mu^*((B_n \dot{\cup} B_n^c) \cap M) = \mu^*(B_n \cap M) + \mu^*(B_n^c \cap M) \\ &= \sum_{j=1}^n \mu^*(A_j \cap M) + \mu^*(B_n^c \cap M) \geq \sum_{j=1}^n \mu^*(A_j \cap M) + \mu^*(A^c \cap M).\end{aligned}$$

Zunächst kann man hier den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ durchführen. Lemma 1.23 c) liefert dann die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\mu^*(M) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j \cap M) + \mu^*(A^c \cap M) \geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap M)\right) + \mu^*(A^c \cap M) \\ &= \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A^c \cap M) \geq \mu^*((A \cap M) \cup (A^c \cap M)) = \mu^*(M).\end{aligned}$$

Also gilt hier Gleichheit und A gehört zu $\mathcal{A}(\mu)$. Wenn wir speziell $M = A$ wählen und $\mu^*(\emptyset) = 0$ beachten, erhalten wir

$$\mu^*(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j \cap A) + \mu^*(A^c \cap A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j). \quad \square$$

Wir beweisen nun den Maßfortsetzungssatz.

BEWEIS VON THEOREM 1.19. Laut Lemma 1.24 ist $\mathcal{A}(\mu)$ aus (1.11) eine σ -Algebra und die Einschränkung $\bar{\mu}$ des äußeren Maßes μ^* aus (1.10) auf $\mathcal{A}(\mu)$ ein Maß. Wir zeigen nun, dass μ^* auf \mathcal{R} mit μ übereinstimmt und dass \mathcal{R} in $\mathcal{A}(\mu)$ enthalten ist. Lemma 1.6 und Beispiel 1.13 c) implizieren dann die verbleibenden Behauptungen. Sei nun $A \in \mathcal{R}$.

1) Wegen $A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$, gilt gemäß (1.10) die Ungleichung $\mu^*(A) \leq \mu(A)$. Im Falle $\mu^*(A) = \infty$ folgt dann die Gleichheit $\mu^*(A) = \mu(A)$. Sei also $\mu^*(A) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Mengen R_n aus \mathcal{R} für $n \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$. Man sieht nun wie in (1.6) bzw. (1.8), dass auch $A \cap R_n$ im Ring \mathcal{R} liegt und dass das Prämaß μ auf \mathcal{R} monoton ist. Die σ -Subadditivität von μ auf \mathcal{R} ergibt sich aus (M2') wie in Satz 1.15 b). Da $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap R_n) =: V$ ist, schließen wir mit diesen Beobachtungen auf die Abschätzungen

$$\mu(A) = \mu(V) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap R_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig ist, erhalten wir insgesamt $\mu^*(A) = \mu(A)$.

2) Sei $M \subseteq X$. Wenn $\mu^*(M) = \infty$ ist, dann gilt die Ungleichung in (1.11) für A . Im Falle $\mu^*(M) < \infty$, sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nun finden wir Mengen $R_n \in \mathcal{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n) \leq \mu^*(M) + \varepsilon$. Ferner sind $M \cap A$ und $M \cap A^c$ in der Vereinigung aller $R_n \cap A$ bzw. $R_n \cap A^c$ für $n \in \mathbb{N}$ enthalten. Da auch A^c in \mathcal{R} liegt, sind wie in Schritt 1) alle Durchschnitte $R_n \cap A$ bzw. $R_n \cap A^c$ Elemente von \mathcal{R} . Wir verwenden nun die Definition (1.10) und die Eigenschaft (M2') von μ , um

$$\mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(R_n \cap A) + \mu(R_n \cap A^c)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n) \leq \mu^*(M) + \varepsilon$$

zu berechnen. Daraus folgt die Ungleichung in (1.11) für A , sodass $\mathcal{A}(\mu)$ die Menge A und somit den Ring \mathcal{R} beinhaltet. \square

Wir zeigen noch einige wichtige Eigenschaften des Lebesguemaßes. Zunächst charakterisieren wir es als einziges translationsinvariantes Maß μ auf \mathcal{B}_m mit $\mu((0, 1]^m) = 1$. (Siehe Lemma 3.33 für seine Bewegungsinvarianz.)

SATZ 1.25. *Seien $A \in \mathcal{B}_m$ und $x \in \mathbb{R}^m$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- a) *Die Menge $x + A = \{x + y \mid y \in A\}$ liegt in \mathcal{B}_m .*
- b) *Es gilt $\lambda_m(A) = \lambda_m(x + A)$.*
- c) *Sei μ ein Maß auf \mathcal{B}_m , das b) für alle $x \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathcal{B}_m$ sowie $\mu((0, 1]^m) < \infty$ erfüllt. Dann folgt $\mu(B) = \mu((0, 1]^m) \lambda_m(B)$ für jedes $B \in \mathcal{B}_m$.*

BEWEIS. Sei $x \in \mathbb{R}^m$ fest. Es gilt $x + A = \{z \in \mathbb{R}^m \mid z - x \in A\}$.

a) Wir verwenden wieder das Prinzip der guten Mengen. Setze $\mathcal{A}_x = \{B \in \mathcal{B}_m \mid x + B \in \mathcal{B}_m\}$. Wir benötigen die Gleichung $\mathcal{A}_x = \mathcal{B}_m$. Da

$$x + (a, b] = (a_1 + x_1, b_1 + x_1] \times \cdots \times (a_m + x_m, b_m + x_m]$$

gilt, umfasst \mathcal{A}_x das System \mathcal{J}_m gemäß (1.3). Offenbar ist \mathbb{R}^m ein Element von \mathcal{A}_x . Seien weiter $B_n \in \mathcal{A}_x$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann enthält \mathcal{B}_m alle $x + B_n$. Somit liegt

$$x + B_1^c = \{z \in \mathbb{R}^m \mid z - x \notin B_1\} = (x + B_1)^c$$

in \mathcal{B}_m und folglich auch B_1^c in \mathcal{A}_x . Ähnlich sehen wir, dass die Menge

$$x + \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x + B_n)$$

in \mathcal{B}_m und damit die Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ in \mathcal{A}_x liegen. Also ist \mathcal{A}_x eine σ -Algebra. Satz 1.9 und Lemma 1.6 liefern dann $\mathcal{B}_m = \sigma(\mathcal{J}_m) \subseteq \mathcal{A}_x \subseteq \mathcal{B}_m$ und damit a).

b) Wir führen die zweite und dritte Aussage auf den Maßeindeutigkeitssatz zurück. Dazu definieren wir $\mu_x(A) = \lambda_m(x + A)$ für $A \in \mathcal{B}_m$. Zunächst ist $\mu_x(\emptyset) = \lambda_m(\emptyset) = 0$. Die Familie $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ liege in \mathcal{B}_m und sei disjunkt. Dann sind auch die Mengen $x + A_n$ disjunkt, und wir berechnen

$$\mu_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lambda_m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (x + A_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m(x + A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_x(A_n).$$

Also ist μ_x ein Maß auf \mathcal{B}_m . Sei I aus \mathcal{J}_m . Wegen der ersten abgesetzten Formel in Schritt a) liefert (1.3) die Gleichung $\lambda_m(x + I) = \lambda_m(I)$, sodass μ_x und λ_m auf \mathcal{J}_m übereinstimmen. Behauptung b) folgt nun aus Theorem 1.21.

c) Sei μ wie in Teil c) und $c := \mu((0, 1]^m) < \infty$. Wir zerlegen $(0, 1]^m$ in 2^m disjunkte achsenparallele Würfel J_k in \mathcal{J}_m mit Kantenlänge $1/2$. Da μ ein translationsinvariantes Maß ist, erhalten wir die Identität

$$c = \sum_{k=1}^{2^m} \mu(J_k) = 2^m \mu((0, 1/2]^m) = \lambda_m((0, 1/2]^m)^{-1} \mu((0, 1/2]^m)$$

und somit $\mu((0, 1/2]^m) = c \lambda_m((0, 1/2]^m)$. Iterativ folgt

$$\mu((0, 2^{-n}]^m) = c \lambda_m((0, 2^{-n}]^m)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Indem wir die Würfel $(0, 2^{-n}]^m$ geeignet verschieben und vereinigen, zeigen wir dann die Gleichung $\mu(I) = c \lambda_m(I)$ für alle *dyadischen* Intervalle

$$I \in \mathcal{D} := \{(a, b] \mid \forall k \in \{1, \dots, m\} \exists i, j, p, q \in \mathbb{Z} : a_k = i2^p, b_k = j2^q\}.$$

Wie in Satz 1.9 sieht man, dass \mathcal{B}_m auch von \mathcal{D} erzeugt wird. Weiter besitzt \mathcal{D} die Eigenschaften A) und B). Theorem 1.20 impliziert also $\mu = c \lambda_m$. \square

Die Bedingung $\mu((0, 1]^m) < \infty$ wird in c) benötigt, da z.B. das Maß μ mit $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(B) = \infty$ für $B \in \mathcal{B}_m$ translationsinvariant ist.

Wir zeigen nun eine wesentliche Verbindung zwischen dem Maßraum $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m, \lambda_m)$ und der metrischen Struktur des \mathbb{R}^m . Maße auf einer Borelschen σ -Algebra, die b) und der ersten Gleichung in a) genügen, heißen *regulär*.

THEOREM 1.26. *Das Lebesguemaß λ_m erfüllt für alle $A \in \mathcal{B}_m$ die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \text{a) } \lambda_m(A) &= \inf \{ \lambda_m(O) \mid O \subseteq \mathbb{R}^m \text{ offen mit } A \subseteq O \} \\ &= \inf \{ \lambda_m(V) \mid V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \subseteq \mathbb{R}^m, I_n \text{ offenes Intervall, } A \subseteq V \}, \\ \text{b) } \lambda_m(A) &= \sup \{ \lambda_m(K) \mid K \subseteq \mathbb{R}^m \text{ kompakt mit } K \subseteq A \}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Sei $A \in \mathcal{B}_m$.

a) Wir bezeichnen die Terme auf der rechten Seite der j -ten Zeile in Behauptung a) mit i_j . Die Ungleichung $\lambda_m(A) \leq i_1$ folgt aus der Monotonie des Lebesguemaßes, und $i_1 \leq i_2$ aus der Offenheit von V gemäß Satz 2.20 aus Analysis 2. Falls $\lambda_m(A) = \infty$ ist, folgt sofort $\lambda_m(A) = i_1 = i_2$.

Sei also $\lambda_m(A) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\mathcal{R} = \mathcal{F}_m$ in (1.11) und verwenden Lemma 1.16 d). So erhalten wir Intervalle $I'_n \in \mathcal{F}_m$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I'_n$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m(I'_n) \leq \lambda_m^*(A) + \varepsilon = \lambda_m(A) + \varepsilon,$$

wobei am Ende Theorem 1.19 einging. Wie in Schritt 2a) des Beweises von Satz 1.18 verschafft man sich offene Intervalle $I_n \supseteq I'_n$ mit $\lambda_m(I_n) \leq \lambda_m(I'_n) + \varepsilon 2^{-n}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Somit liegt A in der Vereinigung V aller dieser I_n und Satz 1.15 liefert

$$\lambda_m(A) \leq \lambda_m(V) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m(I_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m(I'_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n} \leq \lambda_m(A) + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, haben wir Behauptung a) gezeigt.

b) Die Ungleichung ‘ \geq ’ in Aussage b) gilt wegen der Monotonie von λ_m . Mittels Differenzmengen führen wir nun b) auf Teil a) zurück, wobei wir zunächst nur beschränkte A betrachten.

1) Sei speziell $A \subseteq B := \overline{B}(0, n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Schritt a) gibt es eine offene Menge O in \mathbb{R}^m mit $B \setminus A \subseteq O$ und

$$\lambda_m(O) \leq \lambda_m(B \setminus A) + \varepsilon = \lambda_m(B) - \lambda_m(A) + \varepsilon,$$

wobei wir Satz 1.15 a) und $\lambda_m(B) < \infty$ verwenden. Wir setzen $K := B \setminus O = B \cap O^c$. Diese Menge ist abgeschlossen und beschränkt und deswegen kompakt nach Bolzano–Weierstraß’ Theorem 2.44 in Analysis 2. Zunächst liegt K wie gewünscht in

$$B \cap (B \setminus A)^c = B \cap (B^c \cup A) = B \cap A = A.$$

Weiter ist B in $K \cup O$ enthalten. Daraus folgern wir mittels Satz 1.15 und der obigen abgesetzten Ungleichung die Abschätzungen

$$\lambda_m(B) \leq \lambda_m(K \cup O) \leq \lambda_m(K) + \lambda_m(O) \leq \lambda_m(K) + \lambda_m(B) - \lambda_m(A) + \varepsilon.$$

Wir können nun $\lambda_m(B) < \infty$ abziehen und erhalten $\lambda_m(A) - \varepsilon \leq \lambda_m(K)$.

2) Wir betrachten nun ein beliebiges $A \in \mathcal{B}_m$ und setzen $A_n = A \cap \overline{B}(0, n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $A_n \uparrow A$. Nach Schritt 1) gibt es Kompakta $K_n \subseteq A_n \subseteq A$ mit

$$\lambda_m(A_n) - \frac{1}{n} \leq \lambda_m(K_n) \leq \lambda_m(A),$$

wobei auch die Monotonie von λ_m einging. Nach Satz 1.15 c) konvergiert die linke Seite, und damit auch $\lambda_m(K_n)$, gegen $\lambda_m(A)$. Also gilt Aussage b). \square

Mittels eines Beispiels von *Vitali* (1905) zeigen wir nun, dass es nichtborelsche Teilmengen des \mathbb{R}^m gibt. Dieses beruht auf dem *Auswahlaxiom* der Mengenlehre: Für jedes nichtleere Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gibt es eine Abbildung

$$\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{M}\} \quad \text{mit} \quad \varphi(A) \in A \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{M}.$$

Man kann $\varphi(A)$ als Index oder Repräsentanten der Menge A auffassen.

SATZ 1.27. *Es gibt eine Menge Ω in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \setminus \mathcal{B}_m$.*

BEWEIS. Auf $W := [0, 1]^m$ schreiben wir $x \sim y$, wenn $x - y \in [-1, 1]^m =: W'$ rational ist. Man sieht leicht, dass dies eine Äquivalenzrelation auf W erklärt. Wir setzen $[x] = \{y \in W \mid x \sim y\}$ für $x \in W$ und $\mathcal{M} = \{[x] \mid x \in W\}$. Sei die Abbildung $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow W$ durch das Auswahlaxiom gegeben. Wir definieren $\Omega = \{\varphi(A) \mid A \in \mathcal{M}\} \subseteq W$. Da \sim eine Äquivalenzrelation ist, liegt jeder Punkt $x \in W$ in genau einer Menge $A \in \mathcal{M}$. (Siehe Satz I.4.1 in [1].) Speziell sind Elemente ω und ω' aus Ω entweder gleich oder nicht äquivalent.

Weiter schreiben wir $\mathbb{Q}^m \cap W' = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sei x in W . Also gibt es eine Menge A aus \mathcal{M} , die x und auch $\varphi(A)$ umfasst. Demnach ist die Differenz $x - \varphi(A) \in W'$ rational, sodass x in einer der Mengen $q_n + \Omega$ enthalten ist. Es gelte weiter $q_j + \omega = q_k + \omega'$ für $\omega, \omega' \in \Omega$. Dann folgt $\omega - \omega' = q_k - q_j \in \mathbb{Q}^m$ und damit $\omega = \omega'$. Also sind die Mengen $q_n + \Omega$ für $n \in \mathbb{N}$ disjunkt. Es gilt also

$$W \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + \Omega) =: \Theta \subseteq [-1, 2]^m.$$

Wir nehmen an, Ω läge in \mathcal{B}_m . Da λ_m ein translationsinvariantes Maß auf \mathcal{B}_m ist, erhalten wir die Relationen

$$3^m = \lambda_m([-1, 2]^m) \geq \lambda_m(\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m(q_n + \Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m(\Omega).$$

Diese Ungleichung impliziert $\lambda_m(\Omega) = 0$ und damit auch $\lambda_m(\Theta) = 0$. Andererseits liefern die oben abgesetzten Inklusionen den Widerspruch $\lambda_m(\Theta) \geq \lambda_m(W) = 1$. \square

Nach dem obigen Beweis liegt Ω in keiner σ -Algebra, die die Intervalle enthält und auf der λ_m ein translationsinvariantes Maß ist.

1.3. Anhang: Der Beweis des Maßeindeutigkeitssatzes

Wir benötigen die folgende Eigenschaft eines nichtleeren Systems $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$.²

(A3') Für alle disjunkten Familien $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in \mathcal{D} liegt auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ in \mathcal{D} .

Diese Bedingung passt offenbar besser zu (M2) als die stärkere Annahme (A3). Ein Mengensystem, das (A1), (A2) und (A3') erfüllt, heißt *Dynkin-System*. Gemäß einer Übung ist es (genau dann) eine σ -Algebra, wenn es durchschnittsstabil ist. Man beachte, dass $\mathcal{D} = \{A \subseteq X \mid \#A \text{ gerade}\}$ ein Dynkin-System auf $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ist, aber keine σ -Algebra. Zum Beispiel liegen $\{1, 2\}$ und $\{1, 3\}$ in \mathcal{D} , aber ihre Vereinigung $\{1, 2, 3\}$ nicht.

Das folgende wichtige Hilfsmittel der Maßtheorie verfeinert die Minimalitätsaussage in Lemma 1.6. Im Beweis überträgt man die Durchschnittsstabilität des Erzeugers \mathcal{E} auf das Dynkin-System \mathcal{D} zwischen \mathcal{E} und $\sigma(\mathcal{E})$.

LEMMA 1.28. *Seien $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein nichtleeres durchschnittsstabiles Mengensystem. Weiter erfülle \mathcal{D} die Bedingungen (A1), (A2), (A3') und es gelte $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Dann erhalten wir $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{E})$.*

Im Beweis des Lemmas verwenden wir einen weiteren Begriff. Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nichtleer. Wie in Definition 1.5 führt man das *von \mathcal{F} erzeugte Dynkin-System*

$$\delta(\mathcal{F}) = \bigcap \{ \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}, \mathcal{D} \text{ ist Dynkin-System} \}$$

ein. Offenbar liegt \mathcal{F} in $\delta(\mathcal{F})$. Man zeigt wie in Lemma 1.4, dass $\delta(\mathcal{F})$ ein Dynkin-System ist. Weiter folgt wie in Lemma 1.6 aus $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ die Inklusion $\delta(\mathcal{F}) \subseteq \delta(\mathcal{F}')$, und es gilt die Gleichung $\mathcal{F} = \delta(\mathcal{F})$ für Dynkin-Systeme \mathcal{F} .

Es sollen die Voraussetzungen von Lemma 1.28 gelten. Ausgehend von den Inklusionen $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ implizieren die eben aufgeführten Resultate die Relationen

$$\mathcal{E} \subseteq \delta(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \subseteq \delta(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(\mathcal{E}).$$

Somit folgt Lemma 1.28 aus der Gleichung $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$. Diese wiederum ist ein Konsequenz der abgesetzten Formeln, von Lemma 1.6 und dem folgenden Resultat.

LEMMA 1.29. *Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nichtleer und durchschnittsstabil. Dann ist $\delta(\mathcal{E})$ eine σ -Algebra.*

BEWEIS. Da $\delta(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System ist, verbleibt nach einer Übung die Durchschnittsstabilität von $\delta(\mathcal{E})$ zu beweisen. Sei dazu $A \in \delta(\mathcal{E})$ beliebig gewählt. Wir definieren wieder ein System guter Mengen durch

$$\mathcal{D}_A = \{B \subseteq X \mid A \cap B \in \delta(\mathcal{E})\}.$$

Also müssen wir nachweisen, dass $\delta(\mathcal{E})$ in \mathcal{D}_A liegt.

²Die Inhalte dieses Abschnitt wurden in einer zusätzlichen Vorlesung behandelt.

Zunächst zeigen wir, dass \mathcal{D}_A ein Dynkin-System ist. Die Grundmenge X liegt in \mathcal{D}_A , da $A \cap X = A$ in $\delta(\mathcal{E})$ enthalten ist. Sei weiter B aus \mathcal{D}_A . Dann sind $A \cap B$ und A Elemente von $\delta(\mathcal{E})$. Da $\delta(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System ist, liegt somit

$$A \cap B^c = A \cap (A^c \cup B^c) = (A^c \dot{\cup} (A \cap B))^c$$

in $\delta(\mathcal{E})$; d.h., das Komplement B^c ist in \mathcal{D}_A enthalten. Schließlich sei die Familie $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in \mathcal{D}_A disjunkt. Dann sind alle Mengen $B_n \cap A$ Elemente von $\delta(\mathcal{E})$ und ebenfalls disjunkt. Wie oben erhalten wir dann

$$A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n) \in \delta(\mathcal{E}).$$

Insgesamt haben wir nachgewiesen, dass \mathcal{D}_A ein Dynkin-System ist.

Als nächstes beweisen wir die Inklusion $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_A$. Sei dazu E aus \mathcal{E} . Wegen der vorausgesetzten Durchschnittsstabilität liegt für jedes $B \in \mathcal{E}$ die Menge $E \cap B$ in $\mathcal{E} \subseteq \delta(\mathcal{E})$, sodass B in \mathcal{D}_E enthalten ist. Also gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E$ für jedes $E \in \mathcal{E}$. Da \mathcal{D}_E ein Dynkin-System ist, folgt nun die Inklusion $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E$ aus dem eingangs Gesagten. Also ist $A \cap E = E \cap A$ ein Element von $\delta(\mathcal{E})$ für alle $A \in \delta(\mathcal{E})$ und $E \in \mathcal{E}$. Aber das heißt gerade, dass E in \mathcal{D}_A liegt! Weil \mathcal{D}_A ein Dynkin-System ist, folgt aus $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_A$ schließlich wie gewünscht $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_A$ für alle $A \in \delta(\mathcal{E})$. \square

Wir wenden uns nun dem Maßeindeutigkeitssatz zu.

BEWEIS VON THEOREM 1.20. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für die Mengen E_n aus B) definieren wir das Mengensystem

$$\mathcal{D}_n = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A \cap E_n) = \nu(A \cap E_n)\}.$$

Da μ und ν auf \mathcal{E} übereinstimmen, folgt die Inklusion $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n$ aus der Annahme A). Wir wollen zeigen, dass \mathcal{D}_n die Bedingungen (A1), (A2) und (A3') erfüllt. Dann ist \mathcal{D}_n gleich $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ nach Lemma 1.28.

Zunächst liegt X in \mathcal{D}_n , da μ und ν auf \mathcal{E} übereinstimmen und deswegen $\mu(X \cap E_n) = \mu(E_n) = \nu(E_n) = \nu(X \cap E_n)$ ist. Sei weiter A aus \mathcal{D}_n , sodass $\mu(A \cap E_n) = \nu(A \cap E_n)$ gilt. Aus Satz 1.15 a) und $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$ ergeben sich somit die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mu(A^c \cap E_n) &= \mu(E_n \setminus (A \cap E_n)) = \mu(E_n) - \mu(A \cap E_n) \\ &= \nu(E_n) - \nu(A \cap E_n) = \nu(E_n \setminus (A \cap E_n)) = \nu(A^c \cap E_n). \end{aligned}$$

Also liegt A^c in \mathcal{D}_n , und wir haben (A1) und (A2) gezeigt.

Seien nun $A_j \in \mathcal{D}_n$, $j \in \mathbb{N}$, disjunkt. Mit (M2) folgt (A3') ähnlich wie oben aus

$$\begin{aligned} \mu\left(E_n \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap E_n)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap E_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j \cap E_n) \\ &= \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap E_n)\right) = \nu\left(E_n \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right). \end{aligned}$$

Wie schon gesagt, liefert Lemma 1.28 nun die Gleichung $\mathcal{D}_n = \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\mu(A \cap E_n) = \nu(A \cap E_n)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist.

Nach Lemma 1.14 gibt es disjunkte $F_n \in \mathcal{A}$ mit $F_n \subseteq E_n$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$. Also sind auch die Mengen $B \cap F_n = B \cap F_n \cap E_n$ für $n \in \mathbb{N}$ disjunkt. Damit, aus (M2) und dem bisher Bewiesenen folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap F_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap F_n \cap E_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B \cap F_n \cap E_n) = \nu(B). \end{aligned} \quad \square$$

KAPITEL 2

Messbare Funktionen und das Lebesgue-Integral

Wir definieren in diesem Kapitel das Integral auf einem Maßraum und zeigen die aus Analysis 2 vertrauten und eine Reihe neuer Eigenschaften des Integrals. Insbesondere beweisen wir die ersten wichtigen Aussagen zu seiner Vertauschbarkeit mit Grenzwerten. Dabei erklären wir das Integral für jede nichtnegative ‘messbare’ Funktion. Diesen grundlegenden Begriff untersuchen wir zuerst.

2.1. Messbare Funktionen

Wir hatten in Satz 2.32 in Analysis 2 gesehen, dass eine Funktion genau dann stetig ist, wenn das Urbild jeder offenen Teilmenge des Bildraums wieder offen ist. Die analoge Urbildeigenschaft für σ -Algebren spielt in unserer Konstruktion des Integrals eine entscheidende Rolle, siehe z.B. den Beweis von Satz 2.13. Im Hinblick darauf führen wir nun eine der zentralen Funktionenklassen der Analysis ein.

DEFINITION 2.1. Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf der Menge $X \neq \emptyset$ und \mathcal{B} eine σ -Algebra auf $Y \neq \emptyset$. Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt (\mathcal{A} - \mathcal{B} -)messbar, wenn für jede Menge B aus \mathcal{B} das Urbild $f^{-1}(B)$ in \mathcal{A} liegt.

Wir schreiben oft $\{f \in B\}$ statt $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. In der Wahrscheinlichkeitstheorie spricht man von ‘Zufallsvariablen’ statt von messbaren Funktionen. Wir werden im Laufe dieses Abschnittes sehen, dass die Messbarkeit sehr angenehme Permanenzeigenschaften besitzt und dass zumindest im Falle der Borelschen σ -Algebren \mathcal{B}_m Messbarkeit eine recht ‘schwache’ Eigenschaft ist. Wir beginnen mit einigen einfachen, aber wichtigen Beobachtungen.

BEMERKUNG 2.2. Gegeben seien σ -Algebren \mathcal{A} und \mathcal{B} auf X beziehungsweise Y .

a) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbare Funktion. Dann ist f auch \mathcal{A}' - \mathcal{B}' -messbar für alle σ -Algebren \mathcal{A}' auf X mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ und \mathcal{B}' auf Y mit $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$.

b) Jede Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist $\mathcal{P}(X)$ - \mathcal{B} -messbar und \mathcal{A} - $\{\emptyset, Y\}$ -messbar. Ferner sind konstante Funktionen f (etwa mit Bild $f(X) = \{y_0\}$) stets messbar, da hier $f^{-1}(B)$ für jedes $B \in \mathcal{B}$ entweder gleich X (für $y_0 \in B$) oder gleich \emptyset (für $y_0 \notin B$) ist. Sei f umgekehrt $\{\emptyset, X\}$ - \mathcal{B} -messbar. Sobald \mathcal{B} ‘Punkte trennt’ (für jedes Paar $y_1 \neq y_2$ in Y gebe es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $y_1 \in B$ und $y_2 \notin B$), muss dann f schon konstant sein.¹ Insbesondere sind $\{\emptyset, X\}$ - \mathcal{B}_m -messbare Funktionen stets konstant.

¹Dies war in der Vorlesung falsch dargestellt worden.

c) Für $A \subseteq X$ betrachten wir die *charakteristische Funktion*

$$\mathbb{1}_A : X \rightarrow \mathbb{R}; \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A = A^c. \end{cases}$$

Sei $B \in \mathcal{B}_1$. Dann ist das Urbild durch

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} A, & 1 \in B, 0 \notin B, \\ A^c, & 1 \notin B, 0 \in B, \\ X, & 1 \in B, 0 \in B, \\ \emptyset, & 1 \notin B, 0 \notin B, \end{cases}$$

gegeben. Folglich ist $\mathbb{1}_A$ genau dann \mathcal{A} - \mathcal{B}_1 -messbar, wenn A in \mathcal{A} liegt. Die gleiche Aussage gilt mit analogem Beweis für Funktionen der Form $c\mathbb{1}_A$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Etwa die Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist also \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_1 -messbar, während $\mathbb{1}_{\Omega} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ mit Ω aus Satz 1.27 nicht \mathcal{B}_m - \mathcal{B}_1 -messbar ist.

d) Seien $X_0 \in \mathcal{A}$ und $f : X \rightarrow Y$ eine \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbare Abbildung. Dann ist auch die Einschränkung $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$ eine \mathcal{A}_{X_0} - \mathcal{B} -messbare Funktion, vgl. (1.1), denn für jedes $B \in \mathcal{B}$ liegt $f|_{X_0}^{-1}(B) = \{x \in X_0 \mid f(x) \in B\} = X_0 \cap f^{-1}(B)$ in \mathcal{A}_{X_0} . \diamond

Wir zeigen als erste Permanenzeigenschaft, dass die Komposition messbarer Funktionen wieder messbar ist. Ferner genügt es, Messbarkeit auf einem Erzeuger der Bild- σ -Algebra nachzurechnen.

SATZ 2.3. *Gegeben seien σ -Algebren \mathcal{A} , \mathcal{B} und \mathcal{C} auf nichtleeren Mengen X , Y bzw. Z , sowie $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Seien f \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbar und g \mathcal{B} - \mathcal{C} -messbar. Dann ist die Komposition $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ eine \mathcal{A} - \mathcal{C} -messbare Abbildung.*

b) *Seien $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ und $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$. Die Funktion f ist genau dann \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbar, wenn für jede Menge E aus \mathcal{E} das Urbild $f^{-1}(E)$ in \mathcal{A} liegt.*

BEWEIS. a) Sei $C \in \mathcal{C}$. Nach Voraussetzung liegt zuerst $g^{-1}(C)$ in \mathcal{B} und dann $h^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ in \mathcal{A} .

b) Die Implikation ‘ \Rightarrow ’ gilt laut Definition 2.1. Nach einer Übung ist das System $f_*(\mathcal{A}) = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ eine σ -Algebra auf Y . Weiter beinhaltet $f_*(\mathcal{A})$ voraussetzungsgemäß den Erzeuger \mathcal{E} von \mathcal{B} . Laut Lemma 1.6 ist somit \mathcal{B} in $f_*(\mathcal{A})$ enthalten, was Behauptung b) impliziert. \square

Wir führen nun den für die Analysis wichtigsten Typ messbarer Funktionen ein.

DEFINITION 2.4. *Seien X und Y metrische Räume. Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt Borel-messbar, wenn sie $\mathcal{B}(X)$ - $\mathcal{B}(Y)$ -messbar ist.*

Bevor wir fortfahren, setzen wir für $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ die Mengen

$$\begin{aligned} \{f = g\} &= \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}, & \{f \leq g\} &= \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}, \\ \{f < g\} &= \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}, & \{f \neq g\} &= \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\{f = a\} = \{x \in X \mid f(x) = a\} \quad \text{usw.}$$

Wie in Analysis 2 bedeutet $f \geq g$, dass $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in X$ gilt, und analog für andere Relationen. Wir schreiben dabei oft a statt $a1_X$. Es sei $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Wir zeigen nun, dass stetige Funktionen messbar sind und diskutieren weitere Permanenzeigenschaften der Messbarkeit.

SATZ 2.5. a) Seien X und Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist f Borel-messbar.

Seien \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X und $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, wobei $f = (f_1, \dots, f_m)$ ist. Wir schreiben hier ‘messbar’ statt ‘ \mathcal{A} - \mathcal{B}_1 -messbar’. Es gelten die folgenden Aussagen.

b) Die Funktion f ist genau dann messbar, wenn alle Komponenten $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar sind.

c) Sei $m = 1$. Genau dann ist f messbar, wenn für jedes $b \in \mathbb{Q}$ das Urbild $f^{-1}((-\infty, b])$ in \mathcal{A} liegt. (Analoge Aussagen gelten für $(-\infty, b)$, $[b, \infty)$ und (b, ∞) .)

d) Seien f und g messbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist die Linearkombination $\alpha f + \beta g : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ messbar.

e) Seien $m = 1$, sowie f und g messbar. Dann ist das Produkt $fg : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Sei ferner $f \neq 0$. Dann liegt $X_0 := \{f \neq 0\} \neq \emptyset$ in \mathcal{A} und der Kehrwert $\frac{1}{f} : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ist \mathcal{A}_{X_0} - \mathcal{B}_1 -messbar. Weiter sind die Mengen $\{f \geq g\}$ und $\{f > g\}$ in \mathcal{A} enthalten.

BEWEIS. a) Sei $O \subseteq Y$ offen. Wegen der Stetigkeit von f liegt dann $f^{-1}(O)$ in $\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$, siehe Satz 2.32 in Analysis 2. Aus Satz 2.3 b) ergibt sich nun Teil a).

b) Die Koordinatenabbildung $p_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$; $p_k(y) = y_k$, ist stetig und damit nach a) messbar. Also folgt laut Satz 2.3 a) aus der Messbarkeit von f jene von $f_k = p_k \circ f$. Seien umgekehrt alle f_k messbar. Für $a \leq b$ in \mathbb{R}^m ist also das Urbild

$$f^{-1}((a, b]) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall k \in \{1, \dots, m\} : f(x_k) \in (a_k, b_k]\} = \bigcap_{k=1}^m f_k^{-1}((a_k, b_k])$$

in \mathcal{A} enthalten. Wieder mit Satz 2.3 b) erhalten wir Aussage b), da \mathcal{B}_m laut Satz 1.9 vom System \mathcal{J}_m erzeugt wird.

c) Die Implikation ‘ \Rightarrow ’ gilt definitionsgemäß. Die Umkehrung resultiert aus Satz 2.3 b), weil \mathcal{B}_1 wieder nach Satz 1.9 den Erzeuger $\{(-\infty, b] \mid b \in \mathbb{Q}\}$ besitzt. Die anderen Intervalle behandelt man ähnlich, vergleiche Lemma 2.7.

d) Wegen Behauptung b) ist die Abbildung $(f, g) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ messbar. Weiter ist die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\varphi(x, y) = \alpha x + \beta y$, stetig und somit auf Grund von Teil a) messbar. Da $\alpha f + \beta g = \varphi \circ (f, g)$ ist, liefert Satz 2.3 a) die Aussage d).

e) Die Menge $X_0 = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist in \mathcal{A} enthalten, da f messbar ist. Man zeigt nun die Messbarkeit von fg und $1/f$ wie in Schritt d). Dieser impliziert ferner die Messbarkeit von $f - g$, sodass auch $\{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\} = (f - g)^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ und $\{x \in X \mid f(x) > g(x)\} = (f - g)^{-1}(\mathbb{R}_+)$ Elemente von \mathcal{A} sind. \square

In diesem Abschnitt sei nun stets X mit einer σ -Algebra \mathcal{A} versehen. Wir diskutieren einige einfache Beispiele, die den Nachweis der Messbarkeit illustrieren.

BEISPIEL 2.6. a) Seien $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine \mathcal{A} - \mathcal{B}_m -messbare Funktion und $g : X \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = |f(x)|_2$. Es gilt $g = N \circ f$ für die stetige (und damit nach Satz 2.5 a) Borel-messbare) Abbildung $N : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$; $N(x) = |x|_2$. Satz 2.3 a) liefert nun die \mathcal{A} - \mathcal{B}_1 -Messbarkeit von g .

b) Seien \mathcal{B} eine σ -Algebra auf Y , $X = W \dot{\cup} Z$ für nichtleere disjunkte Mengen $W, Z \in \mathcal{A}$, $f : W \rightarrow Y$ eine \mathcal{A}_W - \mathcal{B} -messbare Funktion und $g : Z \rightarrow Y$ eine \mathcal{A}_Z - \mathcal{B} -messbare Funktion. Dann ist die Abbildung

$$h : X \rightarrow Y; \quad h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in W, \\ g(x), & x \in Z, \end{cases}$$

\mathcal{A} - \mathcal{B} -messbar.

BEWEIS. Sei $B \in \mathcal{B}$. Nach Lemma 1.10 sind \mathcal{A}_W und \mathcal{A}_Z in \mathcal{A} enthalten. Daraus und aus den Voraussetzungen folgt die Aussage mit

$$\begin{aligned} h^{-1}(B) &= \{x \in W \dot{\cup} Z \mid h(x) \in B\} = \{x \in W \mid f(x) \in B\} \cup \{x \in Z \mid g(x) \in B\} \\ &= f^{-1}(B) \cup g^{-1}(B) \in \mathcal{A}_W \cup \mathcal{A}_Z \subseteq \mathcal{A}. \end{aligned} \quad \square$$

c) Teil b) und Satz 2.5 a) implizieren die \mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1 -Messbarkeit der Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad h(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{x}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}), \\ 0, & (x, y) \in \{0\} \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

da die Mengen $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ und $\{0\} \times \mathbb{R}$ Borelsch und die beiden darauf definierten Funktionen sogar stetig sind.

d) Wie in c) sieht man, dass stückweise stetige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar sind, vergleiche Definition 1.2 in Analysis 2. \diamond

Im Folgenden wird es sich (etwa bei der Behandlung von Infima und Suprema) als nützlich erweisen, auch Funktionen zu betrachten, die Werte in der Menge $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ annehmen. Wir versehen diese Menge mit den folgenden Rechenregeln, wobei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ sind:

$$\begin{aligned} -\infty &< a < \infty, & |\pm\infty| &= +\infty, \\ \pm\infty + (\pm\infty) &= \pm\infty, & \pm\infty + a &= a \pm \infty = \pm\infty, \\ b \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot b = \begin{cases} \pm\infty, & b \in (0, \infty], \\ \mp\infty, & b \in [-\infty, 0), \end{cases} & \frac{a}{\pm\infty} &= 0, \end{aligned}$$

Wir verwenden auch ∞ statt $+\infty$ und setzen z.B. $[-\infty, a] = \{-\infty\} \cup (-\infty, a]$. Für eine Folge $(x_n)_n$ in $\overline{\mathbb{R}}$ schreiben wir $x_n \rightarrow +\infty$ (bzw. $x_n \rightarrow -\infty$) für $n \rightarrow \infty$, wenn es für jede Schranke $K \in \mathbb{R}$ so einen Index $N_K \in \mathbb{N}$ gibt, dass die Ungleichung $x_n \geq K$ (bzw. $x_n \leq K$) für alle $n \geq N_K$ gilt. In einer Übung in Analysis 2 wurde gezeigt, dass diese Grenzwerte einer Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ entsprechen.

Die oben aufgeführten algebraischen Gesetze respektieren diesen Konvergenzbegriff, vergleiche Satz 3.38 und die Übungen in Analysis 1. In der Integrationstheorie setzen wir

$$\mathbf{neu} \quad 0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0.$$

Diese neuen Rechenregeln erweisen sich als bequem. Sie respektieren jedoch **nicht** die Konvergenz von Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$, siehe Abschnitt 3.4 in Analysis 1, worauf man bei ihrer Verwendung achten muss. Weiterhin

$$\mathbf{verboten} \text{ sind } +\infty + (-\infty), \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \text{ usw.}$$

Für Funktionen $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und Elemente $a \in \overline{\mathbb{R}}$ verwenden wir die Notationen aus (2.1) in analoger Weise. Die *Borelsche σ -Algebra $\overline{\mathcal{B}}_1$ auf $\overline{\mathbb{R}}$* ist durch

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{B}}_1 &:= \{B \cup E \mid B \in \mathcal{B}_1, E \subseteq \{+\infty, -\infty\}\} \\ &= \sigma(\{(-\infty, a] \cup E \mid a \in \mathbb{Q}, E \subseteq \{-\infty, \infty\}\}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

definiert. Dabei folgt die zweite Gleichung aus Satz 1.9 und einer Übung, die auch zeigt, dass $\overline{\mathcal{B}}_1$ eine σ -Algebra ist. Offenbar liegt \mathcal{B}_1 in $\overline{\mathcal{B}}_1$, da oben $E = \emptyset$ zugelassen ist. Wir schreiben $\overline{\mathcal{B}}_+$ für $(\overline{\mathcal{B}}_1)_{[0, \infty]}$, vergleiche Lemma 1.10. Eine $\mathcal{B}(X)$ - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbare oder $\mathcal{B}(X)$ - $\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbare Funktion heißt ebenfalls *Borel-messbar*. Wir charakterisieren diese Begriffe.

LEMMA 2.7. *Es gelten die folgenden Aussagen.*

$$a) \quad \overline{\mathcal{B}}_1 = \sigma(\{[-\infty, a] \mid a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{(a, +\infty] \mid a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{Q}\}).$$

b) *Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.*

- i) *f ist \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbar.*
- ii) *$\{f \leq a\} \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{Q}$.*
- iii) *$\{f < a\} \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{Q}$.*
- iv) *$\{f \geq a\} \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{Q}$.*
- v) *$\{f > a\} \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{Q}$.*

BEWEIS. Um a) zu zeigen, bezeichnen wir die vier erzeugten σ -Algebren mit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ bzw. \mathcal{A}_4 . Sei $a \in \mathbb{Q}$. Da die Menge

$$[-\infty, a] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-\infty, a + \frac{1}{n})$$

ein Element von \mathcal{A}_2 ist, liefert Lemma 1.6 die Inklusion $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$. Analog erhält man $\mathcal{A}_3 \subseteq \mathcal{A}_4$. Weiter ist $[-\infty, a) = [a, +\infty]^c$ in \mathcal{A}_3 enthalten, weswegen nach Lemma 1.6 die σ -Algebra \mathcal{A}_2 in \mathcal{A}_3 liegt. Nach (2.2) beinhaltet $\overline{\mathcal{B}}_1$ die Menge $(a, +\infty] = (a, \infty) \cup \{+\infty\}$ und damit laut Lemma 1.6 auch das System \mathcal{A}_4 . Schließlich sind die Durchschnitte

$$\{-\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-\infty, -n] \quad \text{und} \quad \{+\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (n, +\infty] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-\infty, n]^c$$

in \mathcal{A}_1 enthalten. Somit liegt für jedes $E \subseteq \{-\infty, +\infty\}$ die Vereinigung $(-\infty, a] \cup E$ in \mathcal{A}_1 . Lemma 1.6 und (2.2) implizieren dann die verbleibende Inklusion $\overline{\mathcal{B}}_1 \subseteq \mathcal{A}_1$, und Aussage a) gilt. Die Behauptung b) folgt nun aus Teil a) und Satz 2.3 b). \square

Seien Funktionen $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir definieren das *Supremum*

$$f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

punktweise durch

$$\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \right)(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Das *Infimum* $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, der *Limes inferior* $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$, der *Limes superior* $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ und, falls für jedes $x \in X$ in $\overline{\mathbb{R}}$ existent, der *punktweise Grenzwert* (in $\overline{\mathbb{R}}$)

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

werden analog eingeführt. (Vergleiche (2.7) und (2.8) in Analysis 1.) Hierbei gelten

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} f_n &= \sup \{f_1, f_2, \dots, f_N, f_N, \dots\} \quad \text{und} \\ \min_{1 \leq n \leq N} f_n &= \inf \{f_1, f_2, \dots, f_N, f_N, \dots\}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz zeigt, dass Messbarkeit unter abzählbaren Grenzprozessen erhalten bleibt (im Gegensatz zur Stetigkeit!). Er wird oft zu ihrem Nachweis verwendet.

SATZ 2.8. *Die Funktionen $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ seien \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbar für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann sind auch die Abbildungen $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ und $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ alle \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbar. Falls der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ für jedes $x \in X$ existiert, folgt ferner die \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -Messbarkeit der Funktion $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.*

BEWEIS. Sei $a \in \mathbb{R}$. Da die Funktionen f_n messbar sind, liegen die Mengen

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \leq a\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid f_n(x) \leq a\}, \\ \{x \in X \mid \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \geq a\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid f_n(x) \geq a\} \end{aligned}$$

in \mathcal{A} . Lemma 2.7 liefert also die ersten beiden Behauptungen. Die nächsten beiden folgen dann aus den Definitionen

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{j \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq j} f_n \quad \text{und} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{j \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq j} f_n.$$

Wenn der punktweise Grenzwert existiert, dann ist er gleich dem Limes inferior $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ und damit messbar. \square

Hier sind messbare $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ eingeschlossen, allerdings können $\sup f_n$ usw. Werte in $\overline{\mathbb{R}}$ annehmen (solange keine weiteren Annahmen getroffen werden).

Im Allgemeinen sind überabzählbare Suprema oder Infima messbarer Abbildungen nicht messbar. Zum Beispiel ist für die Menge Ω aus Satz 1.27 die Funktion $\mathbb{1}_\Omega$ nicht \mathcal{B}_m - \mathcal{B}_1 -messbar, aber sie ist gleich dem Supremum $\sup_{x \in \Omega} \mathbb{1}_{\{x\}}$ messbarer Funktionen.

Für eine Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir den *Positiv-* und *Negativteil* durch

$$f_+ = \max\{f, 0\} : X \rightarrow [0, \infty] \quad \text{und} \quad f_- = \max\{-f, 0\} : X \rightarrow [0, \infty].$$

Es gelten dabei die Gleichungen

$$f = f_+ - f_-, \quad |f| = f_+ + f_-, \quad \{f_+ > 0\} \cap \{f_- > 0\} = \emptyset. \quad (2.3)$$

Wir erweitern nun einen Teil von Satz 2.5 auf $\overline{\mathbb{R}}$ -wertige Funktionen.

SATZ 2.9. *Seien $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Die Funktionen f und g seien \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann liegt*

$$X_0 := \left[(\{\alpha f = \infty\} \cap \{\beta g = -\infty\}) \cup (\{\alpha f = -\infty\} \cap \{\beta g = \infty\}) \right]^c$$

in \mathcal{A} . Die Linearkombination $\alpha f + \beta g : X_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist definiert und \mathcal{A}_{X_0} - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbar. Das Produkt $f g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbar.

b) *Die Funktion f ist genau dann \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbar, wenn f_+ und f_- beide \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbar sind. Daraus folgt dann die \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_+$ -Messbarkeit der Abbildung $|f| : X \rightarrow [0, \infty]$; $x \mapsto |f(x)|$.*

BEWEIS. a) Da f messbar ist, liegt die Menge

$$\{\alpha f = \infty\} = \begin{cases} \{f = -\infty\}, & \alpha < 0, \\ \emptyset, & \alpha = 0, \\ \{f = \infty\}, & \alpha > 0, \end{cases}$$

in \mathcal{A} . Die anderen Mengen in der Definition von X_0 behandelt man ähnlich. Somit ist X_0 in \mathcal{A} enthalten. Wir werden die in a) behauptete Messbarkeiten via Approximation beweisen. Dazu erklären wir die Funktionen $f_n, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \max\{-n, \min\{n, f(x)\}\} \quad \text{und} \quad g_n(x) = \max\{-n, \min\{n, g(x)\}\}$$

für $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$. Gemäß Bemerkung 2.2 sind die konstanten Abbildungen $x \mapsto \pm n$ messbar. Satz 2.8 liefert nun die \mathcal{A} - \mathcal{B}_1 -Messbarkeit aller f_n und g_n , sodass nach Satz 2.5 dies auch für die Funktionen $\alpha f_n + \beta g_n, f_n g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ gilt. Die Einschränkung $\alpha f_n + \beta g_n : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ist somit \mathcal{A}_{X_0} - \mathcal{B}_1 -messbar laut Bemerkung 2.2.

Wir zeigen unten, dass die Folgen $(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x))_n$ für jedes $x \in X_0$ gegen $\alpha f(x) + \beta g(x)$ und $(f_n(x)g_n(x))_n$ für jedes $x \in X$ gegen $f(x)g(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ streben. Satz 2.8 impliziert dann die Messbarkeit der beiden Grenzfunktionen. Zunächst gelten diese beiden Grenzwertaussagen, wenn $f(x)$ und $g(x)$ endlich sind.

Sei etwa $x \in X_0$ mit $f(x) = g(x) = \infty$ und $\alpha, \beta \geq 0$. In diesem Fall konvergiert

$$\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) = \alpha n + \beta n \longrightarrow \begin{cases} \infty, & \alpha + \beta > 0 \\ 0, & \alpha + \beta = 0 \end{cases} = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

für $n \rightarrow \infty$. Die anderen Fälle für $\alpha f + \beta g$ behandelt man entsprechend.

Seien nun $f(x) = \infty$ und $g(x) = -\infty$. Dann strebt $f_n(x)g_n(x) = -n^2$ gegen $-\infty = f(x)g(x)$. Seien weiter $f(x) = \infty$ und $g(x) = 0$. Hier gilt $f_n(x)g_n(x) = n \cdot 0 \rightarrow 0 = f(x)g(x)$ für $n \rightarrow \infty$. Man erhält die gewünschten Grenzwerte für die verbleibenden $x \in X$ auf ähnliche Weise. Also ist Behauptung a) bewiesen.

b) Die erste Implikation ‘ \Rightarrow ’ in b) folgt aus Satz 2.8 und die anderen aus Teil a) und den Gleichungen in (2.3). \square

Aus der Messbarkeit von $|f|$ folgt im Allgemeinen nicht die von f . Ein Beispiel dafür ist die Funktion $f = \mathbb{1}_\Omega - \mathbb{1}_{\Omega^c} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|f| = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}$, wobei die Menge Ω aus Satz 1.27 stammt. Wir verwenden nun die Konvergenzaussagen aus Satz 2.8 in einigen typischen Situationen.

BEISPIEL 2.10. a) Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Nach Satz 2.8 ist die Ableitung $f' : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar, da sie der punktweise Grenzwert der stetigen Funktionen $f_n : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $f_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$, ist.

b) Die Funktionen $f_j : X \rightarrow [0, \infty]$ seien $\mathcal{A}\text{-}\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbar für jedes $j \in \mathbb{N}_0$. Dann sind die Partialsummen $g_n : X \rightarrow [0, \infty]$; $g_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j(x)$, gemäß Satz 2.9 auch $\mathcal{A}\text{-}\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbar für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit ebenso ihr punktweiser Limes, die Reihe $g : X \rightarrow [0, \infty]$; $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$. Analog folgt für messbare $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ die Messbarkeit der Reihe $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$; $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$, wenn sie punktweise in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert.²

c) Seien $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $X_n \in \mathcal{A}$ mit $X_n \uparrow X$ und die Einschränkungen $f|_{X_n} : X_n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ seien $\mathcal{A}_{X_n}\text{-}\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die nach Beispiel 2.6 messbare Nullfortsetzung von $f|_{X_n}$. Diese strebt punktweise gegen $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Satz 2.9 zeigt nun die $\mathcal{A}\text{-}\overline{\mathcal{B}}_1$ -Messbarkeit von f . \diamond

Als Vorbereitung für die Einführung des Integrals diskutieren noch eine wichtige Klasse messbarer Funktionen.

DEFINITION 2.11. Eine $\mathcal{A}\text{-}\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt einfach, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt. Seien weiter $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ alle verschiedenen Funktionswerte der einfachen Funktion f . Die Menge $A_j := f^{-1}(\{y_j\})$ liegt dann in \mathcal{A} für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$. Die Normalform von f ist

$$f = \sum_{j=1}^n y_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Wir notieren einige Eigenschaften, die direkt aus dieser Definition folgen.

²In der Vorlesung wurde diese Aussage an anderer Stelle bewiesen.

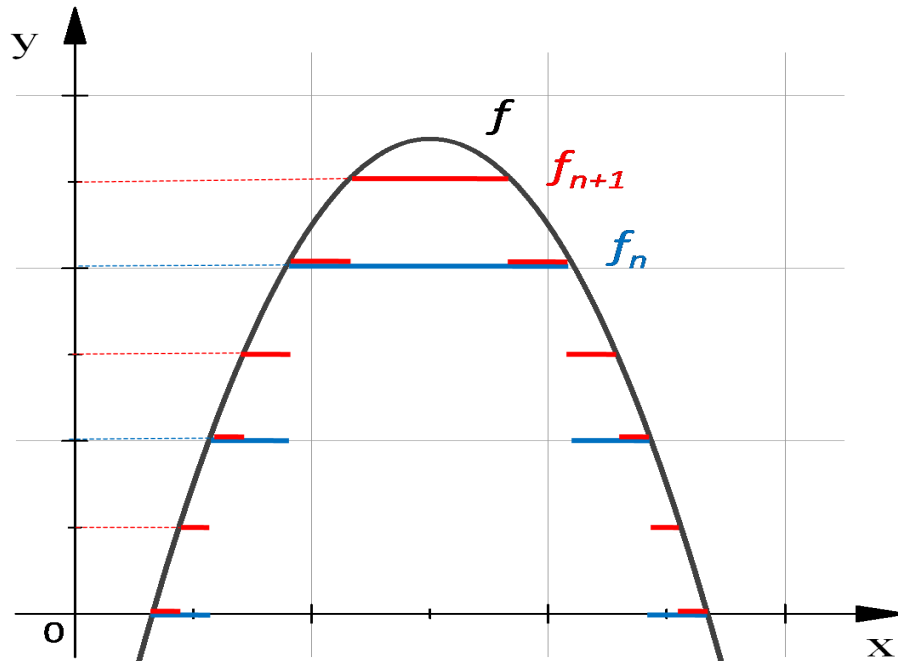


ABBILDUNG 2.1. Approximation einer Funktion durch einfache Funktionen

BEMERKUNG 2.12. a) Eine einfache Funktion hat viele Darstellungen, z.B. $\mathbb{1}_A = 2\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_X + \mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{A^c}$. (Die letztere ist die Normalform.)

b) Für die Normalform in Definition 2.11 gelten $f(x) = y_j$ für alle $x \in A_j$ und $X = A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n$.

c) Linearkombinationen, Produkte, endliche Minima und Maxima einfacher Funktionen sind einfach. \diamond

Wir zeigen nun eine zentrale Approximationsaussage, auf der unsere Konstruktion des Integrals beruht. (Auch hier sind messbare $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eingeschlossen.)

SATZ 2.13. Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbare Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Es gibt einfache Funktionen $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, die punktweise in $\overline{\mathbb{R}}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen f konvergieren und der Ungleichung $|f_n| \leq |f|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genügen.

b) Sei f beschränkt. Dann gilt Aussage a) mit gleichmäßiger Konvergenz.

c) Sei $f \geq 0$. Dann gilt Aussage a) mit $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

BEWEIS. 1) Sei $f : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Unser Vorgehen wird durch Abbildung 2.1 illustriert. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0, 1, \dots, n2^n\}$. Wir setzen die Mengen

$$B_{j,n} = \begin{cases} [j2^{-n}, (j+1)2^{-n}), & j \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}, \\ [n, \infty], & j = n2^n, \end{cases} \quad \text{und} \quad A_{j,n} = f^{-1}(B_{j,n}).$$

Da f messbar ist, liegen alle $A_{j,n}$ in \mathcal{A} . Nach Konstruktion ist X die disjunkte Vereinigung von $A_{0,n}, \dots, A_{n2^n,n}$. Wir definieren nun die einfache Funktion

$$f_n = \sum_{j=0}^{n2^n} j2^{-n} \mathbb{1}_{A_{j,n}}.$$

Für $x \in A_{j,n}$ erhalten wir $f(x) \in B_{j,n}$ und $f_n(x) = j2^{-n} = \min B_{j,n} \leq f(x)$. Somit sind die Ungleichungen $0 \leq f_n \leq f$ gezeigt. Weiter notieren wir die Identität

$$A_{j,n} = \begin{cases} A_{2j,n+1} \dot{\cup} A_{2j+1,n+1}, & j \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}, \\ \dot{\cup}_{k=n2^{n+1}}^{(n+1)2^{n+1}} A_{k,n+1}, & j = n2^n. \end{cases}$$

Sei nun $x \in A_{j,n}$ mit $j < n2^n$. Dann gilt die Abschätzung

$$f_n(x) = j2^{-n} \begin{cases} = 2j2^{-n-1} = f_{n+1}(x), & x \in A_{2j,n+1} \\ < (2j+1)2^{-n-1} = f_{n+1}(x), & x \in A_{2j+1,n+1} \end{cases} = f_{n+1}(x).$$

Sei ferner $x \in A_{n2^n,n}$. Also liegt x in einer Menge $A_{k,n+1}$ für ein $k \in \{n2^{n+1}, \dots, (n+1)2^{n+1}\}$. Daraus folgt die Relation

$$f_n(x) = n = n2^{n+1}2^{-(n+1)} \leq k2^{-(n+1)} = f_{n+1}(x).$$

Zusammen ergeben sich die in c) geforderten Ungleichungen

$$0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f.$$

2) Um die Konvergenz von $(f_n(x))_n$ zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle.

i) Sei $f(x) = \infty$. Dann liegt x stets in der Menge $A_{n2^n,n}$, sodass $f_n(x) = n$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $f(x)$ in $[0, \infty]$ konvergiert.

ii) Sei $f(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für jedes $n > f(x)$ gibt es dann einen Index $j(n) < n2^n$ derart, dass x in $A_{j(n),n}$ und somit $f(x)$ in $[j(n)2^{-n}, (j(n)+1)2^{-n}]$ enthalten sind. Für diese n folgern wir die Abschätzung

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq (j(n)+1)2^{-n} - j(n)2^{-n} = 2^{-n}.$$

In beiden Fällen strebt $f_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $f(x)$, und Aussage c) ist gezeigt.

3) Für Behauptung a) und b) setzen wir $f_n := (f_+)_n - (f_-)_n$. Diese einfache Funktionen konvergieren nach Teil c) punktweise gegen $f_+ - f_- = f$ für $n \rightarrow \infty$, und es gilt $|f_n| = (f_+)_n + (f_-)_n \leq f_+ + f_- = |f|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei f für b) beschränkt. Wir sind dann oben für $n > \|f\|_\infty$ stets im Fall ii), woraus die Ungleichung

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |(f_+)_n(x) - f_+(x)| + |(f_-)_n(x) - f_-(x)| \leq 2 \cdot 2^{-n}$$

für alle $x \in X$ und damit die gleichmäßige Konvergenz folgt. \square

Zusammen mit Satz 2.8 erhalten wir eine interessante Folgerung, die die Messbarkeit auf Konvergenzbetrachtungen zurückführt.

KOROLLAR 2.14. *Eine Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbar, wenn es einfache Funktionen $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die punktweise gegen f konvergieren.*

2.2. Konstruktion des Lebesgue-Integrals

In diesem Abschnitt sei (X, \mathcal{A}, μ) stets ein Maßraum. Wir definieren das Integral zuerst direkt für einfache Funktionen, dann per Approximation für **alle** nichtnegativen messbaren Abbildungen und schließlich mittels Positiv- und Negativteil für ‘integrierbare’ Funktionen. Man zeigt dabei die Eigenschaften des Integrals in jedem Schritt unter Rückgriff auf den vorhergehenden. In ähnlicher Weise gehen wir auch in späteren Beweisen oft in drei solchen Schritten vor.

Schritt A: Nichtnegative einfache Funktionen. Wir beginnen mit einer natürlichen Setzung, wobei wir an die Vereinbarung $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ erinnern.

DEFINITION 2.15. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine einfache Funktion mit der Normalform $f = \sum_{j=1}^n y_j \mathbb{1}_{A_j}$. Dann definiert man das Integral durch

$$\int f \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu(x) := \sum_{j=1}^n y_j \mu(A_j) \in [0, \infty].$$

Der Wert ∞ tritt z.B. für $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}$ und $\mu = \lambda_m$ auf. Man beachte, dass oben die Funktionswerte y_j nichtnegativ sind. Als erstes zeigen wir, dass das Integral nicht von der Wahl der Darstellung der einfachen Funktion abhängt (soweit die Faktoren nichtnegativ sind), was in manchen Beweisen benötigt wird. Im folgenden Lemma können sich insbesondere die Mengen B_k überlappen.

LEMMA 2.16. Seien $z_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $B_k \in \mathcal{A}$ für $k \in \{1, \dots, p\}$ und $f = \sum_{k=1}^p z_k \mathbb{1}_{B_k}$. Dann gilt

$$\int_X f(x) \, d\mu(x) = \sum_{k=1}^p z_k \mu(B_k).$$

BEWEIS. Wir lassen alle leeren B_k weg (soweit existent). Indem wir die Indizierung gegebenenfalls anpassen, können wir weiterhin $k \in \{1, \dots, p\}$ schreiben.

Es existieren disjunkte Mengen $\emptyset \neq C_i \in \mathcal{A}$ für $i \in \{1, \dots, l\}$ und für jedes $k \in \{1, \dots, p\}$ Indexmengen $\emptyset \neq I(k) \subseteq \{1, \dots, l\}$ mit $B_k = \dot{\bigcup}_{i \in I(k)} C_i$.

Wir zeigen diese Behauptung per Induktion über p . Sie ist klar für $p = 1$. Sie gelte für ein $p \in \mathbb{N}$ mit Mengen C_i . Wir setzen dann $C_0 = B_{p+1} \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_p)$, $C'_i = C_i \setminus B_{p+1}$ und $C''_i = C_i \cap B_{p+1}$ für jedes i . Wir lassen nun alle entstandenen leeren Mengen weg und nummerieren die verbleibenden neu definierten Mengen um. Damit ist die Behauptung auch für $p + 1$ gezeigt, und folglich für alle $p \in \mathbb{N}$.

Weiter gibt die Indexmenge $K(i) := \{k \in \{1, \dots, p\} \mid i \in I(k)\}$ für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$ an, in welchen B_k die Menge C_i liegt. Wir berechnen weiter

$$\sum_{k=1}^p z_k \mu(B_k) = \sum_{k=1}^p \sum_{i \in I(k)} z_k \mu(C_i) = \sum_{i=1}^l \sum_{k \in K(i)} z_k \mu(C_i) = \sum_{i=1}^l w_i \mu(C_i) =: S,$$

wobei wir $w_i = \sum_{k \in K(i)} z_k$ gesetzt haben. Man beachte, dass $f(x) = w_i$ für jedes $x \in C_i$ gilt. Wir vereinigen nun alle C_i mit gleichem Funktionswert w_i zu einer

Menge A_j und setzen $w_i =: y_j$ für diese w_i . Sei V die Vereinigung aller A_j . Wenn $V \neq X$ ist, müssen wir die Mengen A_j noch etwas abändern. Wenn ein Wert $y_j = 0$ ist, so ersetzen wir das zugehörige A_j durch $A_j \cup V^c$. Wenn kein y_j verschwindet, fügen wir $A_0 = V^c$ und $y_0 = 0$ hinzu. Am Ende ändern wir die Nummerierung zu $j \in \{1, \dots, n\}$.

Somit sind die Funktionswerte y_j alle verschieden und die Mengen A_j gleich $f^{-1}(\{y_j\})$ und disjunkt. Also hat f die Normalform

$$f = \sum_{j=1}^n y_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Da die Mengen C_i disjunkt sind, gilt schließlich nach Definition 2.15

$$S = \sum_{j=1}^n y_j \mu(A_j) = \int_X f(x) d\mu(x). \quad \square$$

Das oben definierte Integral genügt ähnlichen Eigenschaften wie das Riemannsche Integral aus Analysis 2. Im nächsten Hilfssatz ist nach Bemerkung 2.12 auch $\alpha f + \beta g \geq 0$ eine einfache Funktion.

LEMMA 2.17. *Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ einfach, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $A \in \mathcal{A}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- a) $\int_X \mathbb{1}_A(x) d\mu(x) = \mu(A)$.
- b) $\int_X (\alpha f + \beta g)(x) d\mu(x) = \alpha \int_X f(x) d\mu(x) + \beta \int_X g(x) d\mu(x)$.
- c) Sei $f \leq g$. Dann ist $\int_X f(x) d\mu(x) \leq \int_X g(x) d\mu(x)$.

BEWEIS. Behauptung a) folgt direkt aus Definition 2.15. Für die zweite Aussage schreiben wir f und g in den Normalformen

$$f = \sum_{j=1}^n y_j \mathbb{1}_{A_j} \quad \text{bzw.} \quad g = \sum_{k=1}^p z_k \mathbb{1}_{B_k}$$

mit den Funktionswerten $y_j, z_k \geq 0$. Wir setzen nun $C_j := A_j$ und $w_j = \alpha y_j$ für $j = \{1, \dots, n\}$ sowie $C_{n+k} = B_k$ und $w_{n+k} = \beta z_k$ für $k = \{1, \dots, p\}$. Somit hat die Linearkombination die Darstellung

$$\alpha f + \beta g = \sum_{i=1}^{n+p} w_i \mathbb{1}_{C_i}.$$

Da alle w_i nichtnegativ sind, liefern Lemma 2.16 und Definition 2.15 nun Behauptung b) durch

$$\begin{aligned} \int_X (\alpha f + \beta g) d\mu &= \sum_{i=1}^{n+p} w_i \mu(C_i) = \alpha \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i) + \beta \sum_{k=1}^p z_k \mu(B_k) \\ &= \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

Sei $g \geq f$. Definitionsgemäß ist dann das Integral der einfachen Funktion $g - f \geq 0$ größer gleich 0. Damit schließen wir mit Teil b) auf Aussage c)

$$\int_X g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X (g - f) \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu. \quad \square$$

Schritt B: Nichtnegative messbare Funktionen. Wir führen nun das Integral für jede \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ ein, wobei wir von Satz 2.13 ausgehen. Dieser liefert

$$\begin{aligned} &\text{einfache Funktionen } f_n : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ mit } f_n \leq f_{n+1} \leq f \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ &\text{und } f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ und jedes } x \in X. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Gleichwertig kann man in (2.4) die zweite Zeile durch die Gleichung $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ersetzen.

DEFINITION 2.18. Für eine \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ seien f_n für $n \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften aus (2.4) gegeben. Dann definiert man das Integral

$$\int f \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \, d\mu(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n(x) \, d\mu(x) \in [0, \infty].$$

Im nichtnegativen Fall benötigen wir also nur die Messbarkeit der Funktion f , um ihr Integral zu erklären, das jedoch gleich ∞ sein kann. Lemma 2.17 und die Monotonie von (f_n) sichern dabei die Existenz des Limes als Supremum. Im nächsten Resultat wird gezeigt, dass der Wert des Integrals nur vom Integranden f und nicht von der Wahl der Folge (f_n) in der obigen Definition abhängt.

LEMMA 2.19. Für jede \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ gilt

$$\int_X f(x) \, d\mu(x) = \sup \left\{ \int_X g(x) \, d\mu(x) \mid g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ einfach, } 0 \leq g \leq f \right\}.$$

BEWEIS. Sei (f_n) wie in (2.4) gegeben. Gemäß Definition 2.18 ist das Integral von f kleiner oder gleich dem Supremum in der Behauptung. Für die Umkehrung sei $g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine einfache Funktion mit $0 \leq g \leq f$ und der Normalform

$$g = \sum_{j=1}^l y_j \mathbb{1}_{A_j}$$

mit den Funktionswerten $y_j \geq 0$. Wir wählen eine (vorerst feste) Zahl $\alpha > 1$ und setzen $B_n = \{\alpha f_n \geq g\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Auf dieser Menge genügt also f_n einer Abschätzung, die zu der benötigten Ungleichung passt.

Nach Satz 2.5 liegen alle B_n in \mathcal{A} . Da (f_n) wächst, erhalten wir die Inklusion $B_n \subseteq B_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Sei $x \in X$. Wenn $f(x) = 0$ ist, folgt auch $g(x) = 0$ aus der Annahme $0 \leq g \leq f$. Folglich liegt x in allen B_n . Im Falle $f(x) > 0$ liefert die Annahme die strikte Ungleichung $f(x) > \frac{1}{\alpha} g(x)$. Weil $(f_n(x))_n$ nach $f(x)$ strebt, existiert deshalb so ein Index $n(x) \in \mathbb{N}$, dass $f_n(x) \geq \frac{1}{\alpha} g(x)$ und damit $x \in B_n$ für alle $n \geq n(x)$ gelten. Wir haben insgesamt $B_n \uparrow X$ gezeigt.

Weiter implizieren unsere Setzungen für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Relationen

$$\alpha f_n \geq \mathbb{1}_{B_n} g = \sum_{j=1}^l y_j \mathbb{1}_{A_j} \mathbb{1}_{B_n} = \sum_{j=1}^l y_j \mathbb{1}_{A_j \cap B_n}.$$

Aus den Definitionen des Integrals, der Stetigkeit des Maßes in Satz 1.15, der obigen Formel, sowie den Lemmas 2.16 und 2.17 schließen wir nun

$$\begin{aligned} \int_X g \, d\mu &= \sum_{j=1}^l y_j \mu(A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l y_j \mu(A_j \cap B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \mathbb{1}_{B_n} g \, d\mu \\ &\leq \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu. \end{aligned}$$

Da $\alpha > 1$ beliebig war, folgt daraus die Ungleichung $\int_X g \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$ und somit die Behauptung. \square

Wir erweitern nun die grundlegenden Rechenregeln des Integrals auf nichtnegative Funktionen und zeigen eine wichtige zusätzliche Eigenschaft.

LEMMA 2.20. *Für \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbare Funktionen $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gelten die folgenden Aussagen.*

- $\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, d\mu(x) = \alpha \int_X f(x) \, d\mu(x) + \beta \int_X g(x) \, d\mu(x)$.
- Sei $f \leq g$. Dann ist $\int_X f(x) \, d\mu(x) \leq \int_X g(x) \, d\mu(x)$.
- Es gilt genau dann $\int_X f(x) \, d\mu(x) = 0$, wenn $\mu(\{f > 0\}) = 0$ ist.
- Das Integral in a) ist endlich, wenn $\int_X f \, d\mu < \infty$ und $\int_X g \, d\mu < \infty$ sind. Weiter folgt aus $f \leq g$ und $\int_X g \, d\mu < \infty$, dass $\int_X f \, d\mu$ endlich ist.

BEWEIS. Seien (f_n) für f und (g_n) für g wie in (2.4) gegeben.

a) Die Funktionen $\alpha f_n + \beta g_n$ besitzen die Eigenschaften aus (2.4) für die Linearkombination $\alpha f + \beta g$, die laut Satz 2.9 messbar ist. Also folgen aus der Definition 2.18 und Lemma 2.17 die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (\alpha f_n + \beta g_n) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha \int_X f_n \, d\mu + \beta \int_X g_n \, d\mu \right) \\ &= \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu. \end{aligned}$$

b) Aus Lemma 2.19 und der Ungleichung $f \leq g$ schließen wir

$$\int_X f \, d\mu = \sup_{\substack{u \text{ einfach} \\ 0 \leq u \leq f}} \int_X u \, d\mu \leq \sup_{\substack{u \text{ einfach} \\ 0 \leq u \leq g}} \int_X u \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

Die Aussagen a) und b) liefern sofort die Behauptung d).

c) Wir setzen $A = \{f > 0\} \in \mathcal{A}$. Sei zuerst $\mu(A) = 0$. Aus den Ungleichungen $0 \leq f_n \leq f$ erhalten wir dann $f_n(x) = 0$ für alle $x \notin A$ und somit

$$0 \leq f_n \leq \|f_n\|_\infty \mathbb{1}_A \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lemma 2.17 liefert nun

$$0 \leq \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X \|f_n\|_\infty \mathbb{1}_A \, d\mu = \|f_n\|_\infty \mu(A) = 0.$$

Mit Definition 2.18 ergibt sich im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ wie gefordert $\int_X f \, d\mu = 0$.

Sei umgekehrt $\int_X f \, d\mu = 0$. Die Mengen $A_k = \{f \geq 1/k\}$ liegen für alle $k \in \mathbb{N}$ in \mathcal{A} und erfüllen $A_k \uparrow A$. Weiter gilt $f \geq \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}$, sodass Schritt b) und Lemma 2.17 für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$0 = \int_X f \, d\mu \geq \int_X \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k} \, d\mu = \frac{1}{k} \mu(A_k)$$

und damit $\mu(A_k) = 0$ implizieren. Folglich ist $\mu(A) = 0$ nach Satz 1.15. \square

Da $\lambda_1(\mathbb{Q}) = 0$ nach Beispiel 1.22 ist, liefert Aussage c) des Lemmas

$$\int_{\mathbb{R}} c \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = 0$$

für jedes $c \in [0, \infty]$. Der folgende Satz von der *monotonen Konvergenz* von B. Levi (1906) geht wesentlich in den weiteren Aufbau der Integrationstheorie ein.

THEOREM 2.21. *Gegeben seien ein Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) und \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbare Funktionen $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ mit $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ für $x \in X$. Dann ist $f : X \rightarrow [0, \infty]$ auch \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbar und es gilt*

$$\int_X f(x) \, d\mu(x) = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \, d\mu(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n(x) \, d\mu(x).$$

BEWEIS. Die Messbarkeit von f folgt aus Satz 2.8 und die letzte Gleichung aus der Monotonie des Integrals laut Lemma 2.20. Gemäß (2.4) gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ solche einfache Funktionen $u_{n,j} : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, dass $0 \leq u_{n,j} \leq u_{n,j+1} \leq f_n$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\sup_{j \in \mathbb{N}} u_{n,j} = f_n$ gelten. Wir wollen aus diesen Abbildungen eine Folge (v_k) mit den Eigenschaften aus (2.4) für f und mit $v_k \leq f_k$ gewinnen.

Dazu setzen wir $v_k := \max\{u_{1,k}, \dots, u_{k,k}\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Nach Bemerkung 2.12 sind alle Funktionen v_k einfach. Aus (2.4) und der Voraussetzung ergeben sich weiter die Ungleichungen

$$v_k \leq \max\{u_{1,k+1}, \dots, u_{k,k+1}\} \leq v_{k+1} \quad \text{und} \quad v_k \leq \max\{f_1, \dots, f_k\} \leq f_k \leq f$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Definition von v_j liefert auch die Relation $u_{n,j} \leq v_j$ für $n \leq j$. Daraus und den Eigenschaften der $u_{n,j}$ und v_k folgern wir die Abschätzungen

$$\begin{aligned} f_n &= \sup_{j \in \mathbb{N}} u_{n,j} = \sup_{j \geq n} u_{n,j} \leq \sup_{j \geq n} v_j = \sup_{j \in \mathbb{N}} v_j, \\ f &= \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \in \mathbb{N}} v_j = \sup_{j \in \mathbb{N}} v_j \leq f. \end{aligned}$$

Also genügt (v_k) den Bedingungen aus (2.4) für f . Definition 2.18, Lemma 2.20 und die Ungleichungen $v_k \leq f_k \leq f$ implizieren nun wie gefordert

$$\int_X f \, d\mu = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_X v_k \, d\mu \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_X f_k \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu. \quad \square$$

Laut der folgenden Beispiele ist die Konvergenzaussage des Theorems im Allgemeinen falsch für nicht-monotone oder fallende (f_n) . (Siehe aber die Übungen für eine korrekte Variante des Satzes von der monotonen Konvergenz.)

BEISPIEL 2.22. a) Seien $f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}$ oder $g_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n^2]}$ für $X = \mathbb{R}$. Hier konvergieren (f_n) und (g_n) sogar gleichmäßig gegen 0 für $n \rightarrow \infty$, aber ihre Integrale $\int_X f_n \, d\lambda_1 = n^{-1} \lambda_1([0, n]) = 1$ und $\int_X g_n \, d\lambda_1 = n^{-1} \lambda_1([0, n^2]) = n$ streben nicht gegen 0.

b) Sei $f_n = \mathbb{1}_{[n,\infty)}$ für $X = \mathbb{R}$. Dann gelten $f_n \rightarrow 0$ punktweise für $n \rightarrow \infty$ und $f_n \geq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\int_X f_n \, d\lambda_1 = \lambda_1([n, \infty)) = \infty \not\rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. \diamond

Der Satz von Levi impliziert die folgenden wichtigen Eigenschaften messbarer nichtnegativer Funktionen.

KOROLLAR 2.23. a) Gegeben seien \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbare Funktionen $f_j : X \rightarrow [0, \infty]$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{j=1}^{\infty} f_j : X \rightarrow [0, \infty]$ auch \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbar, und es gilt

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) \, d\mu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j(x) \, d\mu(x).$$

b) Sei $\omega : X \rightarrow [0, \infty]$ eine \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbare Funktion. Wir setzen

$$\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A(x) \omega(x) \, d\mu(x), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Dann ist ν ein Maß auf \mathcal{A} . (Hier heißt ω Gewicht oder Dichte.)

BEWEIS. a) Wir setzen $g_n = \sum_{j=1}^n f_j : X \rightarrow [0, \infty]$ für $n \in \mathbb{N}$. Diese Funktionen sind nach Satz 2.9 messbar und ihre Folge wächst gegen $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$. Theorem 2.21 und Lemma 2.20 liefern dann die Gleichungen

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_X f_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j \, d\mu.$$

b) Nach Lemma 2.20 c) gilt $\nu(\emptyset) = \int_X \mathbb{1}_{\emptyset} \omega \, d\mu = 0$. Sei die Familie $\{A_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ aus \mathcal{A} disjunkt. Wir setzen $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Die Eigenschaften charakteristischer Funktionen und Teil a) zeigen

$$\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A \omega \, d\mu = \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_j} \omega \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \mathbb{1}_{A_j} \omega \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j). \quad \square$$

Um später Integrale auf Teilmengen einschränken zu können, benötigen wir den folgenden einfachen Hilfssatz. Die Restriktion μ_Y eines Maßes μ wurde in Beispiel 1.13 definiert.

LEMMA 2.24. Sei $f : X \rightarrow [0, \infty]$ eine $\mathcal{A}\text{-}\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbare Funktion, Y eine nichtleere Menge in \mathcal{A} , und $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$ der Maßraum aus Beispiel 1.13. Dann folgen die $\mathcal{A}_Y\text{-}\overline{\mathcal{B}}_+$ -Messbarkeit der Einschränkung $f|_Y : Y \rightarrow [0, \infty]$ und die $\mathcal{A}\text{-}\overline{\mathcal{B}}_+$ -Messbarkeit des Produkts $\mathbb{1}_Y f : X \rightarrow [0, \infty]$. Weiter gilt die Gleichung

$$\int_Y f|_Y(x) \, d\mu_Y(x) = \int_X \mathbb{1}_Y(x) f(x) \, d\mu(x).$$

BEWEIS. Die Funktionen $\mathbb{1}_Y f$ und $f|_Y$ sind messbar nach Satz 2.9 bzw. Bemerkung 2.2. Sei $A \in \mathcal{A}$. Wir berechnen

$$\int_X \mathbb{1}_Y \mathbb{1}_A \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_{Y \cap A} \, d\mu = \mu(A \cap Y) = \int_Y (\mathbb{1}_A)|_Y \, d\mu_Y.$$

Lemma 2.17 liefert nun die geforderte Gleichung für einfache Funktionen. Wir wählen weiter f_n wie in (2.4) für f . Dann besitzen $(f_n)|_Y$ und $\mathbb{1}_Y f_n$ die Eigenschaften aus (2.4) für $f|_Y$ bzw. $\mathbb{1}_Y f$, sodass die Behauptung aus Definition 2.18 folgt. \square

Schritt C: $\overline{\mathbb{R}}$ -wertige Funktionen. Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}\text{-}\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbare Funktion. Dann sind nach Satz 2.9 ihre Positiv- und Negativteile $f_+, f_- : X \rightarrow [0, \infty]$ auch $\mathcal{A}\text{-}\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbar, sodass die beiden Integrale $\int f_{\pm} \, d\mu$ in $[0, \infty]$ erklärt sind. Wenn diese Werte endlich sind, kann man das Integral von f als ihre Differenz definieren. Daraus wird eine äußerst fruchtbare Integrationstheorie folgen.

DEFINITION 2.25. Seien (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}\text{-}\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbare Funktion. Die Funktion f heißt (Lebesgue-)integrierbar, wenn

$$\int_X f_+(x) \, d\mu(x) < \infty \quad \text{und} \quad \int_X f_-(x) \, d\mu(x) < \infty$$

gelten. Dann definiert man das (Lebesgue-)Integral durch die Gleichung

$$\int f \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu(x) = \int_X f(x) \mu(dx) := \int_X f_+(x) \, d\mu(x) - \int_X f_-(x) \, d\mu(x).$$

Hiervon sind $\mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}_1$ -messbare Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Spezialfall und man setzt

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist integrierbar}\}.$$

Man schreibt oft dx statt $d\lambda$ oder $d\lambda_m$. Man beachte, dass integrierbare Funktionen stets messbar sein müssen. Weiter ist für eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ die $\mathcal{A}\text{-}\overline{\mathcal{B}}_1$ -Messbarkeit äquivalent zur $\mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}_1$ -Messbarkeit, da $\mathcal{B}_1 \subseteq \overline{\mathcal{B}}_1$ gilt, bzw. $f^{-1}(\{-\infty, +\infty\})$ leer ist (vergleiche die Definition (2.2)). Wir betonen, dass eine $\mathcal{A}\text{-}\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ genau dann integrierbar ist, wenn ihr Integral $\int_X f \, d\mu$ ungleich ∞ ist.

Im folgenden wichtigen Satz charakterisieren wir die Integrierbarkeit einer messbaren Funktion f durch die Endlichkeit des Integrals $\int_X |f| \, d\mu$ mit nichtnegativem Integranden und zeigen ein Majorantenkriterium. Weiter hängt die obige Definition nicht von der Wahl der Zerlegung von f in zwei nichtnegative integrierbare Funktionen ab.

SATZ 2.26. Für eine \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbare Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- a) Die Funktion f ist integrierbar.
- b) Es gibt integrierbare Funktionen $u, v : X \rightarrow [0, \infty]$ mit $f = u - v$, wobei $u(x) = \infty = v(x)$ für kein $x \in X$ gilt.
- c) Es existiert eine integrierbare Funktion $g : X \rightarrow [0, \infty]$ mit $|f| \leq g$.
- d) Die \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_+$ -messbare Funktion $|f| : X \rightarrow [0, \infty]$ ist integrierbar, es gilt also $\int_X |f| \, d\mu < \infty$.

Es seien die Aussagen a)–d) erfüllt. Dann erhalten wir die Gleichung

$$\int_X f(x) \, d\mu(x) = \int_X u(x) \, d\mu(x) - \int_X v(x) \, d\mu(x).$$

Weiter folgt die Beziehung

$$\mathcal{L}^1(\mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar, } \int_X |f(x)| \, d\mu(x) < \infty \right\}.$$

BEWEIS. Wenn Eigenschaft a) erfüllt ist, so liefern Definition 2.25 und Formel (2.3) Teil b) mit $u = f_+$ und $v = f_-$.

Sei Aussage b) wahr. Dann folgt die Ungleichung $|f| \leq u + v =: g$ und g ist nach Lemma 2.20 d) integrierbar. Also ist c) gezeigt.

Eigenschaft c) impliziert d) wegen Lemma 2.20 d) und da $|f|$ gemäß Satz 2.9 messbar ist.

Es gelte Aussage d). Mittels der Relationen $0 \leq f_{\pm} \leq |f|$ ergibt sich die Integrierbarkeit von f_{\pm} wieder aus Lemma 2.20 d). Wir erhalten somit Teil a) wegen Definition 2.25.

Wir zeigen nun die Zusätze. Zunächst ist der Ausdruck für $\mathcal{L}^1(\mu)$ eine Konsequenz von Eigenschaft d). Aussage b) liefert ferner die Gleichung $f_+ - f_- = f = u - v$, wobei die nichtnegativen Funktionen u und v nicht an der selben Stelle gleich ∞ sind. Wenn $f_+(x)$ und $f_-(x)$ endlich sind, gilt dies auch für $f(x)$ und damit sind $u(x), v(x) < \infty$. Also folgt hier die Identität $f_+(x) + v(x) = u(x) + f_-(x)$. Sei nun etwa $f_-(x) = \infty$ für ein $x \in X$. Daraus schließen wir $f_+(x) = 0$ und $f(x) = -\infty$, sodass $v(x) = \infty$ und $u(x) < \infty$ sein müssen. Somit ist wieder $f_+(x) + v(x) = u(x) + f_-(x)$ bewiesen. Den Fall $f_+(x) = \infty$ behandelt man genauso. Aus der Formel $f_+ + v = u + f_-$ für nichtnegative Funktionen folgern wir mit Lemma 2.20 die Gleichung

$$\int_X f_+ \, d\mu + \int_X v \, d\mu = \int_X u \, d\mu + \int_X f_- \, d\mu$$

Da oben jeder Term nach Aussage a) bzw. b) endlich ist, implizieren eine Umformung und Definition 2.25 die geforderte Identität für $\int f \, d\mu$. \square

Mit der nächsten Folgerung sehen wir, dass bei integrierbaren Funktionen die Werte $\pm\infty$ ‘fast keine’ Rolle spielen, vergleiche Lemma 3.6.

KOROLLAR 2.27. Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gilt $\mu(\{|f| = \infty\}) = 0$.

BEWEIS. Da auch $|f|$ messbar ist, liegt das Urbild $A := \{|f| = \infty\}$ in \mathcal{A} . Weiter gilt die Ungleichung $n\mathbb{1}_A \leq |f|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Mit Satz 2.26 und Lemma 2.20 folgern wir die Abschätzung

$$\infty > c := \int_X |f| \, d\mu \geq \int_X n\mathbb{1}_A \, d\mu = n\mu(A)$$

und damit $0 \leq \mu(A) \leq c/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\mu(A) = 0$. \square

Zur Illustration bestimmen wir nun in zwei sehr einfachen Fällen den Raum der integrierbaren Funktionen und deren Integral. Substantielle Beispiele für das Lebesguemaß werden erst im nächsten Kapitel diskutiert.

BEISPIEL 2.28. Im Kontext von Beispiel 1.13 gelten die folgenden Aussagen.

a) Sei ζ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dann ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ genau dann bezüglich ζ integrierbar, wenn sie im Raum

$$\mathcal{L}^1(\zeta) = \left\{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| < \infty \right\} =: \ell^1$$

liegt. Für $f \in \ell^1$ gilt dann $\int_{\mathbb{N}} f \, d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$. Also umfasst unsere Theorie absolut konvergente Reihen.

BEWEIS. Zunächst sind Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ stets $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbar.

1) Sei zuerst $f = \sum_{j=1}^n y_j \mathbb{1}_{A_j}$ eine nichtnegative einfache Funktion auf \mathbb{N} in Normalform. Nach Definition ergeben sich die Gleichungen

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\zeta = \sum_{j=1}^n y_j \zeta(A_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k \in A_j} y_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k \in A_j} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k),$$

da die Mengen A_j disjunkt sind und y_j der Wert von f auf A_j ist.

2) Sei nun $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$. Wenn etwa $f(l) = \infty$ ist, dann folgt mit Lemma 2.20

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\zeta \geq \int_{\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{l\}} f \, d\zeta = \infty \zeta(\{l\}) = \infty = \sum_{k=1}^{\infty} f(k),$$

sodass hier Gleichheit herrscht. Im Falle $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ setzen wir $f_n = \mathbb{1}_{\{1, \dots, n\}} f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $n \in \mathbb{N}$. Diese Funktionen sind einfach, und es gelten $f_n \leq f_{n+1}$ und $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$. Mit Definition 2.18 und Schritt 1) erhalten wir

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Also ist das Integral von $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$ genau dann endlich, wenn f in ℓ^1 liegt.

3) Sei schließlich $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Nach Satz 2.26 ist f genau dann integrierbar, wenn $\int_{\mathbb{N}} |f| \, d\zeta$ endlich ist. Schritt 2) besagt, dass diese Eigenschaft äquivalent zu $|f| \in \ell^1$ und damit zu $f \in \ell^1$ ist. Da alle Summanden reell sind, folgt weiter

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\zeta = \int_{\mathbb{N}} f_+ \, d\zeta - \int_{\mathbb{N}} f_- \, d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} f_+(k) - \sum_{k=1}^{\infty} f_-(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k). \quad \square$$

b) Sei $\mu = \delta_x$ für ein $x \in X$ das Punktmaß auf $\mathcal{P}(X)$. Eine Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann bezüglich δ_x integrierbar, wenn $f(x)$ in \mathbb{R} liegt. In diesem Fall gilt $\int_X f d\delta_x = f(x)$. Also ist dieses Integral gleich der Punktauswertung in x . (Dies wird in einer Übung gezeigt.) \diamond

Das Integral besitzt die grundlegenden Eigenschaften, die man ausgehend von Analysis 2 erwarten kann. Allerdings deuten die letzten beiden Teilaussagen an, dass das Lebesgue-Integral viel flexibler ist.

SATZ 2.29. *Seien $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$. Nach Satz 2.9 liegt die Menge $X_0 := [(\{f = \infty\} \cap \{g = -\infty\}) \cup (\{f = -\infty\} \cap \{g = \infty\})]^c$ in \mathcal{A} . Weiter gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Sei $\emptyset \neq Y \in \mathcal{A}$. Dann sind die Funktionen $f|_Y : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\mathbb{1}_Y f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und genügen der Gleichung*

$$\int_Y f|_Y(x) d\mu_Y(x) = \int_X \mathbb{1}_Y(x) f(x) d\mu(x) =: \int_Y f(x) d\mu(x).$$

(Für $f|_Y$ verwendet man hier den Maßraum $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$, siehe Beispiel 1.13.)

b) *Die Funktionen $\alpha f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $f + g : X_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind integrierbar und erfüllen*

$$\begin{aligned} \int_X \alpha f(x) d\mu(x) &= \alpha \int_X f(x) d\mu(x), \\ \int_{X_0} (f(x) + g(x)) d\mu(x) &= \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X g(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Somit ist $\mathcal{L}^1(\mu)$ ein (reeller) Vektorraum und das Integral ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{L}^1(\mu)$ nach \mathbb{R} .

c) *Die Funktionen $\max\{f, g\} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\min\{f, g\} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind integrierbar.*

d) *Sei $f \leq g$. Dann gilt $\int_X f(x) d\mu(x) \leq \int_X g(x) d\mu(x)$. (Monotonie)*

e) *$|\int_X f(x) d\mu(x)| \leq \int_X |f(x)| d\mu(x)$.*

f) *Sei $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und beschränkt mit $\mu\{h \neq 0\} < \infty$. Dann ist h integrierbar mit*

$$\left| \int_X h(x) d\mu(x) \right| \leq \|h\|_\infty \mu(\{h \neq 0\}).$$

g) *Seien $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ und $h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbare Funktion. Dann ist $\mathbb{1}_A h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und es gilt $\int_A h d\mu = 0$.*

BEWEIS. a) Die Funktionen $\mathbb{1}_Y f$ und $f|_Y$ sind messbar nach Satz 2.9 bzw. Bemerkung 2.2. Da $|\mathbb{1}_Y f|$ von der laut Satz 2.26 integrierbaren Abbildung $|f|$ majorisiert wird, ist $\mathbb{1}_Y f$ gemäß dieses Satz ebenfalls integrabel. Weiter gelten offenbar die Gleichungen $(f|_Y)_\pm = (f_\pm)|_Y$ und $(\mathbb{1}_Y f)_\pm = \mathbb{1}_Y f_\pm$. Mittels Lemma 2.24 und Definition 2.25 schließen wir daraus

$$\int_Y (f|_Y)_\pm d\mu_Y = \int_Y (f_\pm)|_Y d\mu_Y = \int_X \mathbb{1}_Y f_\pm d\mu = \int_X (\mathbb{1}_Y f)_\pm d\mu < \infty.$$

Also ist $f|_Y : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, und die in a) behauptete Formel folgt leicht.

b) Die Definition des Integrals über Positiv- und Negativteil sowie die Funktionswerte $\pm\infty$ machen diesen Beweisteil aufwendig. Zunächst berechnen wir

$$(\alpha f)_\pm = \begin{cases} \alpha f_\pm, & \alpha \geq 0, \\ [(-\alpha)(-f)]_\pm = -\alpha f_\mp, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Diese Funktionen sind nach Satz 2.9 messbar, und f_\pm sind nach Voraussetzung integrierbar. Mittels der obigen Formel und Lemma 2.20 folgt die Integrierbarkeit von $(\alpha f)_\pm$. (Man beachte, dass $-\alpha > 0$ im Falle $\alpha < 0$ ist.) Definitionsgemäß ist dann auch die Abbildung αf integrierbar und ihr Integral ist durch

$$\begin{aligned} \int_X \alpha f \, d\mu &= \int_X (\alpha f)_+ \, d\mu - \int_X (\alpha f)_- \, d\mu \\ &= \begin{cases} \int_X \alpha f_+ \, d\mu - \int_X \alpha f_- \, d\mu, & \alpha \geq 0, \\ \int_X (-\alpha) f_- \, d\mu - \int_X (-\alpha) f_+ \, d\mu, & \alpha < 0, \end{cases} \\ &= \alpha \int_X f_+ \, d\mu - \alpha \int_X f_- \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu \end{aligned}$$

gegeben, wobei wir wieder Lemma 2.20 verwendet haben.

Wir untersuchen nun die Summe $f + g$. Die Funktionen $u := \mathbb{1}_{X_0}(f_+ + g_+)$ und $v := \mathbb{1}_{X_0}(f_- + g_-)$ sind gemäß Satz 2.9 messbar. Weiter erhalten wir $0 \leq u \leq f_+ + g_+$, wobei die rechte Seite wegen der Voraussetzung und Lemma 2.20 ein endliches Integral besitzt. Somit ist u integrierbar. Entsprechendes gilt für v . Wir erhalten die Gleichung $\mathbb{1}_{X_0}(f + g) = u - v$, da auf X_0 die Summe und die Differenz erklärt sind. Satz 2.26 zeigt nun die Integrierbarkeit von $\mathbb{1}_{X_0}(f + g)$.

Laut Korollar 2.27 hat X_0^c das Maß 0. Somit verschwinden die Integrale von $\mathbb{1}_{X_0^c} f_\pm$ und $\mathbb{1}_{X_0^c} g_\pm$ wegen Lemma 2.20 c). Indem wir ferner Behauptung a), Satz 2.26 und Lemma 2.20 benutzen, folgern wir

$$\begin{aligned} \int_{X_0} (f + g) \, d\mu &= \int_X \mathbb{1}_{X_0}(f + g) \, d\mu = \int_X u \, d\mu - \int_X v \, d\mu \\ &= \int_X \mathbb{1}_{X_0} f_+ \, d\mu - \int_X \mathbb{1}_{X_0} f_- \, d\mu + \int_X \mathbb{1}_{X_0} g_+ \, d\mu - \int_X \mathbb{1}_{X_0} g_- \, d\mu \\ &= \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu + \int_X g_+ \, d\mu - \int_X g_- \, d\mu \\ &= \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu. \end{aligned}$$

c) Die Funktionen $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ sind nach Satz 2.8 messbar. Weiter werden ihre Beträge durch die Summe $|f| + |g|$ majorisiert, die gemäß Satz 2.26 und Lemma 2.20 integrierbar ist. Also folgt Behauptung c) aus Satz 2.26.

d) Sei $f \leq g$. Dann erhalten wir die Ungleichungen $f_+ \leq g_+$ und $f_- = (-f)_+ \geq (-g)_+ = g_-$. Daraus ergibt sich mittels Lemma 2.20 die gewünschte Abschätzung

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu \leq \int_X g_+ \, d\mu - \int_X g_- \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

e) Wegen $\pm f \leq |f|$ liefern Teil b) und d) die Relation

$$\pm \int_X f \, d\mu = \int_X \pm f \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu$$

und somit Aussage e).

f) Die Behauptungen d) und e) impliziert auch f), da $|h| \leq \|h\|_\infty \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}}$ ist.

g) Aus Lemma 2.20 c) schließen wir die Gleichung

$$\int_X (\mathbb{1}_A h)_\pm \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_A h_\pm \, d\mu = 0,$$

woraus mit Definition 2.25 die letzte Aussage folgt. \square

Wir können nun in Lemma 2.16 die Positivitätsannahme entfernen.

BEISPIEL 2.30. Sei $f = \sum_{k=1}^l y_k \mathbb{1}_{A_k}$ mit $y_k \in \mathbb{R}$, $A_k \in \mathcal{A}$ und $\mu(A_k) < \infty$ für jedes $k \in \{1, \dots, l\}$. Dann sind die Funktionen $\mathbb{1}_{A_k}$ integrierbar mit Integral $\mu(A_k)$. Satz 2.29 b) impliziert nun die Integrierbarkeit von f und die Formel

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{k=1}^l y_k \mu(A_k). \quad \diamond$$

Wir zeigen abschließend unter anderem, dass für $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $\mu = \lambda_1$ das hier eingeführte Integral jenes aus Analysis 2 fortsetzt.

BEMERKUNG 2.31. a) Sei X die disjunkte Vereinigung zweier Mengen A und B in \mathcal{A} . Wenn $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar ist, liefert Satz 2.29 die Gleichungen

$$\int_X f \, d\mu = \int_X (\mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_B f) \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_A f \, d\mu + \int_X \mathbb{1}_B f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu. \quad (2.5)$$

Seien³ umgekehrt $g_1 : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $g_2 : B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Nach Beispiel 2.6 ist die Funktion

$$g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; \quad g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in A, \\ g_2(x), & x \in B, \end{cases}$$

messbar. Gleichung (2.5) gilt analog für $|g|$, sodass g wegen Satz 2.26 integrierbar ist. Nach dem ersten Schritt erfüllt auch g die Formel (2.5).

b) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig. Dann ist f nach Beispiel 2.6 messbar und nach Satz 2.29 f) integrierbar. Weiter stimmen das Riemann- und das Lebesgue-Integral von f überein. Insbesondere gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus Analysis 2 auch für das Lebesgue-Integral. Wir schreiben demgemäß meist

$$\int_a^b f \, dx \quad \text{statt} \quad \int_{[a,b]} f \, d\lambda_1,$$

wobei wir $\int_b^a dx = -\int_a^b dx$ setzen. Andererseits ist $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ Lebesgue-integrierbar, aber die Riemann-Summen zu $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ divergieren nach Bemerkung 1.7 aus Analysis 2.

³Dieses Argument wurde in der Vorlesung an derer Stelle besprochen.

BEWEIS. Wir zeigen noch die Übereinstimmung der beiden Integralbegriffe. Wegen Teil a) können wir uns dabei auf ein stetiges f einschränken. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Wir setzen $t_{j,n} = a + (b - a)j/n$ und

$$u_n = f(t_{1,n})\mathbb{1}_{[a,t_{1,n}]} + \sum_{j=2}^n f(t_{j,n})\mathbb{1}_{(t_{j-1,n},t_{j,n}]}$$

Nach Theorem 1.4 aus Analysis 2 gilt für das Riemann-Integral

$$\int_a^b f \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(t_{j,n}) \frac{b-a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} u_n \, d\lambda_1,$$

wobei wir auch Beispiel 2.30 verwendet haben. Da f gleichmäßig stetig ist, kann man die Konvergenz $\|u_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ zeigen. Satz 2.29 impliziert nun

$$\left| \int_{[a,b]} u_n \, d\lambda_1 - \int_{[a,b]} f \, d\lambda_1 \right| = \left| \int_{[a,b]} (u_n - f) \, d\lambda_1 \right| \leq (b-a)\|u_n - f\|_\infty \rightarrow 0,$$

woraus die Behauptung folgt. \square

c) Für $X = [1, \infty)$ ist die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x} \sin x$, uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar, da $\int_1^\infty |f| \, dx = \infty$ gilt. Siehe Beispiel 1.26 in Analysis 2, aber auch Bemerkung 3.15 unten. (Man kann freilich ein ‘uneigentliches Lebesgue-Integral’ analog zum Riemannfall einführen, welches die entsprechenden Eigenschaften hat.) \diamond

KAPITEL 3

Vertiefungen der Integrationstheorie

In diesem Kapitel diskutieren wir zuerst die Rolle von Menge mit Maß 0, bevor wir den wichtigsten Konvergenzsatz (von Lebesgue) zeigen. In der zweiten, längeren Hälfte entwickeln wir einen Teil der Theorie, mit der wir Integrale für λ_m manipulieren und berechnen können. Soweit nichts anderes gesagt wird, versehen wir in diesem Kapitel Teilmengen des \mathbb{R}^m und von \mathbb{R} mit der Borelschen σ -Algebra.

3.1. Nullmengen

In diesem Abschnitt bezeichnet (X, \mathcal{A}, μ) einen Maßraum. An vielen Stellen der Maß- und Integrationstheorie tritt die folgende Klasse von Mengen auf.

DEFINITION 3.1. *Eine Menge N aus \mathcal{A} mit $\mu(N) = 0$ heißt (μ) -Nullmenge.*

Wir diskutieren zuerst einige einfache Beispiele und Eigenschaften.

BEMERKUNG 3.2. a) Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} und die Cantor-Menge sind λ_1 -Nullmengen. Hyperebenen im \mathbb{R}^m , oder allgemeiner die Graphen stetiger Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ für abgeschlossene $D \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$, sind λ_m -Nullmengen. Siehe Beispiel 1.22 und die Übungen, in denen die Aussage zu Graphen noch verschärft werden wird.

b) Wenn $M \subseteq N$ in \mathcal{A} liegen und N eine μ -Nullmenge ist, dann ist auch M eine μ -Nullmenge, da $0 \leq \mu(M) \leq \mu(N)$ gilt. Wenn N_j für alle $j \in \mathbb{N}$ μ -Nullmengen sind, dann gilt dies auch für ihre Vereinigung $N = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j$, weil Satz 1.15 die Ungleichung $\mu(N) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(N_j)$ liefert. (Diese Eigenschaften verwenden wir im Folgenden ohne Kommentar.) Somit sind abzählbare Teilmengen des \mathbb{R}^m und auch $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}^{m-1}$ λ_m -Nullmengen. Überabzählbare Vereinigungen von Nullmengen können das Maß ∞ besitzen, wie das Beispiel $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ für $\mu = \lambda_1$ zeigt.

c) Im Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \zeta)$ ist die leere Menge \emptyset die einzige Nullmenge. Andererseits ist in $(X, \mathcal{P}(X), \delta_x)$ sogar $X \setminus \{x\}$ (aber nicht $\{x\}$) eine Nullmenge, wobei $x \in X$ fest gewählt ist. (Vergleiche Beispiel 1.13.)

d) Nach Theorem 1.26 ist eine Borelmenge A genau dann eine λ_m -Nullmenge, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ solche offene Intervalle I_n für $n \in \mathbb{N}$ gibt, dass A in $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ liegt und $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m(I_n) \leq \varepsilon$ gilt. Man kann die I_n auch als Würfel aus \mathcal{J}_m wählen.

BEWEIS. Für die letzte Behauptung gehen wir von den Intervallen I_n gemäß Theorem 1.26 aus. Wie im Beweis von Satz 1.18 findet man für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Intervall $I'_n \in \mathcal{J}_m$ mit Volumen kleiner gleich $2\lambda_m(I_n)$, das rationale Ecken hat und I_j enthält. Seien $I'_n = (a, b]$, die Brüche $b_k - a_k = p_k/q_k$ gekürzt, und q das kleinste

gemeinsame Vielfache der Nenner q_k . Dann kann man I'_n in disjunkte Würfel $W_1^n, \dots, W_{j_n}^n$ aus \mathcal{J}_m mit der Kantenlänge $1/q$ zerlegen. Nach Umbezeichnung genügen diese der Behauptung. \square

e) Eine λ_m -Nullmenge N besitzt keinen inneren Punkt, da sonst ein offener Würfel $W \neq \emptyset$ in N läge und $\lambda_m(W) > 0$ ist. Somit hat jede Borelmenge mit nichtleerem Inneren positives Lebesguemaß. (Siehe Definition 2.21 in Analysis 2.) \diamond

In Sinne der obigen Definition kann es Teilmengen einer Nullmenge geben, die nicht in \mathcal{A} liegen und damit selbst keine Nullmengen sind. Mittels der folgenden Konstruktion könnte man dieses Phänomen vermeiden, indem man die σ -Algebra einfach durch solche Teilmengen erweitert.

BEMERKUNG 3.3. Ein Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) heißt *vollständig*, wenn jede Teilmenge M einer μ -Nullmenge N in \mathcal{A} liegt und damit auch eine μ -Nullmenge ist. Für einen beliebigen Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) definiert man

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}} &:= \left\{ \tilde{A} = A \cup M \mid A \in \mathcal{A}, M \subseteq N \text{ für eine } \mu\text{-Nullmenge } N \right\}, \\ \tilde{\mu}(\tilde{A}) &:= \mu(A) \quad \text{für alle } \tilde{A} = A \cup M \text{ wie oben.} \end{aligned}$$

Nach Satz II.6.3 in [3] ist $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ ein vollständiger Maßraum, den man *Vervollständigung* von (X, \mathcal{A}, μ) nennt. Für $\mathcal{A} = \mathcal{B}_m$ und $\mu = \lambda_m$ heißt $\tilde{\mathcal{A}} =: \mathcal{L}_m$ die *Lebesguesche σ -Algebra*, und man schreibt λ_m statt $\tilde{\lambda}_m$. (Siehe eine Übungsaufgabe.) Satz II.6.4 in [3] impliziert, dass \mathcal{L}_m mit der σ -Algebra $\mathcal{A}(\lambda_m)$ im Maßfortsetzungssatz Theorem 1.19 übereinstimmt. Der Beweis von Satz 1.27 zeigt, dass die Vitali-Menge Ω auch nicht in \mathcal{L}_m liegt und somit $\mathcal{L}_m \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ ist. Weiter ist \mathcal{B}_m echt kleiner als \mathcal{L}_m gemäß Korollar II.8.6 in [3]. Folglich ist die identische Abbildung $x \mapsto x$ nicht \mathcal{B}_m - \mathcal{L}_m -messbar!

Wir verwenden im Folgenden die σ -Algebra \mathcal{L}_m und die Vollständigkeit von Maßräumen nicht, um die Aussagen und Beweise etwas zu vereinfachen. \diamond

Wir kommen nun zum wichtigsten Begriff im Kontext von Nullmengen.

DEFINITION 3.4. Eine Eigenschaft E besteht für (μ) -fast alle $x \in X$ oder (μ) -fast überall, wenn es eine solche μ -Nullmenge N gibt, dass E für alle $x \in X \setminus N$ gilt. Man schreibt hier oft auch f.a. oder f.ü..

Das nächste Beispiel zeigt, dass wir solche Eigenschaften schon kennen.

BEISPIEL 3.5. a) Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Nach Korollar 2.27 ist dann $\{|f| = \infty\}$ eine Nullmenge, also ist f fast überall reellwertig.

b) Wenn E f.ü. gilt, kann gleichwohl die Menge $\{x \in X \mid E \text{ gilt nicht für } x\}$ nicht in \mathcal{A} liegen. In der Tat gibt es gemäß des Beweises von Korollar II.8.6 in [3] eine Nullmenge $N \in \mathcal{B}_m$ mit einer nichtboreschen Teilmenge M . Dann gilt $\mathbb{1}_M(x) = 0$ fast überall, aber die Menge $M = \{x \in X \mid \mathbb{1}_M(x) = 1\}$ ist keine λ_m -Nullmenge.

c) Für die Menge M aus Teil b) ist die Nullfunktion $f = 0$ f.ü. gleich der Abbildung $\mathbb{1}_M$. Also erhält die Gleichheit fast überall im Allgemeinen nicht die Messbarkeit. (Lemma 3.8 zeigt, wie man mit dieser Schwierigkeit umgeht.) \diamond

Das folgende Lemma werden wir häufig verwenden. Es besagt, dass man Integrale auf Nullmengen beliebig (messbar) abändern kann, ohne ihren Wert zu verändern.

LEMMA 3.6. a) Seien $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $f = g$ f.ü.. Dann ist auch g integrierbar und es gilt $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$. Insbesondere kann man f durch die reellwertige Funktion $\tilde{f} = \mathbb{1}_{\{|f| < \infty\}} f$ ersetzen und erhält dabei $\int_X f \, d\mu = \int_X \tilde{f} \, d\mu$.

b) Wenn $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar sind und $f = g$ f.ü. ist, dann gilt auch $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.

BEWEIS. Wir zeigen nur Aussage a), die andere ergibt sich entsprechend. Gemäß Annahme existiert so eine μ -Nullmenge N , dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ gilt. Die Messbarkeit von g und Satz 2.29 g) implizieren, dass die Funktion $\mathbb{1}_N g$ das Integral 0 besitzt. Weiter ist auch $\mathbb{1}_{X \setminus N} g = \mathbb{1}_{X \setminus N} f$ nach Voraussetzung und wegen Satz 2.29 a) integrierbar. Daraus folgen laut Satz 2.29 b) die Integrierbarkeit von $g = \mathbb{1}_{X \setminus N} g + \mathbb{1}_N g$ und die Gleichung

$$\int_X g \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_{X \setminus N} g \, d\mu + \int_X \mathbb{1}_N g \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_{X \setminus N} f \, d\mu = \int_X f \, d\mu,$$

wobei wir f wie g behandelt haben. Korollar 2.27 liefert dann den Zusatz. \square

Der Begriff der Nullmenge führt auf eine nützliche Verallgemeinerung der punktweisen Konvergenz.

DEFINITION 3.7. Funktionen $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvergieren (μ) -fast überall für $n \rightarrow \infty$, wenn die Folge $(f_n(x))_n$ für μ -fast alle $x \in X$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert. Es gelte $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $n \rightarrow \infty$, für μ -fast alle $x \in X$. Dann sagt man, dass die Folge (f_n) (μ) -fast überall gegen f konvergiert und dass f der (μ) -fast überall Grenzwert ist.

Auch für messbare f_n muss der f.ü. Grenzwert weder eindeutig bestimmt noch messbar sein. Dies sieht man etwa anhand der Funktionen $f_n = 0$ auf \mathbb{R} , die f.ü. gegen $f = 0$, gegen $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ und gegen die nicht messbare Funktion $\mathbb{1}_M$ aus Beispiel 3.5 b) konvergieren, da $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ und $\mathbb{1}_M$ f.ü. gleich 0 sind. Immerhin ist nach dem nächsten Hilfssatz der f.ü. Limes messbarer Funktionen eindeutig und messbar ‘im f.ü. Sinne’.

LEMMA 3.8. Seien $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar und (f_n) konvergiere fast überall. Dann gibt es so eine messbare Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, dass (f_n) gegen f fast überall konvergiert. Jede andere Funktion $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, gegen die (f_n) fast überall konvergiert, ist fast überall gleich f .

BEWEIS. Die Voraussetzung liefert so eine μ -Nullmenge N , dass der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f_0(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert. Nach Satz 2.8 ist f_0 :

$X \setminus N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Die Nullfortsetzung

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; f(x) = \begin{cases} f_0(x), & x \in X \setminus N, \\ 0, & x \in N, \end{cases}$$

erbt die Messbarkeit von f_0 laut Beispiel 2.6. Ferner konvergiert (f_n) f.ü. gegen f .

Weiter gibt es eine solche μ -Nullmenge N' , dass $f_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ und alle $x \in X \setminus N'$ gegen $g(x)$ strebt. Somit sind $f(x)$ und $g(x)$ für jedes x außerhalb der Nullmenge $N \cup N'$ gleich. \square

Mit den obigen Begriffen erhalten wir die folgende ‘fast überall’ Variante des Satzes von der monotonen Konvergenz. Die Beweismethoden werden oft verwendet.

BEMERKUNG 3.9. Seien $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte die Ungleichung $f_n \leq f_{n+1}$ f.ü. Dann gibt es so eine messbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$, dass (f_n) f.ü. gegen f konvergiert und $\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$ gilt.

BEWEIS. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es so eine μ -Nullmenge N_n , dass die Ungleichung $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in X \setminus N_n$ gilt. Dann ist auch die Vereinigung $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ eine μ -Nullmenge. Wir setzen $\tilde{f}_n = \mathbb{1}_{X \setminus N} f$ für $n \in \mathbb{N}$. Jede dieser Funktionen ist nach Satz 2.9 messbar, und sie ist f.ü. gleich f_n . Weiter wächst die Folge (\tilde{f}_n) punktweise. Nach Levis Theorem 2.21 ist die Abbildung $f := \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{f}_n$ messbar und erfüllt $f_n \rightarrow f$ f.ü. für $n \rightarrow \infty$, sowie

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \tilde{f}_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu,$$

wobei wir auch Lemma 3.6 verwendet haben. \square

3.2. Der Lebesguesche Konvergenzsatz

In diesem Abschnitt sei die Menge X stets mit einer σ -Algebra \mathcal{A} und einem Maß μ versehen, soweit nichts anderes gesagt wird. Wir zeigen hier einige der grundlegenden Grenzwertsätze, mit denen man Limiten und das Integral unter geeigneten Voraussetzungen vertauschen kann.

Unser Zugang beruht auf dem folgenden *Lemma von Fatou* (1906), das häufig zum Nachweis der Integrierbarkeit herangezogen wird, vergleiche etwa den Beweis von Theorem 5.5. In einer Übung findet man eine Variante für den Limes superior.

THEOREM 3.10. *Seien $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar. Dann gilt*

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Speziell konvergiere (f_n) f.ü. gegen ein messbares $f : X \rightarrow [0, \infty]$. Dann folgt

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu.$$

BEWEIS. Wir setzen $g_j = \inf_{n \geq j} f_n$ für $j \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.8 sind alle diese Funktionen messbar, und sie erfüllen die Ungleichung $g_j \leq g_{j+1}$. Weiter ist das Supremum $\sup_{j \in \mathbb{N}} g_j$ gerade der Limes inferior der Folge (f_n) , der nach Satz 2.8 auch messbar ist. Ferner gilt die Abschätzung $g_j \leq f_n$ für alle $n \geq j$, sodass aus Lemma 2.20 die Ungleichung

$$\int_X g_j \, d\mu \leq \inf_{n \geq j} \int_X f_n \, d\mu$$

für jedes $j \in \mathbb{N}$ folgt. Levis Theorem 2.21 impliziert nun

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \int_X \sup_{j \in \mathbb{N}} g_j \, d\mu = \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_X g_j \, d\mu \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq j} \int_X f_n \, d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Im f.ü. konvergenten Fall ist der Limes inferior der Folge (f_n) f.ü. gleich ihrem Limes, sodass sich der zweite Teil mittels Lemma 3.6 ergibt. \square

Wir geben ein drastisches Beispiel mit strikter Ungleichung im Satz von Fatou.

BEISPIEL 3.11. Sei $f_n = \mathbb{1}_{[n, \infty)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gelten $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dx = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \rightarrow 0 = f$ für $n \rightarrow \infty$, wobei $\int_{\mathbb{R}} f \, dx = 0$ ist. \diamond

Der folgende Satz von der *majorisierten Konvergenz von Lebesgue* (1910) ist vielleicht das wichtigste Resultat in der Integrationstheorie. Für eine Folge (f_n) mit punktwisen Grenzwert f erlaubt es eine **von n unabhängige** Majorante g , den Grenzwert in n mit dem Integral zu vertauschen.

THEOREM 3.12. Seien (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, die Funktionen $f, f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$ und $g : X \rightarrow [0, \infty]$ integrierbar. Weiter konvergiere (f_n) in $\overline{\mathbb{R}}$ fast überall für $n \rightarrow \infty$ gegen f und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte $|f_n| \leq g$ f.ü.. Dann sind f und f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ integrierbar und wir erhalten die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu, \quad \text{genauer:}$$

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_{X \setminus N} |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

wobei $N := \{|f| = \infty\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{|f_n| = \infty\}$ eine Nullmenge ist.

Wir formulieren noch eine vereinfachte (aber oft ausreichende) Version. Seien $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $g : X \rightarrow [0, \infty]$ integrierbar, $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \rightarrow f$ punktwise in \mathbb{R} für $n \rightarrow \infty$. (Also ist f nach Satz 2.8 messbar.) Dann sind f_n und f integrierbar und erfüllen

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

In diesem Spezialfall besteht die Beweisidee darin, dass die Konvergenz $|f| + g - |f - f_n| \rightarrow |f| + g$ und Fatou eine Ungleichung mit $-f|f - f_n| \, d\mu$ auf der rechten Seite liefert, in der sich die anderen Terme wegekürzen. Ähnlich hatten wir z.B. in Satz 1.15 d) mit Komplementbildungen argumentiert.

BEWEIS. 1) Wie im Beweis der Bemerkung 3.9 finden wir eine solche Nullmenge N_1 , dass für alle $x \in X \setminus N_1$ und $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|f_n(x)| \leq g(x)$ gilt. Weiter gibt es nach Voraussetzung so eine Nullmenge N_2 , dass $(f_n(x))_n$ für alle $x \in X \setminus N_2$ in $\overline{\mathbb{R}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wir erhalten also $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in X \setminus N_3$ und die Nullmenge $N_3 := N_1 \cup N_2$. Wir setzen nun $\tilde{g} := g + \infty \mathbb{1}_{N_3}$. Diese Abbildung ist nach Satz 2.29 auch integrierbar und majorisiert $|f|$ und $|f_n|$ punktweise für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da alle Funktionen f und f_n messbar sind, liefert Satz 2.26 ihre Integrierbarkeit. Insbesondere ist N eine Nullmenge gemäß Korollar 2.27.

2) Wir setzen nun $\varphi_n = |f| + \tilde{g} - \mathbb{1}_{X \setminus N} |f - f_n|$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Schritt 1) und Satz 2.29 sind diese Funktionen integrierbar und wegen $\mathbb{1}_{X \setminus N} |f - f_n| \leq |f| + \tilde{g}$ auch nichtnegativ. Für $x \in X \setminus N_2$ und $n \rightarrow \infty$ strebt $\varphi_n(x)$ gegen $|f(x)| + \tilde{g}(x)$. Fatous Theorem 3.10 und Satz 2.29 implizieren nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_X (|f| + \tilde{g}) \, d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n \, d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X (|f| + \tilde{g}) \, d\mu - \int_{X \setminus N} |f - f_n| \, d\mu \right) \\ &= \int_X (|f| + \tilde{g}) \, d\mu - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{X \setminus N} |f - f_n| \, d\mu. \end{aligned}$$

Da das Integral von $|f| + \tilde{g}$ endlich ist, folgt wie gefordert

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{X \setminus N} |f - f_n| \, d\mu \leq 0, \quad \text{also} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \setminus N} |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

Die anderen Behauptungen erhalten wir nun via Lemma 3.6 und Satz 2.29 durch

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| = \left| \int_{X \setminus N} f_n \, d\mu - \int_{X \setminus N} f \, d\mu \right| \leq \int_{X \setminus N} |f - f_n| \, d\mu. \quad \square$$

In den folgenden Beispielen diskutieren wir typische Majoranten und zeigen, dass man auf die Majorisierungsannahme im Lebesgueschen Satz nicht verzichten kann.

BEISPIEL 3.13. a) Wenn $\mu(X) < \infty$ ist und es so eine Konstante $M \geq 0$ gibt, dass $|f_n(x)| \leq M$ für alle $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt, kann in Theorem 3.12 die integrierbare Majorante $g = M \mathbb{1}_X$ gewählt werden. (Verwende Satz 2.29 f.)

b) Die Funktionen $f_n : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $f_n(x) = x^{-\frac{3}{2}} \sin(\frac{x}{n})$, streben für $n \rightarrow \infty$ punktweise gegen $f(x) = x^{-\frac{3}{2}} \sin 0 = 0$. Weiter gilt $|f_n(x)| \leq x^{-\frac{3}{2}} =: g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq 1$. Nach Beispiel 1.24 in Analysis 2 und unserer Bemerkung 3.15 ist g integrierbar. Gemäß Theorem 3.12 strebt dann $\int_1^\infty f_n(x) \, dx$ gegen 0 für $n \rightarrow \infty$.

c) Ohne die integrierbare Majorante g kann die Aussage des Satzes von Lebesgue falsch sein, wie die folgenden Beispiele für λ_1 auf \mathbb{R} zeigen, vergleiche Abbildung 3.1 und Beispiel 2.22.

1) Die Funktionen $f_n = n \mathbb{1}_{(0,1/n)}$ und $g_n = n^2 \mathbb{1}_{(0,1/n)}$ konvergieren punktweise gegen $0 = f$ für $n \rightarrow \infty$. Wir haben jedoch $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dx = 1$, $\int_{\mathbb{R}} g_n \, dx = n$, sowie $\int_{\mathbb{R}} f \, dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Kandidaten für Majoranten wären hier die nicht-integrierbaren $g(x) = x^{-1}$ oder $g(x) = x^{-2}$.)

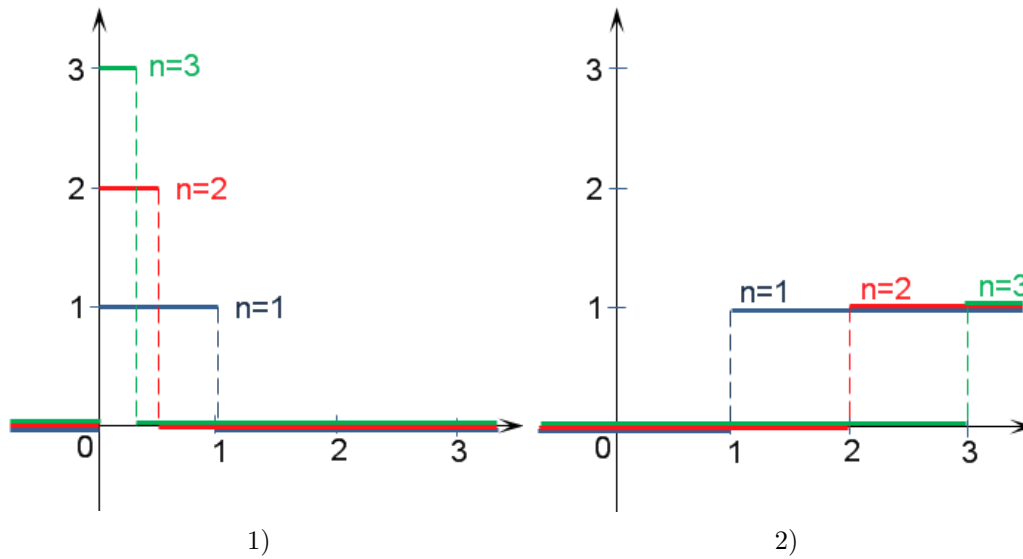


ABBILDUNG 3.1. Die Funktionen f_n in Beispiel 3.13 c)

2) Auch die Abbildungen $f_n = \mathbb{1}_{[n,\infty)}$ streben punktweise gegen 0, aber es gilt sogar $\int_{\mathbb{R}} f_n dx = \infty$. (Hier hätte man etwa $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$.)

d) Theoreme 2.21 und 3.12 sind für das Riemann-Integral im Allgemeinen sinnlos. Dazu betrachte man die Menge $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_1, q_2, \dots\}$ und die messbaren Funktionen $f_n = \mathbb{1}_{\{q_1, \dots, q_n\}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Deren Riemann-Integral stimmt nach Bemerkung 2.31 mit ihrem Lebesgue-Integral für λ_1 überein und ist gleich 0. Weiter gelten die Ungleichungen $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \mathbb{1}_{[0,1]}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $\mathbb{1}_{[0,1]}$ integrierbar ist. Natürlich konvergieren die Integrale der Funktionen f_n gegen das Lebesgue-Integral ihres punktweisen Grenzwertes $\mathbb{1}_A$ (es ist gleich 0). Aber die Riemannschen Summen von $\mathbb{1}_A$ divergieren nach Bemerkung 1.7 in Analysis 2. \diamond

Das nächste Resultat ergänzt Korollar 2.23 im Falle \mathbb{R} -wertiger Funktionen.

KOROLLAR 3.14. a) Seien $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : X \rightarrow [0, \infty]$ integrierbar für jedes $j \in \mathbb{N}$. Für eine μ -Nullmenge N und jedes $x \in X \setminus N$ konvergiere $s_n(x) := \sum_{j=1}^n f_j(x)$ für $n \rightarrow \infty$ in $\overline{\mathbb{R}}$ und sei $|s_n(x)| \leq g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x), & x \in X \setminus N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Dann ist die Funktionenreihe $\sum_{j=1}^{\infty} f_j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und wir erhalten

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j d\mu.$$

b) Seien $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, $X = \dot{\bigcup}_{j \in \mathbb{N}} A_j$ für disjunkte Mengen $A_j \in \mathcal{A}$, sowie $B_n \uparrow X$ für Mengen B_n in \mathcal{A} mit $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten die Gleichungen

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} f \, d\mu.$$

BEWEIS. a) Wegen Beispiel 2.10 ist die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ auf $X \setminus N$ messbar und damit auch ihre Nullfortsetzung auf X , siehe Beispiel 2.6. Da die Funktionen s_n f.ü. gegen die Reihe streben und die Ungleichung $|s_n| \leq g$ fast überall und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, liefert Lebesgues Theorem 3.12 die Integrierbarkeit der Reihe und

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_X f_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j \, d\mu,$$

wobei wir auch Satz 2.29 verwendet haben.

b) Die Menge $N = \{|f| = \infty\}$ hat nach Korollar 2.27 das Maß 0. Wir setzen $f_j = \mathbb{1}_{A_j \setminus N} f$ für $j \in \mathbb{N}$. Diese Funktionen sind nach Voraussetzung und Satz 2.29 integrierbar. Für alle $x \in X \setminus N$ konvergieren die Summen $s_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $f(x)$, und es gilt $|s_n(x)| \leq |f(x)|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen mit Lemma 3.6 impliziert Schritt a) die Gleichungen

$$\int_X f \, d\mu = \int_{X \setminus N} f \, d\mu = \int_{X \setminus N} \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{X \setminus N} f_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f \, d\mu.$$

Der zweite Aussage in b) folgt direkt aus Theorem 3.12, da $\mathbb{1}_{B_n} f$ punktweise gegen f konvergiert und $|\mathbb{1}_{B_n} f| \leq |f|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. \square

Wir ergänzen nun Bemerkung 2.31 im Hinblick auf den Zusammenhang zum uneigentlichen Riemann-Integral.

BEMERKUNG 3.15. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig auf allen Teilintervallen $[a, b] \subseteq I$. (Gemäß der Beispiele 2.6 d) und 2.10 c) ist f messbar.) Wenn die Funktion f für λ_1 integrierbar ist, dann existiert ihr uneigentliches Riemann-Integral und stimmt mit dem Lebesgue-Integral überein. (Wir verwenden für dieses auch die Notation aus Abschnitt 1.3 in Analysis 2.) Wenn das uneigentliche Riemann-Integral von $|f|$ existiert, dann ist f integrierbar für λ_1 .

BEWEIS. Wir zeigen die Aussagen nur für $I = [a, b)$ mit $b \in (a, \infty]$ und $a \in \mathbb{R}$. Wir wählen $b_n \in I$ mit $b_n \rightarrow b$ für $n \rightarrow \infty$. Sei zuerst f Lebesgue-integrierbar. Nach Bemerkung 2.31 stimmen die beiden Integrale von f auf $[a, b_n]$ überein. Weiter konvergieren sie gegen $J = \int_I f \, d\lambda_1$ laut Korollar 3.14 b). Definitionsgemäß existiert dann das uneigentliche Riemann-Integral auf I und ist gleich J .

Umgekehrt besitze $|f|$ das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^b |f| \, dx =: J' < \infty$. Dann haben die Integrale $\int_a^{b_n} |f| \, dx$ den Grenzwert J' . Andererseits streben diese nach Theorem 2.21 (siehe eine Übung) auch gegen das Lebesgue-Integral von $|f|$, sodass dieses den endlichen Wert J' besitzt. Also ist f Lebesgue-integrierbar. \square

Wir behandeln nun Funktionen f , die in x integriert werden und noch von einer weiteren Variablen t abhängen. Um die Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit der Integrale bezüglich t zu zeigen, nehmen wir an, dass f in t stetig bzw. differenzierbar ist. Für die Anwendung des Satzes von Lebesgue ist die entscheidende Bedingung aber die Existenz einer **von t unabhängigen** Majorante g . Man kann in Anwendungen der Theoreme M bzw. U oft als ‘kleine’ Umgebung eines Punktes t_0 wählen. Wir beginnen mit dem *Stetigkeitssatz*.

THEOREM 3.16. *Seien M ein metrischer Raum, $t_0 \in M$, (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $f : M \times X \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die folgenden Eigenschaften.*

- a) *Für jedes $t \in M$ ist die Funktion $f(t, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(t, x)$, messbar.*
- b) *Es gibt ein integrierbares $g : X \rightarrow [0, \infty]$ und solche μ -Nullmengen N_t für jedes $t \in M$, dass $|f(t, x)| \leq g(x)$ für alle $t \in M$ und alle $x \in X \setminus N_t$ gilt.*
- c) *Es gibt so eine μ -Nullmenge N , dass die Funktion $f(\cdot, x) : M \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto f(t, x)$, für jedes $x \in X \setminus N$ bei t_0 stetig ist.*

Dann ist $f(t, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(t, x)$, für jedes feste $t \in M$ integrabel und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_X f(t, x) d\mu(x) = \int_X f(t_0, x) d\mu(x).$$

BEWEIS. Wegen Satz 2.29 ist auch $\tilde{g}_t := \mathbb{1}_{X \setminus N_t} g + \infty \mathbb{1}_{N_t}$ integrierbar. Nach Voraussetzung b) gilt $|f(t, \cdot)| \leq \tilde{g}_t$, sodass Satz 2.26 die Integrierbarkeit von $f(t, \cdot)$ liefert. Wir betrachten eine Folge (t_n) in M mit Grenzwert t_0 . Wir definieren die Nullmenge $N' = N \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_{t_n}$ und die Funktionen $\varphi_n : X \rightarrow \mathbb{R}; \varphi_n(x) = f(t_n, x)$, für $n \in \mathbb{N}$. Sei $x \in X \setminus N'$. Nach Voraussetzung strebt dann $\varphi_n(x)$ gegen $f(t_0, x)$ für $n \rightarrow \infty$ und ist durch $|\varphi_n(x)| \leq g(x)$ majorisiert. Lebesgues Theorem 3.12 liefert dann die geforderte Konvergenz. \square

Man beachte, dass man im Beweis nur abzählbar viele der eventuell überabzählbar vielen Nullmengen in Voraussetzung b) benötigt. Wir zeigen nun die Stetigkeit des Integrals in der Integrationsgrenze als Folgerung des Stetigkeitssatzes, wobei die Ausnahmemengen vom Maß 0 von Nutzen sind.

KOROLLAR 3.17. *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in \bar{I}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar für λ_1 . Setze $f(x) = 0$ für $x \in \bar{I} \setminus I$. Dann ist die Funktion $F : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}; F(t) = \int_a^t f(x) dx$, stetig und es gilt $F(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow a$.*

BEWEIS. Nach Bemerkung 2.31 ist f auf \bar{I} integrierbar. Wir setzen $\tilde{\mathbb{I}}_{[a,t]} = \mathbb{1}_{[a,t]}$ für $t \geq a$ und $\tilde{\mathbb{I}}_{[a,t]} = -\mathbb{1}_{[t,a]}$ für $t < a$, was auf den Ausdruck $F(t) = \int_{\bar{I}} \tilde{\mathbb{I}}_{[a,t]}(x) f(x) dx$ für $t \in \bar{I}$ führt. Dann gelten $|\tilde{\mathbb{I}}_{[a,t]}(x) f(x)| \leq |f(x)|$ für alle $t, x \in \bar{I}$ und

$$\tilde{\mathbb{I}}_{[a,t]}(x) f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \pm f(x), & x \text{ zwischen } a \text{ und } t \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\} \longrightarrow \tilde{\mathbb{I}}_{[a,t_0]}(x) f(x)$$

für $t \rightarrow t_0$ und alle $x \in \bar{I} \setminus \{t_0\}$. Also sind die Voraussetzungen von Theorem 3.16 mit $N = \{t_0\}$ und $N_t = \emptyset$ erfüllt, und das Theorem zeigt die erste Behauptung. Die zweite folgt aus $\mathbb{1}_{[a,a]}(x) = 0$ für f.a. $x \in \bar{I}$. \square

Die Stärke des folgenden *Differentiationssatz* beruht darin, dass man eine Majorante für die oft leicht zu berechnende Ableitung fordert.¹

THEOREM 3.18. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $k \in \{1, \dots, m\}$, (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $f : U \times X \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die folgenden Eigenschaften.*

- Für jedes $t \in U$ ist die Funktion $f(t, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(t, x)$, integrierbar.
- Für alle $t \in U$ und $x \in X$ existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial t_k} f(t, x)$ in \mathbb{R} .
- Es gibt eine μ -Nullmenge N und ein integrierbares $g : X \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t_k}(t, x) \right| \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in X \setminus N \text{ und } t \in U.$$

Für jedes $t \in U$ ist dann die Abbildung $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t_k} f(t, x)$ auf X integrierbar und es existiert die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t_k} \int_X f(t, x) d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t_k}(t, x) d\mu(x).$$

BEWEIS. Sei $t_0 \in U$ fest, aber beliebig gewählt. Dann gibt es einen Radius $r > 0$ mit $\bar{B}(t_0, r) \subseteq U$. Wir betrachten Abstände $\tau_n \in (-r, r) \setminus \{0\}$ mit $\tau_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und Punkte $t_n := t_0 + \tau_n e_k \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Funktionen

$$\varphi_n : X \rightarrow \mathbb{R}; \varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_n} (f(t_n, x) - f(t_0, x)), & x \in X \setminus N, \\ 0, & x \in N, \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann strebt die Folge $(\varphi_n(x))_n$ für jedes $x \in X \setminus N$ gegen die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t_k}(t_0, x)$. Weiter liefert der Mittelwertsatz 5.21 aus Analysis 1 für alle $x \in X \setminus N$ und $n \in \mathbb{N}$ reelle Zahlen $\sigma_n(x)$ mit $|\sigma_n(x)| \leq |\tau_n|$ und

$$|\varphi_n(x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial t_k}(t_0 + \sigma_n(x)e_k, x) \right| \leq g(x),$$

wobei die Annahme c) einging. Gemäß Lebesgues Theorem 3.12 ist nun die Funktion $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t_k}(t_0, x)$ auf X integrierbar und auch mittels Satz 2.29 folgt

$$\begin{aligned} \int_X \frac{\partial f}{\partial t_k}(t_0, x) d\mu(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_n} \left[\int_X f(t_n, x) d\mu(x) - \int_X f(t_0, x) d\mu(x) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t_k} \int_X f(t_0, x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Dabei erhält man insbesondere die Existenz der letzten partiellen Ableitung. \square

¹Gegenüber der Vorlesung wurde Voraussetzung b) etwas verstärkt.

Als typische Anwendung berechnen wir die Ableitung der *Laplace-Transformierten* \hat{f} einer Funktion f . Man beachte, diese Ableitung durch die Transformierte der Funktion $x \mapsto -xf(x)$ gegeben ist. Diese Transformation und ihre Rechenregeln spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der Differentialgleichungen. Im Beweis muss man die Menge U aus dem obigen Theorem geeignet wählen.

BEISPIEL 3.19. Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Dann existiert für jedes $t > 0$ die *Laplace-Transformierte*

$$\hat{f}(t) := \int_0^\infty e^{-tx} f(x) dx,$$

und sie ist differenzierbar mit der Ableitung

$$\hat{f}'(t) = - \int_0^\infty e^{-tx} x f(x) dx \quad \text{für } t > 0.$$

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt und $t \in U := (\varepsilon, \infty)$. Für alle $x \geq 0$ erhalten wir dann die t -unabhängige Majoranten

$$|e^{-tx} f(x)| \leq e^{-\varepsilon x} |f(x)| \leq \|f\|_\infty e^{-\varepsilon x} =: g_1(x),$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (e^{-tx} f(x)) \right| = |-x e^{-tx} f(x)| \leq x e^{-\varepsilon x/2} e^{-\varepsilon x/2} |f(x)| \leq c_\varepsilon \|f\|_\infty e^{-\varepsilon x/2} =: g_2(x),$$

wobei c_ε das Maximum der Funktion $x \mapsto x e^{-\varepsilon x/2}$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ist, vergleiche Beispiel 5.20 in Analysis 1. Die Integrierbarkeit von g_1 und g_2 auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ergibt sich wie in Beispiel 1.24 aus Analysis 2 in Verbindung mit Bemerkung 3.15 oben. Also ist $x \mapsto e^{-tx} f(x)$ integrierbar nach Satz 2.26. Theorem 3.18 liefert dann für $t > \varepsilon$ und somit für alle $t > 0$ die Behauptung. \square

3.3. Iterierte Integrale

In diesem Abschnitt betrachten wir stets das Lebesguemaß und die Borelsche σ -Algebra auf Teilmengen des \mathbb{R}^d . Wir schreiben $z \in \mathbb{R}^m$ als $z = (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, wobei $k + l = m$ ist. Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar bzw. messbar und nichtnegativ. Wir wollen im Folgenden das Integral auf dem \mathbb{R}^m als Hintereinanderausführung von Integralen auf \mathbb{R}^k und auf \mathbb{R}^l darstellen, indem wir die Gleichungen

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx \right) dy \quad (3.1)$$

zeigen. Iterativ erhält man eindimensionale, von Parametern abhängige Integrale, die man unter Umständen mittels des Hauptsatzes aus Analysis 2 berechnen kann. Allerdings stellen sich hierbei die folgenden Fragen.

- 1) Sind die Funktionen $y \mapsto f(x, y)$ bzw. $x \mapsto f(x, y)$ messbar und integrierbar?
- 2) Sind die Funktionen $x \mapsto \int f(x, y) dy$ bzw. $y \mapsto \int f(x, y) dx$ messbar und integrierbar?
- 3) Gelten die beiden Identitäten in (3.1)?

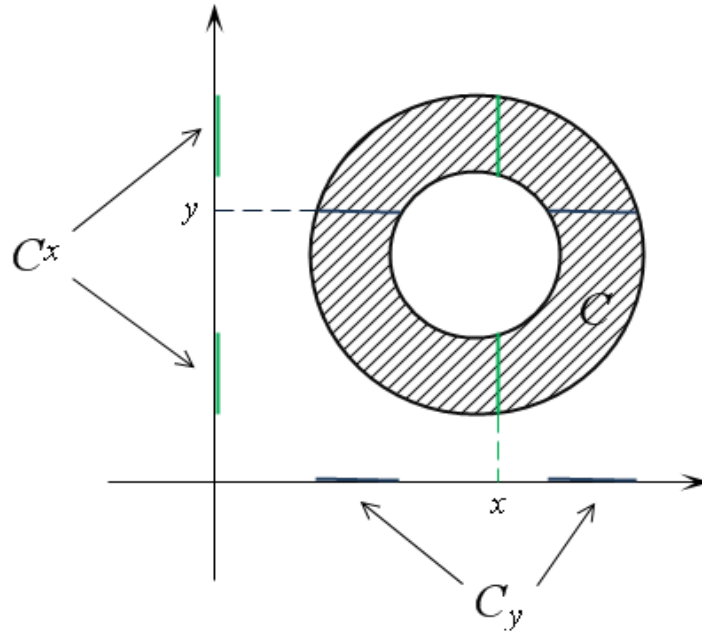


ABBILDUNG 3.2. Schnitte eines Kreisringes

Um diese Schwierigkeiten zu behandeln, definieren wir die Abbildungen

$$\begin{aligned}
 p_1 : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^k; & p_1(x, y) &= x, & p_2 : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^l; & p_2(x, y) &= y, \\
 j_y : \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^m; & j_y(x) &= (x, y) & \text{für jedes feste } y &\in \mathbb{R}^l, \\
 j^x : \mathbb{R}^l &\rightarrow \mathbb{R}^m; & j^x(y) &= (x, y) & \text{für jedes feste } x &\in \mathbb{R}^k.
 \end{aligned}$$

Diese Funktionen sind stetig, also messbar. Daraus folgt das erste Hilfsresultat.

LEMMA 3.20. Seien A in \mathcal{B}_k und B in \mathcal{B}_l enthalten. Dann liegt $A \times B$ in \mathcal{B}_m .

BEWEIS. Die Urbilder $A \times \mathbb{R}^l = p_1^{-1}(A)$ und $\mathbb{R}^k \times B = p_2^{-1}(B)$ liegen in \mathcal{B}_m , und damit auch ihr Durchschnitt $A \times B = (A \times \mathbb{R}^l) \cap (\mathbb{R}^k \times B)$. \square

Weiter erklären wir für $C \subseteq \mathbb{R}^m$ die *Schnitte*,

$$\begin{aligned}
 C_y &= \{x \in \mathbb{R}^k \mid (x, y) \in C\} & \text{für jedes feste } y &\in \mathbb{R}^l, \\
 C^x &= \{y \in \mathbb{R}^l \mid (x, y) \in C\} & \text{für jedes feste } x &\in \mathbb{R}^k,
 \end{aligned}$$

vergleiche Abbildung 3.2. Dann ergeben sich leicht die Aussagen

$$\text{für } A \subseteq \mathbb{R}^k, B \subseteq \mathbb{R}^l \text{ und } C = A \times B \text{ gilt } C^x = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \emptyset, & x \in \mathbb{R}^k \setminus A; \end{cases} \quad (3.2)$$

$$C_y = (j_y)^{-1}(C), \quad C^x = (j^x)^{-1}(C) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^l \text{ und } C \subseteq \mathbb{R}^m. \quad (3.3)$$

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir ferner ihre *Schnittfunktionen*

$$\begin{aligned} f_y &= f \circ j_y : \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; & f_y(x) &= f(x, y) & \text{für jedes feste } y \in \mathbb{R}^l, \\ f^x &= f \circ j^x : \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; & f^x(y) &= f(x, y) & \text{für jedes feste } x \in \mathbb{R}^k. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die nächsten Hilfssätze liefern erste Messbarkeitsaussagen für Formel (3.1).

LEMMA 3.21. *Seien $C \in \mathcal{B}_m$, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^l$. Dann liegen die Mengen C_y in \mathcal{B}_k und C^x in \mathcal{B}_l , und die Funktionen $f_y : \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $f^x : \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind messbar.*

BEWEIS. Da die Abbildungen j_y und j^x messbar sind, folgen die Behauptungen aus den Formeln (3.3) bzw. der Definition (3.4). \square

Für $C \in \mathcal{B}_m$ können wir demnach die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \varphi_C(x) &:= \lambda_l(C^x) = \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_{C^x} d\lambda_l = \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_C(x, y) dy & \text{für jedes feste } x \in \mathbb{R}^k, \\ \psi_C(y) &:= \lambda_k(C_y) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_{C_y} d\lambda_k = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_C(x, y) dx & \text{für jedes feste } y \in \mathbb{R}^l. \end{aligned} \quad (3.5)$$

eingeführen, wobei wir die Gleichungen $\mathbb{1}_{C^x}(y) = \mathbb{1}_C(x, y) = \mathbb{1}_{C_y}(x)$ verwenden. Erstaunlicherweise ist der Nachweis der Messbarkeit der Funktionen φ_C und ψ_C der anspruchsvollste Schritt in diesem Abschnitt, wobei die Maschinerie des Beweises des Maßeindeutigkeitssatzes Theorem 1.20 eingeht.

LEMMA 3.22. *Sei $C \in \mathcal{B}_m$. Dann sind die Funktionen $\varphi_C : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty]$ und $\psi_C : \mathbb{R}^l \rightarrow [0, \infty]$ messbar.*

BEWEIS. Wir betrachten nur φ_C , da man ψ_C analog behandeln kann. Wir verwenden wieder das Prinzip der guten Mengen.

1) Seien $I = I' \times I'' \in \mathcal{J}_m$, $I' \in \mathcal{J}_k$ und $I'' \in \mathcal{J}_l$. Aus (3.2) erhalten wir die Formel

$$\varphi_I(x) = \begin{cases} \lambda_l(I''), & x \in I' \\ 0, & x \in \mathbb{R}^k \setminus I' \end{cases} = \lambda_l(I'') \mathbb{1}_{I'}(x) \quad (3.6)$$

für alle $x \in I'$. Also ist φ_I messbar und \mathcal{J}_m liegt im Mengensystem

$$\mathcal{D} = \{C \in \mathcal{B}_m \mid \varphi_C \text{ ist messbar auf } \mathbb{R}^k\}.$$

Wir müssen im Folgenden zuerst beschränkte Mengen betrachten. Dazu setzen wir $Q_n = (-n, n]^m$, $Q'_n = (-n, n]^k$, $Q''_n = (-n, n]^l$ und $\mathcal{D}_n = \{C \subseteq Q_n \mid C \in \mathcal{D}\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $Q_n = Q'_n \times Q''_n$.

2) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^k$. Das System \mathcal{D}_n erfüllt die Bedingung (A1) aus Definition 1.1, da Q_n in \mathcal{J}_m und damit nach Schritt 1) in \mathcal{D}_n liegt.

Sei weiter C aus \mathcal{D}_n . Wir zeigen, dass $Q_n \setminus C$ in \mathcal{D}_n liegt, also (A2) gilt. Zunächst sind die Funktionen φ_C und φ_{Q_n} reellwertig, da $\lambda_l(C^x) \leq \lambda_l(Q''_n) < \infty$ endlich sind. Es gilt weiter $\mathbb{1}_{Q_n \setminus C} = \mathbb{1}_{Q_n} - \mathbb{1}_C$. Definition (3.5) und Satz 2.29 liefern deswegen

$$\varphi_{Q_n \setminus C}(x) = \int_{\mathbb{R}^l} (\mathbb{1}_{Q_n}(x, y) - \mathbb{1}_C(x, y)) dx = \varphi_{Q_n}(x) - \varphi_C(x).$$

Aus Schritt 1) und $C \in \mathcal{D}_n$ folgt wie nun gefordert die Messbarkeit von $\varphi_{Q_n \setminus C}$.

Seien nun die Mengen C_j , $j \in \mathbb{N}$, aus \mathcal{D}_n *disjunkt*. Wir wollen zeigen, dass auch ihre Vereinigung zu \mathcal{D}_n gehört. Wegen der Disjunktheit gilt $\mathbb{1}_C = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{C_j}$. Mittels (3.5) und Korollar 2.23 schließen wir dann

$$\varphi_C(x) = \int_{\mathbb{R}^l} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{C_j}(x, y) dy = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_{C_j}(x, y) dy = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{C_j}(x). \quad (3.7)$$

Die rechte Seite ist gemäß Annahme und Korollar 2.23 wie gewünscht messbar in x .

Schritt 1), Lemma 1.10 und Korollar 1.11 implizieren $\mathcal{J}_m \cap Q_n \subseteq \mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{B}(Q_n) = \sigma(\mathcal{J}_m \cap Q_n)$. Lemma 3.23 unten zeigt dann die zentrale Gleichung $\mathcal{D}_n = \mathcal{B}(Q_n)$.

3) Seien $C \in \mathcal{B}_m$, $x \in \mathbb{R}^k$ und $n \in \mathbb{N}$. Nach Korollar 1.11 liegt $C \cap Q_n$ in $\mathcal{B}(Q_n)$. Also ist laut Schritt 2) die Funktion $\varphi_{C \cap Q_n}$ messbar auf \mathbb{R}^k . Weiter ist $C \cap Q_n$ in $C \cap Q_{n+1}$ enthalten und C ist die Vereinigung der Mengen $C \cap Q_n$. Es ergibt sich dann die Ungleichung $\mathbb{1}_{(C \cap Q_n)^x} \leq \mathbb{1}_{(C \cap Q_{n+1})^x}$ und die punktweise Konvergenz $\mathbb{1}_{(C \cap Q_n)^x} \rightarrow \mathbb{1}_{C^x}$ für $n \rightarrow \infty$. Aus Levis Theorem 2.21 folgern wir nun die Gleichungen

$$\varphi_C(x) = \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_{C^x} d\lambda_l = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_{(C \cap Q_n)^x} d\lambda_l = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{C \cap Q_n}(x).$$

Satz 2.8 liefert nun die behauptete Messbarkeit von φ_C . \square

Im obigen Beweis haben wir Lemma 1.28 verwendet, das wir hier wiederholen.

LEMMA 3.23. Seien $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *durchschnittsstabil* und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ so gegeben, dass die Inklusionen $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, die Eigenschaften (A1) und (A2) aus Definition 1.1, sowie

(A3') für alle disjunkten $D_j \in \mathcal{D}$, $j \in \mathbb{N}$, gilt $\dot{\bigcup}_{j \in \mathbb{N}} D_j \in \mathcal{D}$, erfüllt sind. Dann erhalten wir $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{E})$.

Wegen Lemma 3.22 existiert das Integral über die Maße der Schnitte einer Menge C aus \mathcal{B}_m . Der nächste Satz besagt nun, dass dieses Integral das Maß von C liefert. Dies wird auch als *Prinzip von Cavalieri* bezeichnet. Mit ihm zeigen wir die gewünschte Gleichung (3.1) für charakteristische Funktionen.

SATZ 3.24. Für jede Menge $C \in \mathcal{B}_m$ gilt

$$\lambda_m(C) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(C^x) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda_k(C_y) dy, \quad d.h.,$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_C(z) dz = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_C(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_C(x, y) dx \right) dy.$$

BEWEIS. Wir setzen

$$\mu(C) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(C^x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} \varphi_C(x) dx$$

für $C \in \mathcal{B}_m$, siehe (3.5). Wir zeigen mit einer der Eindeutigkeitsaussagen für λ_m nun die erste Gleichung in der Behauptung. Die analoge für ψ_C wird entsprechend

bewiesen, und der Rest der Behauptung folgt dann aus (3.5). Zuerst sei $I = I' \times I''$ aus \mathcal{J}_m . Mittels Gleichung (3.6) im Beweis von Lemma 3.22 erhalten wir die Formel

$$\mu(I) = \int_{\mathbb{R}^k} \varphi_I(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(I'') \mathbb{1}_{I'}(x) \, dx = \lambda_l(I'') \lambda_k(I') = \lambda_m(I),$$

wobei wir auch Lemma 2.20 und (1.3) verwendet haben. Also stimmen λ_m und μ auf dem Erzeuger \mathcal{J}_m von \mathcal{B}_m überein. Wir zeigen nun, dass μ ein Maß auf \mathcal{B}_m ist. Es gilt $\mu(\emptyset) = 0$. Seien weiter C_j , $j \in \mathbb{N}$, disjunkte Mengen in \mathcal{B}_m und C ihre Vereinigung. Dann folgen aus (3.7) und Korollar 2.23 die Gleichungen

$$\mu(C) = \int_{\mathbb{R}^k} \varphi_C(x) \, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^k} \varphi_{C_j}(x) \, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j).$$

Also ist μ ein Maß und Theorem 1.21 liefert wie behauptet $\lambda_m = \mu$ auf \mathcal{B}_m . \square

Der obige Satz und Lemma 2.20 c) implizieren die folgende wichtige Aussage, die es erlaubt, gewisse überabzählbare Familien von Nullmengen zu behandeln.

KOROLLAR 3.25. *Sei $N \in \mathcal{B}_m$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- a) $\lambda_m(N) = 0$.
- b) Für f.a. $x \in \mathbb{R}^k$ gilt $\lambda_l(N^x) = 0$.
- c) Für f.a. $y \in \mathbb{R}^l$ gilt $\lambda_k(N_y) = 0$.

Wir diskutieren einige Beispiele für das Prinzip von Cavalieri und sein Korollar.

BEISPIEL 3.26. a) Sei $M \in \mathcal{B}_k$ mit $\lambda_k(M) = 0$. Nach dem obigen Korollar ist $N = M \times \mathbb{R}^l$ eine λ_m -Nullmenge, da $N_y = M$ für alle $y \in \mathbb{R}^l$ gilt (vergleiche (3.2)).

b) Es gibt eine Teilmenge $\Lambda \subseteq [0, 1]^2$, die in keiner λ_2 -Nullmenge liegt und deren Schnitte Λ^x und Λ_y für alle $x, y \in [0, 1]$ höchstens einen Punkt enthalten. Insbesondere gilt $\lambda_1(\Lambda^x) = \lambda_1(\Lambda_y) = 0$ für alle $x, y \in [0, 1]$, und Λ kann keine Borelmenge sein. (Siehe Beispiel V.1.9 in [3].) In einer Übung wurde ein schwächere Variante diskutiert. \diamond

BEISPIEL 3.27. Wir betrachten die offene Kreisscheibe $B = B(0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < r, y^2 < r^2 - x^2\}$ in \mathbb{R}^2 . Ihre Schnitte sind durch die Intervalle

$$B^x = \begin{cases} (-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}), & |x| < r, \\ \emptyset, & |x| \geq r, \end{cases}$$

gegeben. Also gilt $\lambda_1(B^x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ für $|x| < r$ und $\lambda_1(B^x) = 0$ für $|x| \geq r$. Satz 3.24 impliziert nun die Formel

$$\lambda_2(B) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(B^x) \, dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \pi r^2$$

wobei das Integral in Beispiel 1.16 in Analysis 2 berechnet worden war. Genauso sieht man, dass die abgeschlossene Kreisscheibe \bar{B} den Inhalt πr^2 besitzt. Somit ist der Rand $\partial B = \bar{B} \setminus B$ eine λ_2 -Nullmenge und es gilt $\lambda_2(A) = \pi r^2$ für jede Borelmenge A mit $B \subseteq A \subseteq \bar{B}$. (Verwende Satz 1.15.) \diamond

Wir können nun das Volumen von *Rotationskörpern* berechnen.

BEISPIEL 3.28. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann ist

$$R = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \in I, x_1^2 + x_2^2 \leq f(x_3)^2 \right\}$$

Borelsch und es gilt

$$\lambda_3(R) = \pi \int_I f(x_3)^2 dx_3.$$

Der senkrechte Kreiskegel mit Höhe $h > 0$ und Radius $r > 0$ hat das Volumen $\frac{\pi}{3}hr^2$.

BEWEIS. Wir bezeichnen die (nach Beispiel 2.6 messbare) Nullfortsetzung von f auf \mathbb{R} auch mit f . Mit den stetigen Koordinatenabbildungen $p_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; $p_j(x) = x_j$, schreiben wir $R = \{(f \circ p_3)^2 - p_1^2 - p_2^2 \geq 0\}$, sodass R in \mathcal{B}_3 liegt. Weiter hat R die Schnitte $R_{x_3} = \overline{B}(0, f(x_3))$ für $x_3 \in I$ und $R_{x_3} = \emptyset$ für $x_3 \in \mathbb{R} \setminus I$. Satz 3.24 und Beispiel 3.27 zeigen nun

$$\lambda_3(R) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(R_{x_3}) dx_3 = \pi \int_I f(x_3)^2 dx_3.$$

Im Falle des Kreiskegels K gilt $f(x_3) = r(1 - x_3/h)$ und $I = [0, h]$. Es folgt

$$\lambda_3(K) = \pi r^2 \int_0^h \left(1 - \frac{x_3}{h}\right)^2 dx_3 = -\frac{\pi}{3}hr^2 \left(1 - \frac{x_3}{h}\right)^3 \Big|_0^h = \frac{\pi}{3}hr^2. \quad \square$$

Für eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ setzen wir

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^l} f^x(y) dy \in [0, \infty] && \text{für jedes feste } x \in \mathbb{R}^k, \\ G(y) &= \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^k} f_y(x) dx \in [0, \infty] && \text{für jedes feste } y \in \mathbb{R}^l. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dies ist nach Lemma 3.21 möglich. Der folgende Satz erlaubt es nun, wie eingangs beschrieben, Integrale auf \mathbb{R}^m auf niederdimensionale zurückzuführen. Wir diskutieren unten seine Annahmen und beschreiben, wie man damit Integrale auf Borelmengen D im \mathbb{R}^m behandeln kann. Man beachte, dass man im nichtnegativen Fall das gewünschte Resultat alleine unter Messbarkeitsannahmen erzielt. In Teil b) wird allerdings die Integrierbarkeit im \mathbb{R}^m vorausgesetzt. Wir besprechen später, wie man auch diese mit Integralen auf \mathbb{R}^k und \mathbb{R}^l nachweisen kann. Teil b) wurde von Fubini 1907 gezeigt, Teil a) von Tonelli 1909 unter Verwendung des Resultats von Fubini. Wir sprechen insgesamt vom *Satz von Fubini*.

THEOREM 3.29. Sei $m = k + l$ für $k, l \in \mathbb{N}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann sind die in (3.8) definierten Funktionen $F : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty]$ und $G : \mathbb{R}^l \rightarrow [0, \infty]$ messbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx \right) dy. \quad (3.9)$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gibt es solche Nullmengen $M \in \mathcal{B}_k$ und $N \in \mathcal{B}_l$, dass die Schnittfunktionen $f^x : \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^k \setminus M$ und

$f_y : \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ für jedes $y \in \mathbb{R}^l \setminus N$ integrierbar sind. Wir definieren $F(x)$ und $G(y)$ wie in (3.8) für $x \in \mathbb{R}^k \setminus M$ bzw. für $y \in \mathbb{R}^l \setminus N$, und setzen $F(x) = 0$ für $x \in M$ und $G(y) = 0$ für $y \in N$. Dann sind die Funktionen $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $G : \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(z) \, dz = \int_{\mathbb{R}^k} F(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^l} G(y) \, dy. \quad (3.10)$$

(Anstelle dieser Gleichungen schreibt man meist die Formel (3.9).)

BEWEIS. Wir zeigen die Aussagen in den Schritten der Integraldefinition. Wir behandeln nur die Funktion F und die erste Gleichung in (3.9) bzw. (3.10). Die anderen Aussagen folgen auf die gleiche Weise.

a) 1) Nach Satz 3.24 gilt Behauptung a) für charakteristische Funktionen f . Sei nun f eine nichtnegative einfache Funktion. Es gibt also Mengen C_j in \mathcal{A} und Zahlen $a_j \geq 0$ für $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $f = \sum_{j=1}^n a_j \mathbb{1}_{C_j}$. Die Funktion F aus (3.8) ist dann durch

$$F(x) = \sum_{j=1}^n a_j \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_{C_j}(x, y) \, dy$$

für $x \in \mathbb{R}^k$ gegeben, wobei Lemma 2.20 einging. Lemma 3.22 und Satz 2.9 zeigen nun die behauptete Messbarkeit von F . Wieder aus Lemma 2.20 und Satz 3.24 folgern wir dann die erste Gleichung in (3.9) mittels

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} f(z) \, dz &= \sum_{j=1}^n a_j \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_{C_j}(z) \, dz = \sum_{j=1}^n a_j \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_{C_j}(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) \, dy \, dx. \end{aligned}$$

2) Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Nach (2.4) gibt es dann einfache Funktionen $f_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die Ungleichung $f_n \leq f_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllen und für $n \rightarrow \infty$ punktweise gegen f konvergieren. Wir setzen $F_n(x) = \int_{\mathbb{R}^l} f_n(x, y) \, dy$ für $x \in \mathbb{R}^k$ und $n \in \mathbb{N}$. Schritt 1) zeigt die Messbarkeit aller F_n . Weiter gilt $F_n \leq F_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Lemma 2.20. Wir wenden nun Levis Theorem 2.21 nacheinander auf die Abbildungen f_n^x , f_n und F_n an. Zuerst ergibt sich so die Konvergenz

$$F_n(x) = \int_{\mathbb{R}^l} f_n(x, y) \, dy \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) \, dy = F(x)$$

für $n \rightarrow \infty$ und jedes $x \in \mathbb{R}^k$. Nach Satz 2.8 ist F also messbar. Mittels Schritt 1) erhalten wir nun Aussage a) durch

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(z) \, dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_n(z) \, dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^l} f_n(x, y) \, dy \, dx = \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) \, dy \, dx.$$

b) Sei schließlich $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Daraus folgt aus Satz 2.26 und Aussage a) die Ungleichung

$$\infty > \int_{\mathbb{R}^m} |f(z)| \, dz = \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^l} |f(x, y)| \, dy \, dx.$$

Somit ist die Funktion

$$\Phi : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty]; \quad \Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^l} |f(x, y)| \, dy,$$

integrierbar, wobei schon Teil a) ihre Messbarkeit zeigt. Die Menge $M = \{\Phi = \infty\}$ ist dann nach Korollar 2.27 eine λ_k -Nullmenge. Laut Beispiel 3.26 ist deswegen das kartesische Produkt $M \times \mathbb{R}^l$ eine λ_m -Nullmenge, was wir unten verwenden werden. Da $\Phi(x)$ für $x \in \mathbb{R}^k \setminus M$ endlich ist, liefert Satz 2.26 die benötigte Integrierbarkeit von $f^x : \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Wir können also F wie in der Behauptung definieren.

Um F behandeln zu können, erklären wir die Funktion $\tilde{f} = \mathbb{1}_{M^c \times \mathbb{R}^l} f : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die nach Voraussetzung und Satz 2.29 a) integrierbar ist. Es gilt konstruktionsgemäß die Identität $F(x) = \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}(x, y) \, dy$, und wir erhalten die Abschätzungen

$$\left| \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_{\pm}(x, y) \, dy \right| \leq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^k \setminus M}(x) \Phi(x) < \infty$$

für alle $x \in \mathbb{R}^k$. Gemäß Satz 2.26 impliziert also die Integrierbarkeit von Φ diejenige der Funktionen $F^{\pm} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$; $F^{\pm}(x) := \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_{\pm}(x, y) \, dy$, die nach Schritt a) messbar sind. Aus Satz 2.29 folgern wir $F = F^+ - F^-$, sodass F nach Satz 2.5 messbar und dann laut Satz 2.26 integrierbar ist. Nun benutzen wir Lemma 3.6, die Definition 2.25 des Integrals, Teil a), sowie Satz 2.29 und berechnen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} f(z) \, dz &= \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{f}(z) \, dz = \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{f}_+(z) \, dz - \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{f}_-(z) \, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_+(x, y) \, dy \, dx - \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_-(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_+(x, y) - \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_-(x, y) \, dy \right) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}(x, y) \, dy \, dx = \int_{\mathbb{R}^k} F(x) \, dx. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir auch die Endlichkeit der Integrale $\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_{\pm}(x, y) \, dy$ verwendet. \square

Wir bemerken, dass das Rechnen mit $\pm\infty$ und mit Nullmengen in diesem Theorem und seinem Beweis besonders nützlich ist. Der Beweis gibt am Ende mittels der Funktion \tilde{f} eine präzise Version von Formel (3.9) für Teil b). Die folgende Bemerkung zeigt unter anderem, dass naheliegende Varianten des Satzes von Fubini im allgemeinen falsch sind.

BEMERKUNG 3.30. a) Man kann das Theorem von Fubini induktiv auf endlich oft iterierte Integrale verallgemeinern.

b) Nach Bemerkung 3.26 b) gibt es so eine nicht-messbare Funktion $f = \mathbb{1}_{\Lambda} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, dass alle Schnittfunktionen f^x und f_y messbar und f.ü. gleich 0 sind. Insbesondere existieren die iterierten Integrale in (3.9) und sind beide gleich 0. Trotzdem ist das Integral von f auf \mathbb{R}^2 nicht einmal definiert. Die \mathcal{B}_m - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -Messbarkeit von f muss in Theorem 3.29 also gefordert werden; die Messbarkeit der Schnittfunktionen reicht nicht aus.

c) Es gibt solche messbare Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dass die iterierten Integrale in (3.9) zwar existieren, aber **ungleich** sind. Solche Funktionen f können weder nichtnegativ noch integrierbar sein.

BEWEIS. Wir betrachten dazu die rationale Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \in (0, 1)^2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $x \in (0, 1)$ gibt es das innere Integral

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \int_0^1 \partial_y \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^1 = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Somit existiert auch das iterierte Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Entsprechend zeigt man die Gleichungen

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \partial_x \frac{-x}{x^2 + y^2} dx dy = - \int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^1 dy = -\frac{\pi}{4}. \quad \square$$

d) Es gibt messbare Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, für die die iterierten Integrale in (3.9) existieren und übereinstimmen, aber trotzdem f auf \mathbb{R}^2 **nicht** integrierbar ist, also $\int f(z) dz$ nicht existiert. (Siehe die Übungen.)

e) Im Allgemeinen ist die Funktion f^x in Theorem 3.29 b) nicht für alle $x \in \mathbb{R}^k$ integrierbar, vergleiche Beispiel 3.32 b).

f) Eine Version des Theorems von Fubini für σ -endliche Maßräume findet man in [3] oder [11]. \diamond

Wir betrachten auch allgemeinere kartesische Produkte als $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$.

BEMERKUNG 3.31. Seien $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_k$, $\emptyset \neq Y \in \mathcal{B}_l$, $Z = X \times Y$ und $f : Z \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare, sowie positive oder integrierbare Funktion. Laut Lemma 3.20 liegt Z in \mathcal{B}_m . Sei nun $\tilde{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die Nullfortsetzung von f . Diese ist nach Beispiel 2.6 messbar. Weiter bleibt sie nichtnegativ bzw. integrierbar, und besitzt das gleiche Integral wie f . (Verwende Satz 2.29.) Die Funktion \tilde{f} erfüllt auch $\tilde{f}(x, y) = \mathbb{1}_X(x) \mathbb{1}_Y(y) f(x, y)$ für alle $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^l$. Aus Theorem 3.29 erhalten wir damit die folgenden Gleichungen, die im Sinne dieses Satzes gelten:

$$\begin{aligned} \int_Z f(z) dz &= \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{f}(z) dz = \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_X(x) \mathbb{1}_Y(y) \tilde{f}(x, y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_X(x) \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_Y(y) \tilde{f}(x, y) dy dx = \int_X \int_Y f(x, y) dy dx \\ &= \int_Y \int_X f(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad \diamond$$

Wir skizzieren nun, wie man den Satz von Fubini für Funktionen $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und Mengen $D \subseteq \mathbb{R}^m$ anwenden kann.

- 1) Prüfe, ob D in \mathcal{B}_m liegt und f eine $\mathcal{B}(D)$ - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbare Funktion ist.
- 2) Setze f (z.B. mit 0) zu einer messbaren Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fort.
- 3) Soweit nötig, zeige die Integrierbarkeit von $f = (\mathbb{1}_D \tilde{f})|_D$ durch Teil a) des Satzes von Fubini und eine Schranke wie in

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\mathbb{1}_D \tilde{f}| \, dz = \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^l} |\mathbb{1}_D \tilde{f}| \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\mathbb{R}^k} |\mathbb{1}_D \tilde{f}| \, dy \, dx < \infty.$$

- 4) Berechne mit (3.9) das Integral $\int_D f \, dz = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_D \tilde{f} \, dz$.

(Man kann hier statt \mathbb{R}^m auch eine Menge $Z \supseteq D$ wie in Bemerkung 3.31 verwenden.) Es sei jedoch bemerkt, dass man gleichwohl oft (3.9) erst einmal ohne Überprüfung der Voraussetzungen benutzt, um zu sehen, ob die Anwendung von Fubini überhaupt zu etwas Interessantem führen kann. Die obigen Schritte sind dann aber für das Aufschreiben einer korrekten Rechnung vonnöten, wobei manche sehr einfach sein können.

Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, in den Rechnungen die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_D$ zu behandeln. Ferner führt eventuell nur eines der beiden iterierten Integrale zum Ziel. Diese und andere Punkte illustrieren die folgenden Beispiele.

BEISPIEL 3.32. a) Seien $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y) = \frac{1}{x} \cos(2xy)$. Dann ist f integrierbar und es gilt $\int_D f \, dz = \sin 1$.

BEWEIS. Die Funktion f ist stetig und damit messbar. Die Menge D liegt in \mathcal{B}_2 , da sie abgeschlossen ist (bzw. das Urbild von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ unter der Abbildung $\frac{1}{p_1} - p_2$ auf $[1, \infty) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$). Wir setzen f mit der gleichen Abbildungsvorschrift zu $\tilde{f} : Q := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ fort. (Wir wählen Q statt $[1, \infty) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, um die Einschränkung $x \geq 1$ sichtbar zu machen.) Für die folgende Rechnung beachten wir, dass $\mathbb{1}_D(x, y) = 1$ genau dann auf Q gilt, wenn $x \geq 1$ und $0 \leq y \leq 1/x$ sind, und dass dies äquivalent zu den Relationen $x \geq 1$ und $y \in D^x = [0, 1/x]$ ist. Ansonsten ist $\mathbb{1}_D(x, y) = 0$. Mit Satz 2.29 und Fubinis Theorem 3.29 a) berechnen wir nun

$$\begin{aligned} \int_D |f| \, d(x, y) &= \int_Q \mathbb{1}_D |\tilde{f}| \, d(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{1}_D(x, y) \frac{|\cos(2xy)|}{x} \, dy \, dx \\ &= \int_1^\infty \int_0^{1/x} \frac{|\cos(2xy)|}{x} \, dy \, dx \leq \int_1^\infty \int_0^{1/x} \frac{1}{x} \, dy \, dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1, \end{aligned}$$

wobei am Ende Beispiel 1.24 aus Analysis 2 und Bemerkung 3.15 eingehen. Also ist f integrierbar. Wir erhalten nun auf ähnliche Weise mit Theorem 3.29 b) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_D f \, d(x, y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{1}_D(x, y) \frac{\cos(2xy)}{x} \, dy \, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x} \int_0^{1/x} \cos(2xy) \, dy \, dx \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{2x^2} \sin(2xy) \Big|_{y=0}^{1/x} \, dx = \int_1^\infty \frac{\sin 2}{2x^2} \, dx = \frac{\sin 2}{2}. \end{aligned}$$

Das $dx \, dy$ -Integral führt hier wohl nicht zum Ziel. □

b) Seien $\alpha \in (0, 1)$, $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $D = \{(x, y) \in (0, 1)^2 \mid 0 < y < x < 1\}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = (x - y)^{-\alpha} g(y)$. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int_D f \, d(x, y) = \int_0^1 \int_0^x (x - y)^{-\alpha} g(y) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_y^1 (x - y)^{-\alpha} g(y) \, dx \, dy.$$

Falls speziell $g(y) = |\frac{1}{2} - y|^{\alpha-1}$ für $y \neq \frac{1}{2}$ und $g(\frac{1}{2}) = 0$ erfüllt sind, ist g zwar auf $(0, 1)$ integrierbar, aber wir erhalten $F(\frac{1}{2}) = \int_0^{1/2} |\frac{1}{2} - y|^{-1} \, dy = \infty$, vergleiche (3.8).

BEWEIS. Wie im vorherigen Beispiel sieht man, dass D Borelsch (sogar offen) ist. Die Funktion $G = g \circ p_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$; $G(x, y) = g(y)$, ist als Komposition messbar und damit auch f als Produkt von G und einer stetigen Funktion. Man beachte, dass $\mathbb{1}_D(x, y) = 1$ genau dann auf $(0, 1)^2$ gilt, wenn $0 < y < x < 1$ oder äquivalent die Relationen $y \in (0, 1)$ und $x \in D_y = (y, 1)$ erfüllt sind. Mittels Fubinis Theorem 3.29 a), bzw. Bemerkung 3.31 mit $Z = (0, 1)^2$, berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_D |f| \, d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_D(x, y) (x - y)^{-\alpha} |g(y)| \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_y^1 (x - y)^{-\alpha} |g(y)| \, dx \, dy = \int_0^1 \int_y^1 (x - y)^{-\alpha} \, dx |g(y)| \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} t^{-\alpha} \, dt |g(y)| \, dy = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 (1-y)^{1-\alpha} |g(y)| \, dy \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 |g(y)| \, dy < \infty, \end{aligned}$$

wobei wir $t = x - y$ in dx -Integral substituiert haben. (Die Substitutionsregel aus Analysis 2 kann man nur auf einem verkleinerten Intervall $(y + \varepsilon, 1)$ anwenden; im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ erhält man dann die obige Aussage. Alternativ kann man auch den Transformationssatz 3.36 aus dem nächsten Abschnitt benutzen.) Also ist f integrierbar. Wir wenden nun Theorem 3.29 b) an, lösen aber die Bedingung $0 < y < x < 1$ auch zu $x \in (0, 1)$ und $y \in D^x = (0, x)$ auf. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_D f \, d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_D(x, y) (x - y)^{-\alpha} g(y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_y^1 (x - y)^{-\alpha} g(y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^x (x - y)^{-\alpha} g(y) \, dy \, dx. \end{aligned}$$

Die letzte Behauptung ist dann klar. \square

c) Es gilt $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$ (mit uneigentlichem Integral, vgl. Bemerkung 2.31).

BEWEIS. Die Existenz dieses Integrals wurde in Beispiel 1.26 von Analysis 2 gezeigt. Sei $R > 0$. Wir setzen

$$I_R = \int_0^R \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Um den Grenzwert $R \rightarrow \infty$ zu berechnen, formen wir I_R zu einem zweidimensionalen Integral um, wobei wir uns davon leiten lassen, dass wir eine Stammfunktion von

$t \mapsto e^t \sin t$ aus Analysis 2 kennen. Dazu verwenden wir die Formel $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} dy$ für jedes $x > 0$ aus Beispiel 1.24 von Analysis 2. Damit gilt

$$I_R = \int_0^R \sin x \int_0^\infty e^{-xy} dy dx.$$

Wir setzen nun $f : Q_R := [0, R] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$. Diese Funktion ist stetig und somit messbar. Um ihre Integrierbarkeit zu zeigen, verwenden wir wieder Fubinis Theorem 3.29 a) in der Version von Bemerkung 3.31 und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{Q_R} |f| d(x, y) &= \int_0^R \int_0^\infty e^{-xy} |\sin x| dy dx = \int_0^R |\sin x| \int_0^\infty e^{-xy} dy dx \\ &= \int_0^R \frac{|\sin x|}{x} dx < \infty, \end{aligned}$$

da der letzte Integrand für $x \rightarrow 0$ konvergiert. Also ist f auf Q_R integrierbar, und Theorem 3.29 b) impliziert

$$\begin{aligned} I_R &= \int_{Q_R} f = \int_0^\infty \int_0^R e^{-xy} \sin x dx dy = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} (1 - e^{-yR}(y \sin R + \cos R)) dy \\ &= \arctan y \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-yR}}{1+y^2} (y \sin R + \cos R) dy \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-yR}}{1+y^2} (y \sin R + \cos R) dy, \end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Zeile wie in Beispiel 1.13 von Analysis 2 partielle Integration verwendet haben und abkürzend $f(t)|_0^\infty := \lim_{b \rightarrow \infty} f(b) - f(0)$ schreiben. In der abgesetzten Formel nennen wir das letzte Integral J_R . Wir schätzen es durch

$$|J_R| \leq \int_0^\infty \frac{1+y}{1+y^2} e^{-yR} dy \leq 2 \int_0^\infty e^{-yR} dy = -\frac{2}{R} e^{-yR} \Big|_0^\infty = \frac{2}{R}$$

ab. Da die rechte Seite für $R \rightarrow \infty$ verschwindet, folgt die behauptete Formel. \square

d) Für $a, b > 0$ definieren wir die *Gamma-* und die *Betafunktion* durch

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad \text{und} \quad B(a, b) = \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt.$$

In Beispiel 1.27 von Analysis 2 wurde Γ eingeführt, und mit dem dortigen Beispiel 1.24 zeigt man $B(a, b) < \infty$. Wir behaupten die Identität $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. Der folgende Beweis beruht auf einer typischen Anwendung von Fubinis Satz.

BEWEIS. Zuerst berechnen wir

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty s^{a-1} e^{-s} ds \int_0^\infty t^{b-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty \int_0^\infty s^{a-1} t^{b-1} e^{-(s+t)} ds dt \\ &= \int_0^\infty \int_t^\infty (r-t)^{a-1} t^{b-1} e^{-r} dr dt. \end{aligned}$$

Hier haben wir im ds -Integral $r = s + t$ substituiert, um den Faktor e^{-r} für $\Gamma(a+b)$ zu erhalten. (Die Substitutionsregel wendet man ähnlich wie in Teil b) an.) Um

das dr -Integral der Definition von $B(a, b)$ anzunähern, benutzen wir nun Fubinis Theorem 3.29 a), wobei der Integrand stetig und positiv ist. Oben integrieren wir über $t > 0$ und $r \in (t, \infty)$; es gilt also $0 < t < r < \infty$. Beim Vertauschen erhalten wir daraus $r > 0$ und $t \in (0, r)$. Es folgt

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty \int_0^r (r-t)^{a-1} t^{b-1} e^{-r} dt dr = \int_0^\infty r^{a-1} e^{-r} \int_0^r \left(1 - \frac{t}{r}\right)^{a-1} t^{b-1} dt dr.$$

Um nun $B(a, b)$ zu erhalten, substituieren wir $\tau = t/r$ im dt -Integral. Dies liefert

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty r^{a-1} e^{-r} \int_0^1 (1-\tau)^{a-1} (r\tau)^{b-1} r d\tau dr = \Gamma(a+b)B(a, b). \quad \square$$

3.4. Der Transformationssatz

In diesem Abschnitt betrachten wir das Lebesguemaß λ_m auf der Borelschen σ -Algebra einer Borel-Teilmenge des \mathbb{R}^m . Wir erinnern an die Substitutionsregel Satz 1.15 aus Analysis 2. Seien $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und φ aus $C^1([\alpha, \beta])$ mit $\varphi([\alpha, \beta]) = J$. Dann ist J ein kompaktes Intervall und es gilt

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y) dy = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

Man hat dabei die Merkregel, dass die Substitution $y = \varphi(x)$ die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ und damit ‘ $dy = \varphi'(x)dx$ ’ liefert.

Wir wollen diese Aussage auf Teilmengen des \mathbb{R}^m verallgemeinern. Dazu seien zunächst $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und nichtleer. Eine Funktion $\Phi : X \rightarrow Y$ heißt *Diffeomorphismus*, wenn sie bijektiv und samt ihrer Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig differenzierbar ist. Gemäß Korollar 3.37 in Analysis 2 ist eine injektive Abbildung $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R}^m)$ genau dann ein Diffeomorphismus und $Y := \Phi(X)$ offen, wenn die Jakobi-Matrix $\Phi'(x)$ für jedes $x \in X$ invertierbar ist (oder äquivalent, wenn $\det \Phi'$ auf X nie gleich 0 ist). Es gilt dabei $(\Phi^{-1})'(y) = \Phi'(\Phi^{-1}(y))^{-1}$ für $y = \Phi(x)$, sodass $x \mapsto \Phi'(x)^{-1} = (\Phi^{-1})'(\Phi(x))$ stetig ist.

Wir formulieren zunächst die gewünschte m -dimensionale Verallgemeinerung der Substitutionsregel in vereinfachter Form.

THEOREM (Grundversion des Transformationssatzes). *Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\Phi : X \rightarrow Y$ ein Diffeomorphismus und $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann ist die Funktion $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$; $g(x) = f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)|$, ebenfalls integrierbar und es gilt*

$$\int_Y f(y) dy = \int_X f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx.$$

Wir notieren hier schon die Merkregel, dass aus $y = \Phi(x)$ nun ‘ $dy = |\det \Phi'(x)| dx$ ’ folgt. Im Vergleich zur eindimensionalen Version gibt es mehrere Unterschiede.

- 1) Es tritt neu die Determinante \det auf. (Vergleiche Lemma 3.33.)
- 2) Im Reellen benötigt man keine Injektivität von φ und es gibt keinen Betrag in der Gleichung. Dies liegt an der Formel $\int_a^a \dots dx = -\int_a^b \dots dx$ und der Ordnungsstruktur von \mathbb{R} .

- 3) Für $Y = B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt es keine offene Menge $X \subseteq \mathbb{R}^2$ derart, dass die Polarkoordinaten $\Phi : X \rightarrow B(0, 1)$; $\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, bijektiv sind, vergleiche Beispiel 3.38. Deswegen zeigen wir unten eine verfeinerte Version des obigen Satzes.

Wir betrachten wie im letzten Abschnitt zuerst charakteristische Funktionen $f = \mathbb{1}_B$ für $B \in \mathcal{B}(Y)$. Dazu diskutieren wir zunächst einige maßtheoretische Vorbereitungen. Seien hierfür (S, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, \mathcal{B} eine σ -Algebra auf einer Menge $T \neq \emptyset$ und $F : S \rightarrow T$ eine \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbare Abbildung. Wir definieren dann auf \mathcal{B} das *Bildmaß* von μ unter F durch

$$F_*\mu = F(\mu) = \mu_F : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]; \quad B \mapsto \mu(F^{-1}(B)).$$

Diese Abbildung ist ein Maß, da $\mu_F(\emptyset) = 0$ und für disjunkte $B_j, j \in \mathbb{N}$, aus \mathcal{B}

$$\begin{aligned} \mu_F\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) &= \mu\left(F^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F^{-1}(B_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F^{-1}(B_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F(B_j) \end{aligned}$$

gelten. Wir wenden dieses Konzept auf die stetige Abbildung $F = \Phi^{-1} : Y \rightarrow X$ an. Dies liefert auf $\mathcal{B}(X)$ das *inverse Bildmaß* von $\lambda = \lambda_m$ unter Φ

$$\Phi^*\lambda_m : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, \infty]; \quad A \mapsto \lambda_{\Phi^{-1}(A)} = \lambda_m(\Phi(A)).$$

Man beachte, dass $\Phi(A) = (\Phi^{-1})^{-1}(A)$ in $\mathcal{B}(Y)$ liegt. (Siehe (2.11) in Analysis 2. Dieser Schluss wird im Folgenden mehrfach verwendet.) Als Spezialfall des anvisierten Transformationssatzes für $f = \mathbb{1}_{\Phi(A)}$ zielen wir also auf die Formel

$$\begin{aligned} \Phi^*\lambda_m(A) &= \lambda_m(\Phi(A)) = \int_Y \mathbb{1}_{\Phi(A)}(y) \, dy \stackrel{!}{=} \int_X \mathbb{1}_{\Phi(A)}(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| \, dx \\ &= \int_A |\det \Phi'(x)| \, dx \end{aligned}$$

für $A \in \mathcal{B}(X)$, wobei $\mathbb{1}_{\Phi(A)}(\Phi(x)) = \mathbb{1}_A(x)$ aus der Bijektivität von $\Phi : X \rightarrow Y$ folgt. Wir wollen somit die Gleichheit der Maße $\Phi^*\lambda_m = |\det \Phi'| \lambda_m$ auf $\mathcal{B}(X)$ zeigen, vergleiche Korollar 2.23. Dies wird uns jedoch zuerst nur teilweise gelingen.

Wir etablieren zunächst eine Reihe von Hilfssätzen. Wir beginnen mit affinen Transformationen Φ und zeigen dabei, dass das Lebesguemaß bewegungsinvariant ist.² Hier und im Folgenden benötigen wir einige einfache Eigenschaften der Determinante, für die wir auf die Abschnitte 3.1.3, 3.2.5 und 5.5.2 in [4] verweisen.

LEMMA 3.33. *Seien $T \in L(\mathbb{R}^m)$ invertierbar, $v \in \mathbb{R}^m$ und $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\Phi(x) = v + Tx$. Für jedes $A \in \mathcal{B}_m$ liegt dann die Menge $\Phi(A) = v + TA$ in \mathcal{B}_m und es gilt $\lambda_m(\Phi(A)) = |\det T| \lambda_m(A)$. Weiter ist $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Diffeomorphismus mit Ableitung $\Phi'(x) = T$ und Inversen $\Phi^{-1}(y) = T^{-1}(y - v)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$.*

²Eine *Bewegung* ist eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\Phi(x) = Tx + v$, wobei $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonal und $v \in \mathbb{R}^m$ sind. Also gilt $|\det T| = 1$.

BEWEIS. Die letzte Aussage ist klar. Sei A aus \mathcal{B}_m . Dann liegt auch $\Phi(A)$ in \mathcal{B}_m . Wegen der Translationsinvarianz von λ_m laut Satz 1.25 gilt weiter $\lambda_m(\Phi(A)) = \lambda_m(TA)$. Um die Matrix T zu behandeln, setzen wir $\mu(A) = \lambda_m(TA)$. Gemäß der obigen Überlegungen ist μ ein Maß auf \mathcal{B}_m . Weiter liefert Satz 1.25 die Gleichung

$$\mu(z + A) = \lambda_m(Tz + TA) = \lambda_m(TA) = \mu(A)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^m$, sodass auch μ translationsinvariant ist. Da die Menge $T((0, 1]^m)$ beschränkt ist, hat sie ein endliches Maß $c(T) := \mu((0, 1]^m) = \lambda_m(T((0, 1]^m))$. Satz 1.25 zeigt nun die Beziehung $\mu(A) = c(T)\lambda_m(A)$ für jedes $A \in \mathcal{B}_m$. Wir beweisen die behauptete Gleichung $c(T) = |\det T|$ zunächst in zwei Spezialfällen, in denen wir TA für gewisse A bestimmen können.

1) Sei zuerst T orthogonal, also $T^{-1} = T^\top$. Dann gelten die Identitäten $|\det T| = 1$, sowie $|Tx|_2^2 = (Tx|Tx) = (x|x) = |x|_2^2$ und damit $|T^{-1}y|_2^2 = |z|_2^2 = |Tz|_2^2 = |y|_2^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ und $z := T^{-1}y$. Also ist $TB(0, 1) = B(0, 1)$, und wir erhalten

$$\lambda_m(B(0, 1)) = \lambda_m(TB(0, 1)) = \mu(B(0, 1)) = c(T)\lambda_m(B(0, 1)).$$

Daraus ergibt sich wie gefordert $c(T) = 1 = |\det T|$, da $\lambda_m(B(0, 1)) > 0$ nach Bemerkung 3.2 e) ist.

2) Sei weiter T eine Diagonalmatrix mit den Elementen $t_1, \dots, t_n > 0$. Hier berechnen wir direkt $T((0, 1]^m) = \prod_{j=1}^m (0, t_j]$ und somit

$$c(T) = \lambda_m(T((0, 1]^m)) = \prod_{j=1}^m t_j = \det T = |\det T|.$$

3) Sei schließlich T in $L(\mathbb{R}^m)$ invertierbar. Dann ist die Matrix $S = TT^\top$ symmetrisch und positiv definit. Der Spektralsatz der Linearen Algebra (siehe Abschnitt 5.6.2 in [4]) liefert eine Diagonalmatrix D mit Elementen $d_j^{1/2}$ für Zahlen $d_j > 0$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ und eine Matrix $J \in L(\mathbb{R}^m)$ mit Inversen $J^{-1} = J^\top$ derart, dass S die Normalform $JTT^\top J^\top = D^2$ hat. Dabei ist auch D^2 diagonal mit den Einträgen d_j . Wir setzen nun $U = D^{-1}JT$. Es folgen die Gleichungen

$$UU^\top = D^{-1}JTT^\top J^\top D^{-1} = D^{-1}D^2D^{-1} = I,$$

sodass U die Inverse U^\top besitzt. Weiter gilt $T = J^\top DU$, woraus sich die Formel

$$|\det T| = |\det J^\top| |\det D| |\det U| = \det D$$

ergibt. Aus den Teilen 1) und 2) schließen wir jetzt die Behauptung mit

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \lambda_m(TA) = \lambda_m(J^\top(DUA)) = \lambda_m(DUA) = \det(D) \lambda_m(UA) \\ &= |\det T| \lambda_m(A). \end{aligned} \quad \square$$

Der nächste Lemma ist der aufwendigste Schritt im Beweis des Transformationssatzes. Statt der gewünschten Gleichheit der Maße $\Phi^*\lambda_m$ und $|\det \Phi'| \lambda_m$ gelingt uns nur der Nachweis einer Ungleichung auf speziellen Intervallen.

LEMMA 3.34. Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\Phi : X \rightarrow Y$ ein Diffeomorphismus und J aus der Familie $\mathcal{E} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}^m, a \leq b, [a, b] \subseteq X\}$. Dann gilt

$$\lambda_m(\Phi(J)) \leq \int_J |\det \Phi'(x)| \, dx.$$

Weiter erzeugt \mathcal{E} die Borelsche σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ und X ist die abzählbare Vereinigung von Mengen J_n aus \mathcal{E} .

BEWEIS. Wir versehen hier \mathbb{R}^m mit der Maximumsnorm $|\cdot|_\infty$ und $L(\mathbb{R}^m)$ mit der zugehörigen Operatornorm $\|\cdot\|$.

1) Wir beginnen mit einer vorbereitenden Abschätzung. Sei $W = x_0 + \left(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right]^m$ ein Würfel aus \mathcal{E} mit Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^m$ und Kantenlänge $r > 0$. Weiter sei $\Psi \in C^1(X, \mathbb{R}^m)$. Wir wollen die Volumina von W und $\Psi(W)$ vergleichen. Nach dem Theorem von Bolzano–Weierstraß 2.44 in Analysis 2 ist die Menge $\overline{W} \subseteq X$ kompakt, sodass der Satz vom Maximum 2.50 aus Analysis 2 und die Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto \|\Psi'(x)\|$ die Zahl

$$K := \max_{x \in \overline{W}} \|\Psi'(x)\| < \infty$$

liefern. Der Beweis des Satzes 3.23 aus Analysis 2 funktioniert für jede Norm auf \mathbb{R}^m . Demgemäß ist Ψ auf \overline{W} Lipschitz stetig mit der Konstanten K , woraus die Ungleichung

$$|\Psi(x) - \Psi(x_0)|_\infty \leq K |x - x_0|_\infty \leq \frac{Kr}{2}$$

für jedes $x \in W$ folgt. Also liegt $\Psi(W)$ im Würfel $W' = \overline{B}_{|\cdot|_\infty}(\Psi(x_0), Kr/2)$. Wir erhalten damit die Abschätzung

$$\lambda_m(\Psi(W)) \leq \lambda_m(W') = (Kr)^m = K^m \lambda_m(W).$$

2) Sei nun $J = (a, b) \in \mathcal{E}$ fest gewählt. Im folgenden Abschnitt wenden wir Lemma 3.33 auf Jacobimatrizen $\Phi'(x_j)$ an, die das Verhalten von $\Phi'(x)$ für $x \approx x_j$ gut beschreiben sollten. Hierfür müssen wir geeignete Punkte x_j in kleinen Würfeln $J_j \subseteq J$ auswählen. Zuerst erhalten wir wie in Schritt 1) aus dem Satz vom Maximum die Konstante

$$M := \max_{x \in \overline{J}} \|\Phi'(x)^{-1}\| < \infty.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da Φ' auf der kompakten Menge $\overline{J} \subseteq X$ gleichmäßig stetig ist (siehe Theorem 2.47 in Analysis 2), gibt es so einen Radius $\delta > 0$, dass für alle $x, z \in \overline{J}$ mit $|x - z|_\infty \leq \delta$ die Ungleichung $|\Phi'(x) - \Phi'(z)|_\infty \leq \varepsilon/M$ gilt. Da die Punkte a und b rational sind, finden wir (wie in Bemerkung 3.2 d)) disjunkte Würfel J_j in \mathcal{E} mit Kantenlänge in $(0, \delta]$ für $j \in \{1, \dots, n\}$, deren Vereinigung gleich J ist.

Um unten die Zahlen $|\det \Phi'(x_j)|$ wieder mit der Funktion $x \mapsto |\det \Phi'(x)|$ vergleichen zu können, wählen wir für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ Punkte $x_j \in J_j$ mit

$$\min_{x \in J_j} |\det \Phi'(x)| = |\det \Phi'(x_j)| > 0,$$

die nach dem Satz vom Maximum existieren. Wir setzen nun $T_j = \Phi'(x_j)$ und $\Phi_j = T_j^{-1} \circ \Phi$. Für $\Psi = \Phi_j$ können wir nun in Schritt 1) eine Konstante K nahe bei 1 nachweisen. Dazu folgern wir zunächst aus der Kettenregel die Gleichung

$$\Phi'_j(x) = T_j^{-1} \Phi'(x) = I_m + T_j^{-1}(\Phi'(x) - \Phi'(x_j))$$

für $x \in X$. Die obigen Überlegungen liefern dann die Abschätzung

$$\max_{x \in J_j} \|\Phi'_j(x)\| \leq 1 + M \frac{\varepsilon}{M} = 1 + \varepsilon.$$

3) Aus Lemma 3.33 ergibt sich weiter die Identität

$$\lambda_m(\Phi(J_j)) = \lambda_m(T_j T_j^{-1} \Phi(J_j)) = |\det T_j| \lambda_m(\Phi_j(J_j)).$$

Wir wenden jetzt die Schritte 1) und 2) auf $\Psi = \Phi_j$ mit $K = 1 + \varepsilon$ an und erhalten die zentrale Ungleichung

$$\lambda_m(\Phi(J_j)) \leq |\det T_j| (1 + \varepsilon)^m \lambda_m(J_j).$$

Wir setzen nun $\varphi = \sum_{j=1}^n |\det T_j| \mathbb{1}_{J_j}$. Nach der Wahl der x_j gilt $\varphi \leq |\det \Phi'|$ auf J . Wegen der Bijektivität von Φ , ist ferner $\Phi(J)$ die disjunkte Vereinigung der Bilder $\Phi(J_j)$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Daraus schließen wir auf die Beziehung

$$\begin{aligned} \lambda_m(\Phi(J)) &= \sum_{j=1}^n \lambda_m(\Phi(J_j)) \leq (1 + \varepsilon)^m \sum_{j=1}^n |\det T_j| \lambda_m(J_j) \\ &= (1 + \varepsilon)^m \int_J \varphi \, dx \leq (1 + \varepsilon)^m \int_J |\det \Phi'| \, dx. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die erste Aussage.

4) Wir zeigen noch den zweiten Teil. Nach Satz 1.9 wird $\mathcal{B}(X)$ vom System $\mathcal{E}' = \{(a, b] \subseteq X \mid a, b \in \mathbb{Q}^m, a \leq b\}$ erzeugt. Für $b > a$ ist $(a, b] \in \mathcal{E}'$ die Vereinigung der Intervalle $(a + \frac{1}{n} \mathbb{1}, b]$ aus \mathcal{E} für $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \min_k (b_k - a_k)$. Lemma 1.6 impliziert nun $\mathcal{E}' \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$ und damit $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}') = \mathcal{B}(X)$. Die letzte Aussage kann wie in Satz 1.9 für offene Würfel J_n bewiesen werden. \square

Das folgende Resultat wird im Beweis des Transformationssatzes benötigt; es ist aber auch von unabhängigem Interesse. Für lediglich stetige F kann die Aussage falsch sein. So gibt es stetige und surjektive Abbildungen $F: [0, 1] \times \{0\} \rightarrow [0, 1]^2$, die flächenfüllende Kurven parametrisieren, siehe Bemerkung IX.5.11 in [2].

LEMMA 3.35. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ und $N \subseteq U$ eine λ_m -Nullmenge. Dann liegt $F(N)$ in einer λ_m -Nullmenge.*

BEWEIS. Lemma 3.34 impliziert,³ dass U die Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen $J_n \subseteq U$ mit rationalen Ecken für $n \in \mathbb{N}$ ist. Also liegt $F(N)$ in der Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} F(N \cap J_n)$, und es reicht zu zeigen, dass jedes Bild $F(N \cap J_n)$ in einer λ_m -Nullmenge liegt. Wir schreiben J statt J_n . Da $J \subseteq U$ abgeschlossen und beschränkt

³Dieser Beweis wurde in der Vorlesung ausgelassen; der eindimensionale Fall wurde in einer Übung behandelt.

ist, folgt seine Kompaktheit aus dem Theorem von Bolzano–Weierstraß 2.44 in Analysis 2. Deswegen ist F auf J laut Satz 3.23 aus Analysis 2 Lipschitz stetig mit einer Konstante $L \geq 0$, wobei wir wie im vorherigen Beweis auf \mathbb{R}^m die Maximumsnorm wählen können.

Nach Bemerkung 3.2 gibt es für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ solche Würfel $W_{j,k} \in \mathcal{J}_m$ mit Kantenlänge $r_{j,k} > 0$ für $j \in \mathbb{N}$, dass sie die Nullmenge $N \cap J$ überdecken und die Summe ihrer Maße kleiner gleich $1/k$ ist. Somit liegt das Bild $F(N \cap J)$ in der Vereinigung $\bigcup_j F(W_{j,k})$. Wie in Teil 1) des vorherigen Beweises ist $F(W_{j,k})$ eine Teilmenge eines Würfels $W'_{j,k}$ mit Kantenlänge $Lr_{j,k}$, sodass $F(N \cap J)$ in der Borelmenge $V_k := \bigcup_j W'_{j,k}$ enthalten ist. Wir folgern wir die Abschätzung

$$\lambda_m(V_k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} L^m r_{j,k}^m = L^m \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_m(W_{j,k}) \leq \frac{L^m}{k}$$

Also liegt $F(N \cap J)$ in der Borelmenge $V = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_k$ mit Maß 0. \square

Die größte offene Teilmenge einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ist ihr Inneres A° , das durch $A^\circ = \{x \in A \mid \exists r > 0 : B(x, r) \subseteq A\}$ gegeben ist, siehe Satz 2.22 aus Analysis 2. Diese Menge kann leer sein, auch wenn $\lambda_m(A) = \infty$ ist; etwa im Falle $A = \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Q}^m$.

Wir formulieren nun den *Transformationssatz*, der die Substitutionsregel (3.11) auf Borelmengen im \mathbb{R}^m zeigt. Hierbei benötigt man die Standardvoraussetzungen an die zu integrierende Funktion f auf einer Borelmenge B , die das Bild einer Borelmenge A unter einer C^1 -Funktion Φ ist, und dass die Einschränkung von Φ auf das Innere von A ein Diffeomorphismus ist. Die einzige technische Zusatzvoraussetzung ist, dass $A \setminus A^\circ$ eine λ_m -Nullmenge ist. Dies kann man aber meist leicht nachprüfen und schließt nur recht ‘wilde’ Borelmengen A aus, die einen Rand $\partial A \supseteq A \setminus A^\circ$ mit positiven Maß haben.

Die Hauptschwierigkeiten bei der Anwendung des Satzes sind das Finden einer geeigneten Transformation Φ mit den benötigten Eigenschaften, die Bestimmung des Parameterbereichs A mit $\Phi(A) = B$, sowie die eigentliche Integration. Man beachte, dass Φ auf A nicht injektiv sein muss und $\det \Phi'(x)$ bei $x \in A \setminus A^\circ$ verschwinden kann. Unten und in den Übungen diskutieren wir einige typische Φ .

THEOREM 3.36. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ und $A \in \mathcal{B}_m$ mit $A \subseteq U$ so, dass $X := A^\circ$ nichtleer und $A \setminus A^\circ$ eine λ_m -Nullmenge ist. Ferner sei Φ auf X injektiv, die Menge $B := \Phi(A)$ liege in \mathcal{B}_m und $\det \Phi'(x) \neq 0$ für jedes $x \in X$. Dann ist $Y := \Phi(X)$ offen in \mathbb{R}^m , $\Phi : X \rightarrow Y$ ein Diffeomorphismus und $\lambda_m(B \setminus Y) = 0$.*

Für gegebenes $f : B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir $g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$; $g(x) = f(\Phi(x)) |\det(\Phi'(x))|$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) *Sei $f : B \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann erhalten wir die Transformationsformel*

$$\int_B f(y) \, dy = \int_A f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| \, dx. \quad (3.11)$$

b) *Sei $f : B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist f genau dann auf B integrierbar, wenn g auf A integrierbar ist. In diesem Fall gilt auch die Gleichung (3.11).*

BEWEIS. 1) Zunächst implizieren Korollar 3.37 in Analysis 2 und die Voraussetzungen, dass $Y = \Phi(X)$ offen und die Einschränkung $\Phi : X \rightarrow Y$ ein Diffeomorphismus ist. Auf Grund der Annahmen sind f und g messbar. Weiter liegt die Borelmenge $B \setminus Y$ im Bild $\Phi(A \setminus X)$. Wegen der Voraussetzungen $\lambda_m(A \setminus X) = 0$ und $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, liegt $\Phi(A \setminus X)$ nach Lemma 3.35 in einer λ_m -Nullmenge. Also hat $B \setminus Y$ das Lebesguemaß 0. Gemäß Lemma 3.6 reicht es somit, die Behauptung für $A = X$ und $B = Y$ zu zeigen. Wir betrachten nun Φ nur noch auf X . Ausgehend von Lemma 3.34 zeigen wir im Folgenden die Behauptung in den Schritten der Integraldefinition.

2) Laut Lemma 3.34 gilt die Ungleichung

$$\mu_0(J) := \lambda_m(\Phi(J)) \leq \int_J |\det \Phi'(x)| dx =: \nu_0(J)$$

für alle Intervalle J aus einem Erzeuger \mathcal{E} von $\mathcal{B}(X)$. Weiter kann man die so definierten Abbildungen $\mu_0, \nu_0 : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty)$ zu Maßen μ bzw. ν auf $\mathcal{B}(X)$ fortsetzen, wie wir zu Beginn des Abschnittes gesehen haben. Theorem II.4.5 von [3] (eine flexiblere Version unseres Maßfortsetzungssatzes 1.19) liefert äußere Maße μ^* und ν^* auf $\mathcal{P}(X)$, die μ_0 bzw. ν_0 fortsetzen und deren Einschränkungen auf $\mathcal{B}(X)$ Maße sind. Nach dem Maßeindeutigkeitssatz 1.20 stimmen diese Einschränkungen mit μ bzw. ν überein, da das System \mathcal{E} aus Lemma 3.34 die Bedingungen A) und B) in Theorem 1.20 erfüllt. Aus der oben abgesetzten Ungleichung und Formel (II.4.6) in [3] (das Analogon zu unserem (1.10)) folgt dann die Ungleichung $\mu^*(A) \leq \nu^*(A)$ und damit $\mu(A) \leq \nu(A)$ für jedes $A \in \mathcal{B}(X)$.

3) Sei nun $f : Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ einfach. Es gibt also Zahlen $z_j \geq 0$ und Mengen B_j in $\mathcal{B}(Y)$ für $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $f = \sum_{j=1}^n z_j \mathbb{1}_{B_j}$. Wir setzen $A_j = \Phi^{-1}(B_j) \in \mathcal{B}(X)$. Dabei liegt x genau dann in A_j , wenn $\Phi(x)$ in B_j ist. Schritt 1) impliziert jetzt

$$\begin{aligned} \int_Y f(y) dy &= \sum_{j=1}^n z_j \lambda_m(B_j) = \sum_{j=1}^n z_j \lambda_m(\Phi(A_j)) \leq \sum_{j=1}^n z_j \int_X \mathbb{1}_{A_j} |\det \Phi'| dx \\ &= \int_X \sum_{j=1}^n z_j \mathbb{1}_{B_j}(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx = \int_X f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx. \end{aligned}$$

4) Sei weiter $f : Y \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Nach (2.4) gibt es dann einfache Funktionen $f_n : Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die Ungleichung $f_n \leq f_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllen und für $n \rightarrow \infty$ punktweise gegen f streben. Wir setzen $g_n = (f_n \circ \Phi) |\det \Phi'| : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $n \in \mathbb{N}$. Alle g_n sind messbar und genügen den Beziehungen $g_n \leq g_{n+1}$ und $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$. Levis Theorem 2.21 und Teil 3) liefern somit die Ungleichung

$$\int_Y f(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y f_n(y) dy \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) dx = \int_X f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx.$$

5) Im entscheidenden Schritt nutzen wir die dem Problem innewohnende Symmetrie, um oben eine Gleichung zu erhalten. Wir wenden Teil 4) auf die messbare

Funktion $g : X \rightarrow [0, \infty]$ und den Diffeomorphismus $\Phi^{-1} : Y \rightarrow X$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \int_X g(x) dx &\leq \int_Y g(\Phi^{-1}(y)) |\det(\Phi^{-1})'(y)| dy = \int_Y f(y) |\det \Phi'(x)| |\det \Phi'(x)^{-1}| dy \\ &= \int_Y f(y) dy. \end{aligned}$$

Hier geht die Gleichung $g(\Phi^{-1}(y)) = f(y) |\det \Phi'(x)|$ für $x = \Phi^{-1}(y)$ ein. Zusammen mit Schritt 3) und $g = (f \circ \Phi) |\det \Phi'|$ haben wir Behauptung a) gezeigt.

6) Sei schließlich $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Aussage a) impliziert zunächst

$$\infty > \int_Y f_{\pm}(y) dy = \int_X f_{\pm}(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx = \int_X g_{\pm}(x) dx.$$

Also sind g_{\pm} und damit g integrierbar. Die Formel (3.11) folgt nun mit a) durch

$$\int_Y f(y) dy = \int_Y f_+(y) dy - \int_Y f_-(y) dy = \int_X g_+(x) dx - \int_X g_-(x) dx = \int_X g(x) dx.$$

7) Sei $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Wie in Teil 5) gilt dann $(g \circ \Phi^{-1}) |\det(\Phi^{-1})'| = f$, und diese Funktionen sind gemäß Schritt 6) für g und Φ^{-1} integrierbar. \square

Mittels des Transformationssatzes 3.36 und Lemma 3.33 können wir die (recht einfachen) *affinen Transformationen* durchführen.

BEISPIEL 3.37. Seien $v \in \mathbb{R}^m$ und $T \in L(\mathbb{R}^m)$ mit $\det T \neq 0$ gegeben. Sei $A \in \mathcal{B}_m$ mit $\lambda_m(A \setminus A^\circ) = 0$, $A^\circ \neq \emptyset$, $B = v + TA$ und $f : B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, beziehungsweise messbar und nichtnegativ. Dann liegt B in \mathcal{B}_m und es gilt

$$\int_B f(y) dy = |\det T| \int_A f(v + Tx) dx.$$

Als Beispiel betrachten wir die Streckung $x \mapsto Tx := \lambda x$ auf \mathbb{R}^m mit einem festen Faktor $\lambda > 0$. Hier ist $\det T = \lambda^m$. Für integrierbares $f : B(0, \lambda r) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ folgt

$$\int_{B(0, \lambda r)} f(\lambda x) dx = \lambda^{-m} \int_{B(0, r)} f(y) dy. \quad \diamond$$

Als nächstes diskutieren wir die wichtigste Transformation, die *m-dimensionalen Polarkoordinaten*. Wir hatten in Analysis 2 schon die Fälle $m = 2$ (siehe Beispiel 3.38) und am Rande $m = 3$ (in Beispiel 3.44) besprochen. Allerdings verschieben wir nun den Definitionsbereich der Koordinate φ .

BEISPIEL 3.38. Sei $m \geq 2$. Für die Koordinaten $(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{m-2}) =: (r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^m =: U$ definieren wir die Transformation

$$\Phi_m : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad \Phi_m(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cdots \cos(\theta_{m-2}) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cdots \cos(\theta_{m-2}) \\ r \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \cdots \cos(\theta_{m-2}) \\ \vdots \\ r \sin(\theta_{m-3}) \cos(\theta_{m-2}) \\ r \sin(\theta_{m-2}) \end{pmatrix},$$

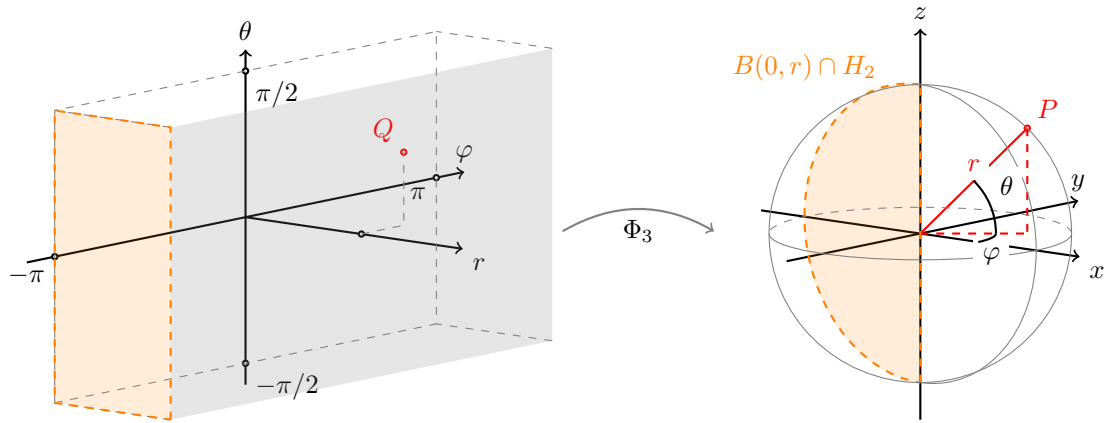


ABBILDUNG 3.3. Kugelkoordinaten im \mathbb{R}^3

wobei $\Phi_2(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ gilt. Für $m = 3$ entspricht hier $\varphi \in (-\pi, \pi]$ dem Längengrad und $\theta = \theta_1 \in [-\pi/2, \pi/2]$ dem Breitengrad auf der Sphäre mit Radius $r > 0$, vergleiche Abbildung 3.3. Offenbar liegt Φ_m in $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Weiter benötigen wir die Hyperhalbebene und den offenen Koordinaten-Quader

$$H_{m-1} := (-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R}^{m-2} \quad \text{bzw.} \quad Q_{m-1} := (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{m-2},$$

wobei $H_1 = (-\infty, 0] \times \{0\}$ und $Q_1 = (-\pi, \pi)$ sind. Dann gelten die Aussagen

- a) $\Phi_m : \mathbb{R}_+ \times Q_{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist injektiv, $|\Phi_m(r, \varphi, \theta)|_2 = r$,
- b) $\Phi_m(\mathbb{R}_+ \times Q_{m-1}) = \mathbb{R}^m \setminus H_{m-1}$, $\Phi_m((0, R) \times Q_{m-1}) = B(0, R) \setminus H_{m-1}$,
- c) $\Phi_m(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \overline{Q_{m-1}}) = \mathbb{R}^m$, $\Phi_m([0, R] \times \overline{Q_{m-1}}) = \overline{B(0, R)}$,
- d) $\det \Phi'_m(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{m-2}) = r^{m-1} \cos(\theta_1) \cos^2(\theta_2) \cdot \dots \cdot \cos^{m-2}(\theta_{m-2})$, (3.12)

für alle $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{m-1}$ und $R > 0$. Speziell erhalten wir

$$\det \Phi'_2(r, \varphi) = r \quad \text{und} \quad \det \Phi'_3(r, \varphi, \theta) = r^2 \cos \theta.$$

Wir setzen weiter

$$w_{m-2}(\theta) = \cos(\theta_1) \cos^2(\theta_2) \cdot \dots \cdot \cos^{m-2}(\theta_{m-2}).$$

Gemäß Behauptung a) liegt $\Phi_m(r, \varphi, \theta)$ auf der Sphäre um 0 mit Radius r . Ferner ist $\det \Phi'_m$ positiv auf $\mathbb{R}_+ \times Q_{m-1}$, sodass $\Phi_m : \mathbb{R}_+ \times Q_{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus H_{m-1}$ diffeomorph ist (siehe Korollar 3.37 in Analysis 2). Man beachte, dass $\det \Phi'_m(r, \varphi, \theta)$ für $r = 0$ oder $|\theta_k| = \pi/2$ verschwindet und z.B. $\Phi(r, -\pi, \theta) = \Phi(r, \pi, \theta)$ ist.

BEWEIS. Wir zeigen die obigen Aussagen per Induktion, die auf der Beziehung

$$\Phi_{m+1}(r, \varphi, \theta') = \begin{pmatrix} \Phi_m(r, \varphi, \theta) \cos \theta_{m-1} \\ r \sin \theta_{m-1} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

für alle $(r, \varphi, \theta') \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ mit $\theta' = (\theta, \theta_{m-1})$ und $m \geq 2$ beruht. Der Fall $m = 2$ folgt aus den Beispielen 3.16 und 3.38 in Analysis 2. Wir nehmen an, die Behauptungen a)–d) würden für ein $m \geq 2$ gelten.

a) Zunächst ergibt sich aus (3.13) und der Induktionsvoraussetzung die Gleichung

$$|\Phi_{m+1}(r, \varphi, \theta')|_2^2 = \cos^2(\theta_{m-1}) |\Phi_m(r, \varphi, \theta)|_2^2 + r^2 \sin^2(\theta_{m-1}) = r^2$$

für alle $(r, \varphi, \theta') \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m$, sodass der zweite Teil von Aussage a) gezeigt ist. Für Koordinaten (r, φ, θ') und $(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{\theta}')$ in $\mathbb{R}_+ \times Q_m$ gelte weiter $\Phi_{m+1}(r, \varphi, \theta') = \Phi_{m+1}(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{\theta}')$. Nach dem eben Gezeigten ist r gleich \bar{r} . Da der Sinus auf $(-\pi/2, \pi/2)$ injektiv ist, folgt dann aus der letzten Zeile von (3.13) die Identität $\theta_{m-1} = \bar{\theta}_{m-1}$. Ferner ist der Kosinus auf $(-\pi/2, \pi/2)$ positiv, sodass die ersten m Zeilen von (3.13) und die Induktionsvoraussetzung die Gleichheit $(\varphi, \theta) = (\bar{\varphi}, \bar{\theta})$ liefern. Also ist Φ_{m+1} auf $\mathbb{R}_+ \times Q_m$ injektiv.

b) Sei der Punkt $x' = (x, x_{m+1})$ in $\mathbb{R}^{m+1} \setminus H_m$ gegeben. Daraus folgt $x \neq 0$. Um das Urbild von x' unter Φ_{m+1} zu konstruieren, setzen wir $r = |x'|_2 > 0$ und $\theta_{m-1} = \arcsin(x_{m+1}/r) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Somit gilt $x_{m+1} = r \sin \theta_{m-1}$. Wir definieren weiter $y = (\cos \theta_{m-1})^{-1} x \in \mathbb{R}^m \setminus H_{m-1}$. Dieser Vektor hat auch das Längenquadrat

$$|y|_2^2 = \frac{|x|_2^2}{\cos^2 \theta_{m-1}} = \frac{r^2 - x_{m+1}^2}{1 - \sin^2 \theta_{m-1}} = \frac{r^2 - r^2 \sin^2 \theta_{m-1}}{1 - \sin^2 \theta_{m-1}} = r^2.$$

Gemäß Induktionsvoraussetzung gibt es Winkel $(\varphi, \theta) \in Q_{m-1}$ mit $\Phi_m(r, \varphi, \theta) = y$ und somit $x = \cos(\theta_{m-1}) \Phi_m(r, \varphi, \theta)$. Die Beziehung (3.13) zeigt nun die gewünschte Gleichung $\Phi_{m+1}(r, \varphi, \theta') = x'$. Den zweiten Teil von b) und die Behauptung c) beweist man ähnlich. (Verwende $\Phi_m(0) = 0$ und $\arcsin(\pm 1) = \pm \pi/2$.)

d) Sei wieder $(r, \varphi, \theta') \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m$. Ausgehend von (3.13) berechnen wir die Jacobimatrix von Φ_{m+1} in m plus 1 Blockform als

$$\Phi'_{m+1}(r, \varphi, \theta') = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{m-1}) \Phi'_m(r, \varphi, \theta) & -\sin(\theta_{m-1}) \Phi_m(r, \varphi, \theta) \\ \sin(\theta_{m-1}) & 0 \cdots 0 & r \cos(\theta_{m-1}) \end{pmatrix}$$

Wir entwickeln die Determinante dieser Matrix nach der letzten Zeile und erhalten

$$\begin{aligned} \det \Phi'_{m+1}(r, \varphi, \theta') &= (-1)^{m+2} \sin(\theta_{m-1}) \det J + (-1)^{2m+2} r \cos(\theta_{m-1}) \det[\cos(\theta_{m-1}) \Phi'_m(r, \varphi, \theta)] \\ &= (-1)^{m+2} \sin(\theta_{m-1}) \det J + r \cos^{m+1}(\theta_{m-1}) r^{m-1} w_{m-2}(\theta), \end{aligned}$$

wobei auch die Induktionsvoraussetzung einging und wir

$$J = \left(\cos(\theta_{m-1}) \partial_{\varphi, \theta} \Phi_m(r, \varphi, \theta) \quad -\sin(\theta_{m-1}) \Phi_m(r, \varphi, \theta) \right) \in L(\mathbb{R}^m)$$

gesetzt haben. Nun gilt $\Phi_m(r, \varphi, \theta) = r \partial_r \Phi_m(r, \varphi, \theta)$, sodass wir mittels $(m-1)$ -fachem Spaltentauschen und der Induktionsvoraussetzung die Beziehung

$$\begin{aligned} \det J &= -(-1)^{m-1} \cos^{m-1}(\theta_{m-1}) r \sin(\theta_{m-1}) \det \Phi'_m(r, \varphi, \theta) \\ &= (-1)^m r^m \cos^{m-1}(\theta_{m-1}) \sin(\theta_{m-1}) w_{m-2}(\theta) \end{aligned}$$

herleiten können. Zusammen genommen folgt nun wie gefordert

$$\begin{aligned} \det \Phi'_{m+1}(r, \varphi, \theta') &= r^m w_{m-2}(\theta) \cos^{m-1}(\theta_{m-1}) (\sin^2(\theta_{m-1}) + \cos^2(\theta_{m-1})) \\ &= r^m w_{m-1}(\theta'). \end{aligned} \quad \square$$

Als eine Standardanwendung berechnen wir das Volumen von Kugeln.

BEISPIEL 3.39. Das Volumen der m -dimensionalen Kugeln um 0 ist

$$\lambda_m(\overline{B}(0, R)) = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} R^m = \begin{cases} \frac{\pi^{m/2}}{(m/2)!} R^m, & m \text{ gerade,} \\ \frac{2(2\pi)^{\frac{m}{2}-\frac{1}{2}}}{m(m-2)\dots\cdot 3\cdot 1} R^m, & m \text{ ungerade,} \end{cases}$$

für $R > 0$. Die Gammafunktion Γ wurde in Beispiel 3.32 d) wiederholt. Laut Beispiel 1.28 in Analysis 2 und Beispiel 3.42 unten genügt sie den Beziehungen

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad x\Gamma(x) = \Gamma(x+1), \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (3.14)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$. Aus diesen Eigenschaften folgt induktiv die zweite obige Gleichung für $\lambda_m(\overline{B}(0, R))$. Wir erhalten ferner

$$\kappa_m := \lambda_m(\overline{B}(0, 1)) = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} = \frac{2\pi^{m/2}}{m\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{2\pi}{m} \int_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{m-2}} w_{m-2}(\theta) d\theta \quad (3.15)$$

für $m \in \mathbb{N}$. Es gelten insbesondere $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = \pi$ und $\kappa_3 = \frac{4\pi}{3}$.

BEWEIS. Wir wollen den Transformationssatz 3.36 und die obigen Aussagen über Φ_m verwenden. Zunächst ist die Menge $\overline{B}(0, R)$ abgeschlossen und damit Borelsch. Sie ist das Bild $\Phi_m(A)$ der Borelmenge $A = [0, R] \times \overline{Q_{m-1}}$. Auf dem Inneren $A^\circ = (0, R) \times Q_{m-1}$ ist Φ_m injektiv und hat eine positive Determinante. Schließlich ist die Differenz $A \setminus A^\circ$ die endliche Vereinigung von Teilmengen von Hyperebenen und damit eine Nullmenge. Somit liefern Theorem 3.36, die Formel (3.12) und Fubinis Theorem 3.29 a) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_m(\overline{B}(0, R)) &= \int_{\overline{B}(0, R)} 1 dy = \int_A |\det \Phi'(x)| dx \\ &= \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^{m-1} \cos(\theta_1) \dots \cos^{m-2}(\theta_{m-2}) d\theta_{m-2} \dots d\theta_1 d\varphi dr \\ &= \int_0^R r^{m-1} dr \int_{-\pi}^{\pi} 1 d\varphi \prod_{k=1}^{m-2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^k t dt = \frac{2\pi}{m} R^m \prod_{k=1}^{m-2} 2 \int_0^{\pi/2} \cos^k t dt. \end{aligned}$$

Die Zerlegung in skalare Integrale wurde in einer Übung diskutiert. Für $m = 2$ ist dabei das Produkt \prod gleich 1 gesetzt. Die abgesetzten Formeln zeigen die letzte Gleichung in (3.15). Wir bezeichnen weiter das letzte Integral mit I_k für $k \in \mathbb{N}_0$. Es gelten $I_0 = \pi/2$ und $I_1 = 1$.⁴ Für $k \geq 2$ liefert partielle Integration die Rekursion

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \cos^{k-1}(t) \cos(t) dt$$

⁴Die folgenden Rechnungen waren nicht Teil der Vorlesung; zum Teil waren sie Gegenstand einer Übung in Analysis 2.

$$\begin{aligned}
&= (k-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{k-2}(t) \sin^2(t) dt + \cos^{k-1}(t) \sin(t) \Big|_0^{\pi/2} \\
&= (k-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{k-2}(t) dt - (k-1) \int_0^{\pi/2} \cos^k(t) dt, \\
I_k &= \frac{k-1}{k} I_{k-2}.
\end{aligned}$$

Daraus folgen nun für gerade m die Gleichungen

$$\begin{aligned}
I_m &= \frac{m-1}{m} I_{m-2} = \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)} I_{m-4} = \cdots = \frac{(m-1)(m-3) \cdots 1}{m(m-2) \cdots 2} \frac{\pi}{2}, \\
I_{m-1} &= \frac{m-2}{m-1} I_{m-3} = \frac{(m-2)(m-4)}{(m-1)(m-3)} I_{m-5} = \cdots = \frac{(m-2)(m-4) \cdots 2}{(m-1)(m-3) \cdots 3} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Analog gelten für ungerade m

$$I_m = \frac{(m-1)(m-3) \cdots 2}{m(m-2) \cdots 3} \quad \text{und} \quad I_{m-1} = \frac{(m-2)(m-4) \cdots 3}{(m-1)(m-3) \cdots 2} \frac{\pi}{2}.$$

Zusammen erhalten wir

$$2m I_m I_{m-1} = \pi.$$

Wir zeigen nun die Formel (3.15) für $\kappa_m = \lambda_m(\overline{B}(0,1))$ per Induktion über m . Für $m=1$ und $m=2$ gilt sie auf Grund von (3.14) und Beispiel 3.27. Die Behauptung sei für ein m erfüllt. Dann liefern die obigen Resultate und die Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
\kappa_{m+2} &= \frac{2^{m+1}\pi}{m+2} I_1 \cdots I_m = \frac{2^{m-1}\pi}{m} I_1 \cdots I_{m-2} \frac{4m}{m+2} I_{m-1} I_m \\
&= \kappa_m \frac{2\pi}{m+2} = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m+2}{2})} \frac{\pi}{\frac{m+2}{2}} = \frac{\pi^{\frac{m+2}{2}}}{\Gamma(\frac{m+4}{2})}.
\end{aligned}$$

Genauso schließt man vom Fall $m-1$ auf $m+1$. □

Wir wenden die Polarkoordinaten auf *radiale* Funktionen an, wofür sie besonders geeignet sind.

BEISPIEL 3.40. Seien $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Intervall, $a = \inf I$, $b = \sup I$ und $\phi : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Wir definieren die Kugelschale $S = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x|_2 \in I\}$ und die radiale Funktion

$$f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; \quad f(x) = \phi(|x|_2).$$

Nun ist f genau dann integrierbar, wenn die skalare Abbildung $h : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; h(r) = r^{m-1}\phi(r)$, integrierbar ist. In diesem Fall (oder wenn $\phi \geq 0$ ist) erhalten wir ferner die Gleichung

$$\int_S f(x) dx = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)} \int_a^b r^{m-1} \phi(r) dr. \quad (3.16)$$

Für $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ bezeichnen wir den Vorfaktor als

$$\omega_m := \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)} = m\kappa_m, \quad (3.17)$$

vergleiche (3.15) und Beispiel 4.13. Speziell sind $\omega_2 = 2\pi$ und $\omega_3 = 4\pi$. Für $m = 3$, $\phi(r) = \frac{1}{r}$ und $I = (0, R)$ ergibt sich z.B.

$$\int_{B(0,R)\setminus\{0\}} \frac{dx}{|x|_2} = \omega_3 \int_0^R \frac{r^2}{r} dr = 2\pi R^2.$$

BEWEIS. Die Menge $A := I \times \overline{Q_{m-1}}$ liegt in \mathcal{B}_m , $A \setminus A^\circ$ ist eine λ_m -Nullmenge und Beispiel 3.38 impliziert die Gleichung $\Phi_m(A) = S$. Weiter ist Φ_m auf $A^\circ = I^\circ \times Q_{m-1}$ injektiv, und dort ist $\det \Phi'_m$ positiv. Nach dem Transformationssatz 3.36 und (3.12) ist somit die Integrierbarkeit von f äquivalent zu der der Funktion $g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$g(r, \varphi, \theta) = f(\Phi_m(r, \varphi, \theta)) |\det \Phi'_m(r, \varphi, \theta)| = \phi(r) r^{m-1} w_{m-2}(\theta).$$

Fubinis Theorem 3.29 a) und (3.15) liefern weiter

$$\begin{aligned} \int_S |g| d(r, \varphi, \theta) &= \int_I |\phi(r)| r^{m-1} dr \int_{-\pi}^{\pi} 1 d\varphi \int_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{m-2}} w_{m-2}(\theta) d\theta \\ &= m\kappa_m \int_I |\phi(r)| r^{m-1} dr. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung zur Integrierbarkeit. Wenn wir die Beträge weglassen, folgt entsprechend aus (3.11) die Formel (3.16) für das Integral. \square

Man kann nun mittels Potenzfunktionen wichtige hinreichende Kriterien für die Integrierbarkeit angeben. Man beachte die Dimensionsabhängigkeit. Im letzten Kapitel werden wir dies noch verfeinern.

SATZ 3.41. Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und es gelte

$$|f(x)| \leq \left\{ \begin{array}{ll} c|x|_2^{-m+\varepsilon}, & 0 < |x|_2 \leq 1 \\ c|x|_2^{-m-\varepsilon}, & 1 < |x|_2 \end{array} \right\} =: g(x)$$

für Konstanten $c, \varepsilon > 0$. Dann ist f integrierbar.

BEWEIS. Formel (3.16) liefert

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} g(x) dx &= c\omega_m \int_0^1 r^{-m+\varepsilon} r^{m-1} dr + c\omega_m \int_1^\infty r^{-m-\varepsilon} r^{m-1} dr \\ &= c\omega_m \int_0^1 r^{-1+\varepsilon} dr + c\omega_m \int_1^\infty r^{-1-\varepsilon} dr. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist nach Beispiel 1.24 in Analysis 2 endlich. Satz 2.26 zeigt dann die Integrierbarkeit von f . \square

Wir berechnen noch den Wert eines der wichtigsten Integrale in der Analysis.

BEISPIEL 3.42. Es gelten die Formeln

$$J_m := \int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} dx = \pi^{m/2} \quad \text{und} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

BEWEIS. Fubinis Theorem 3.29 a) liefert

$$J_m = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} \cdots e^{-x_m^2} dx_1 \cdots dx_m = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^m = J_1^m.$$

Wir betrachten zunächst den Fall $m = 2$. Mit Theorem 3.29 a) und dem Transformationssatz 3.36 für Polarkoordinaten berechnen wir

$$\begin{aligned} J_1^2 = J_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = \pi \int_0^{\infty} 2re^{-r^2} dr \\ &= \pi \int_0^{\infty} e^{-s} ds = \pi, \end{aligned}$$

wobei wir auch $s = r^2$ substituiert und am Ende Beispiel 1.24 in Analysis 2 verwendet haben. Also gilt $J_1 = \sqrt{\pi}$ und folglich die erste Behauptung. Mit der Substitution $t = s^2$ erhalten wir weiter

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} \frac{2s}{s} e^{-s^2} ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}. \quad \square$$

Oberflächenintegral und Integralsätze

In diesem Kapitel übertragen wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, sowie die Regel der partiellen Integration aus Analysis 2 auf das Lebesguesche Integral für λ_m . Dabei treten Randterme auf, die im Eindimensionalen einfach durch die Differenz zweier Werte einer Stammfunktion gegeben waren. Im \mathbb{R}^m benötigt man hierfür Oberflächenintegrale, die wir unten einführen und diskutieren. Dies erfordert zunächst einige Vorbereitungen zu Hyperflächen, wobei wir uns auf das Nötigste beschränken. Wir betrachten stets Borelsche σ -Algebren.

4.1. Etwas Differentialgeometrie

Wir wiederholen und ergänzen den Stoff, der in Analysis 2 von Definition 3.42 bis Bemerkung 3.45 behandelt wurde. Es sei durchweg $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$.

DEFINITION 4.1. *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt (eingebettete) C^1 -Hyperfläche, wenn es für jedes $x \in M$ offene Mengen $\tilde{U}, V \subseteq \mathbb{R}^m$ und einen Diffeomorphismus $\psi : V \rightarrow \tilde{U}$ so gibt, dass x in V liegt und die Gleichung*

$$\psi(V \cap M) = \tilde{U} \cap (\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})$$

gilt. Die Abbildung ψ heißt dann Karte und V Kartengebiet.

Für $m = 3$ spricht man von Flächen und für $m = 2$ von Kurven statt von Hyperflächen. Wenn in Definition 4.1 die Funktionen ψ für jedes $x \in M$ in $C^k(V, \mathbb{R}^m)$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ liegen, dann ist M eine C^k -Hyperfläche. Man kann in der Definition statt \mathbb{R}^{m-1} auch allgemeiner \mathbb{R}^l mit $l \in \{1, \dots, m-1\}$ betrachten und erhält dann ‘ l -dimensionale Untermannigfaltigkeiten’ des \mathbb{R}^m . Bei uns ist $l = m-1$.

Der obige Begriff besagt, dass man eine C^1 -Hyperfläche lokal um jeden Punkt zu einem Hyperebenenstück im \mathbb{R}^m glatt ‘aufbiegen’ kann und dabei eine Umgebung im \mathbb{R}^m diffeomorph mitabbildet. Dies veranschaulicht Abbildung 4.1. Man braucht diese ‘lokale’ Begrifflichkeit sowohl für die Beweise (z.B. von Satz 3.43 in Analysis 2) als auch um Hyperflächen darzustellen (siehe Beispiel 4.13 unten).

Sei $R > 0$ und $\delta \in (-1, 1)$. Die Sphäre $S := \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x|_2^2 - R^2 = 0\}$ und die in S offene Sphärenkappe $S_\delta := \{x \in S \mid x_m > \delta R\}$ sind C^1 -Hyperflächen, vergleiche Teil 1) von Bemerkung 4.3 a). Diese Beispiele sollte man vor Augen haben. Die abgeschlossene Kappe $\overline{S}_\delta = \{x \in S \mid x_m \geq \delta R\}$ ist wegen der relativen Randpunkte mit $x_m = \delta R$ keine C^1 -Hyperfläche in unserem Sinne. Weiter schließt

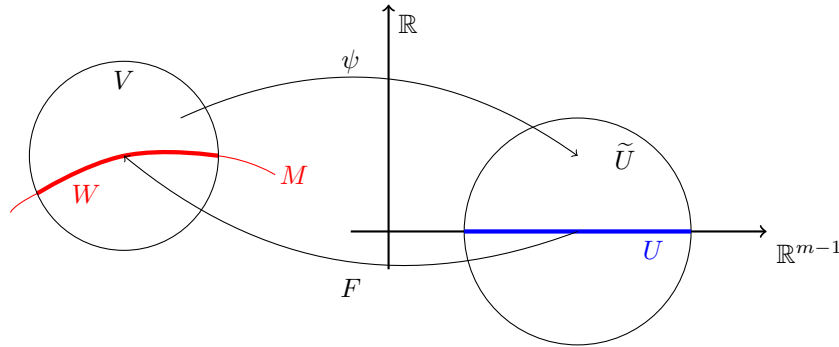


ABBILDUNG 4.1. Eine C^1 -Hyperfläche M mit einer Karte ψ und einer Parametrisierung F .

Definition 4.1 Objekte mit Ecken, Kanten, Spitzen, Schlitzten, Selbstberührungen und -durchdringungen aus. Definition 4.14 wird aber einige dieser Fälle abdecken.

Für die Integrationstheorie ist es wichtig, die Hyperfläche M mit abzählbar vielen Kartengebieten V zu überdecken. Dabei kann man auch Mengen V mit weiteren Eigenschaften auswählen.

BEMERKUNG 4.2. Sei M eine C^1 -Hyperfläche.

a) In Definition 4.1 kann man das Kartengebiet V durch eine offene und beschränkte Teilmenge V_0 mit $\bar{V}_0 \subseteq V$ und $x \in V_0$ ersetzen, sowie das Bild $\tilde{U}_0 := \psi(V_0) \subseteq \tilde{U}$ verwenden, wobei \tilde{U}_0 wegen der Stetigkeit von ψ^{-1} offen ist. Wenn man hier den Index wieder weglässt, erfüllen V und \tilde{U} nach wie vor die Eigenschaften in der Definition und sind zusätzlich beschränkt. Weiter besitzen dann ψ und ψ^{-1} samt ihrer Ableitungen stetige Fortsetzungen auf \bar{V} bzw. \tilde{U} (und sind damit nach dem Satz vom Maximum beschränkt). Auf diese Weise kann man auch erreichen, dass V ein Quader oder eine Kugel ist.

b) Es gibt abzählbar viele Karten $\psi_j : V_j \rightarrow \tilde{U}_j$, $j \in J$, wie in Definition 4.1 derart, dass M in $\bigcup_{j \in J} V_j$ liegt. Somit ist $M = \bigcup_{j \in J} \psi_j^{-1}(\tilde{U}_j \cap (\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}))$ in \mathcal{B}_m enthalten. Dabei kann man Kartengebiete V_j wie in Teil a) verwenden.

BEWEIS. Wir wählen für jedes $x \in M$ eine Menge V_x wie in Definition 4.1. Die Vereinigung O aller V_x ist laut Satz 2.20 in Analysis 2 offen. Wir setzen nun

$$A_n = \left\{ x \in O \mid |x|_2 \leq n, d(x, \partial O) = \inf_{y \in \partial O} |x - y|_2 \geq 1/n \right\}.$$

für $n \in \mathbb{N}$. Laut Bemerkung 2.35 in Analysis 2 ist die Abbildung $x \mapsto d(x, \partial O)$ stetig auf \bar{O} und verschwindet nur auf ∂O . Somit ist jede Menge A_n abgeschlossen und offenbar beschränkt. Ferner ist O die Vereinigung aller A_n .

Wir definieren weiter $M_n = A_n \cap M$ für $n \in \mathbb{N}$. Jeder dieser Mengen ist beschränkt. Sei (x_i) eine Folge in einem M_n , die in \mathbb{R}^m gegen einen Punkt \hat{x} konvergiert. Dann liegt \hat{x} in A_n und damit in O . Deswegen ist \hat{x} in einem Kartengebiet \hat{V} mit der zugehörigen Karte $\hat{\psi}$ enthalten. Für jedes genügend große i befindet sich auch der

Punkt x_i in der offenen Menge \hat{V} , und er erfüllt $\hat{\psi}(x_i) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ als Element von M . Im Grenzwert erhalten wir also $\hat{\psi}(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$, sodass \hat{x} in M und folglich in $M_n = A_n \cap M$ liegt. Deshalb ist M_n abgeschlossen und somit kompakt laut Theorem 2.44 von Bolzano–Weierstraß in Analysis 2.

Da M_n von den offenen Mengen V_x zu $x \in M_n$ überdeckt wird, liefert Theorem 2.46 von Heine–Borel aus Analysis 2 endliche viele $V_{x_k} =: V_{n,k}$, deren Vereinigung M_n umfasst. Somit liegt M in der (abzählbaren) Vereinigung aller Mengen $V_{n,k} =: V_j$ (mit $j \in J$) und also auch in $\bigcup_{j \in J} \psi_j^{-1}(\tilde{U}_j \cap (\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}))$ für die zugehörigen Karten $\psi_j : V_j \rightarrow \tilde{U}_j$. Die andere Inklusion gilt laut Definition 4.1. \square

c) Sei M kompakt. Dann kann man mittels Theorem 2.46 aus Analysis 2 in Teil b) eine endliche Indexmenge J wählen. \diamond

Es gibt drei weitere äquivalente Beschreibungen von C^1 -Hyperflächen, wie wir für $m = 3$ in Satz 3.43 aus Analysis 2 bewiesen hatten. Die dortigen Beweise übertragen sich leicht auf beliebige $m \geq 2$. Wenn man zudem wie in Bemerkung 4.2 b) argumentiert, erhält man die folgenden Charakterisierungen. Für diese diskutieren wir außerdem Verfeinerungen und Spezialfälle

BEMERKUNG 4.3. a) Eine Teilmenge M des \mathbb{R}^m ist genau dann eine C^1 -Hyperfläche, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt.

- 1) Es gibt abzählbar viele offene Teilmengen $D_j \subseteq \mathbb{R}^m$ und Funktionen $g_j \in C^1(D_j, \mathbb{R})$ für $j \in J_1$ derart, dass $\nabla g_j(x) \neq 0$ für alle $x \in D_j$ und

$$M_j := M \cap D_j = \{x \in D_j \mid g_j(x) = 0\}$$

für alle $j \in J_1$ gelten, sowie $M = \bigcup_{j \in J_1} M_j$ ist.

- 2) Es gibt abzählbar viele offene Teilmengen $I_j \subseteq \mathbb{R}$ und $U'_j \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$, Abbildungen $h_j \in C^1(U'_j, \mathbb{R})$ und Indizes $i(j) \in \{1, \dots, m\}$ für $j \in J_2$ derart, dass $h_j(U'_j) \subseteq I_j$,

$$M_j := M \cap Z_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid \hat{x}^{i(j)} \in U'_j, x_{i(j)} = h_j(\hat{x}^{i(j)}) \right\}$$

für alle $j \in J_2$ und $M = \bigcup_{j \in J_2} M_j$ gelten. Dabei schreiben wir $\hat{x}^i = (x_l)_{l \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}}$ und $Z_j = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_{i(j)} \in I_j, \hat{x}^{i(j)} \in U'_j\}$.

- 3) Es gibt abzählbar viele offene Teilmengen $U_j \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ und $W_j \subseteq \mathbb{R}^m$ und Abbildungen $F_j \in C^1(U_j, \mathbb{R}^m)$ für $j \in J_3$ derart, dass

$$F_j : U_j \rightarrow M_j := M \cap W_j \quad \text{bijektiv}$$

mit stetiger Inversen und $\text{Rang } F'_j(t) = m - 1$ für alle $t \in U_j$ und $j \in J_3$ ist, sowie $M = \bigcup_{j \in J_3} M_j$ gilt. Man nennt $F_j : U_j \rightarrow W_j$ *Parametrisierung* von M_j .

b) Wie in Bemerkung 4.2 kann man in Teil a) annehmen, dass alle auftretenden Mengen (außer M) beschränkt sind und dass die gemachten Bedingungen auch auf dem Rand der jeweiligen Definitionsbereiche gelten. Insbesondere sind dann alle auftretenden Funktionen beschränkt. Weiter können wir erreichen, dass die

Mengen D_j , I_j , U'_j und U_j Quader oder Kugeln sind. Wenn M kompakt ist, können zusätzlich die Indexmengen J_i endlich gewählt werden.

c) Sei $F_j : U_j \rightarrow W_j$ eine Parametrisierung. Wie im Beweis von Satz 3.43 in Analysis 2 kann man dann für jedes $t_0 \in U_j$ eine zugehörige Karte $\psi_j : V_j \rightarrow \tilde{U}_j$ so wählen, dass $t_0 \in \tilde{U}_j \cap (\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}) =: U_{j,0} \subseteq U_j$ und $\psi_j^{-1}(t, 0) = F_j(t)$ für alle $t \in U_{j,0}$ gelten. Man kann dann U_j durch $U_{j,0}$ ersetzen. Diese Situation ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

d) Im Falle einer Darstellung als Graph von $h_j =: h : U \rightarrow Z = U' \times I$ mit $i(j) = m$ in Aussage 2) von Behauptung a) erhalten wir die Ausdrücke

$$F(t) = \begin{pmatrix} t \\ h(t) \end{pmatrix}, \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} x' \\ x_m - h(x') \end{pmatrix}, \quad g(x) = x_m - h(x') \quad (4.1)$$

für $t \in U' \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ bzw. $x = (x', x_{m-1}) \in Z \subseteq \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$. (Siehe den Beweis von Satz 3.43 in Analysis 2.) \diamond

Parametrisierungen spielen in der Integrationstheorie die wichtigste Rolle, wobei Graphendarstellungen Beweise vereinfachen können. Wie wir schon in Beispiel 3.44 aus Analysis 2 gesehen haben, brauchen wir aber oft mehrere Abbildungen F_j bzw. h_j um eine Fläche zu beschreiben, siehe auch Beispiel 4.13 unten für den Fall der Sphäre. In den Beispielen vor Bemerkung 4.2 haben wir eine Darstellung durch Nullstellenmengen für $g(x) = |x|_2^2 - R^2$ mit $D = \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ bzw. $D = \{x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \mid x_m > \delta R\}$ verwendet. Im Gegensatz zu den Parametrisierungen kommt man hier bequemerweise mit einer Abbildung aus. Zur weiteren Illustration betrachten wir nun Teilmengen von Sphären, die man als einen Graphen oder durch eine Parametrisierung darstellen kann. In beiden folgenden Beispielen gelten übrigens die in Bemerkung 4.3 b) genannten Eigenschaften nur zum Teil.

BEISPIEL 4.4. a) Die obere Halbsphäre $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x|_2 = R, x_m > 0\}$ ist der Graph von $h(x') = (R^2 - |x'|_2^2)^{1/2}$ für $x' \in B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$.

b) Die geschlitzte Sphäre $S' = S \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R}^{m-2})$ mit Radius $R > 0$ wird durch die *sphärischen Koordinaten* $F(\varphi, \theta) = \Phi_m(R, \varphi, \theta)$, also durch

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad F(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{m-2}) = R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cdots \cos(\theta_{m-2}) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cdots \cos(\theta_{m-2}) \\ \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \cdots \cos(\theta_{m-2}) \\ \vdots \\ \sin(\theta_{m-3}) \cos(\theta_{m-2}) \\ \sin(\theta_{m-2}) \end{pmatrix}$$

mit $U = (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{m-2}$ parametrisiert, vergleiche Beispiel 3.38. (Für $m = 2$ fallen dabei die Variablen θ_k weg.) In der Tat zeigen die Aussagen in diesem Beispiel, dass $F : U \rightarrow S'$ bijektiv mit einer stetigen Inversen ist und dass $F \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ eine Jacobimatrix mit vollen Rang besitzt. \diamond

Wie in Bemerkung 3.45 aus Analysis 2 kann man die obigen Darstellungen benutzen, um Tangentialhyperebenen und Normalenvektoren zu erklären. Diese Begriffe vertiefen wir hier nicht, verwenden jedoch Normalen in Abschnitt 4.3.

BEMERKUNG 4.5. Sei M eine C^1 -Hyperfläche, die bei $x \in M$ wie in Bemerkung 4.3 a) beschrieben ist, wobei wir den Index j weglassen.

a) Die *Tangentialhyperebene* $T_x M$ an M bei $F(t) = x$ wird durch $\partial_k F(t)$, oder durch $(e_k, \partial_k h(x'))^\top$ in der Graphendarstellung, für $k \in \{1, \dots, m-1\}$ aufgespannt.

b) Eine *Normale* an M bei x ist durch $\nabla g(x)$, oder durch $(-\nabla h(x'), 1)^\top$ in der Graphendarstellung, gegeben. \diamond

4.2. Oberflächenintegral

Wir definieren unten das Oberflächenmaß und -integral zuerst auf einem (*offenem*) *Flächenstück* $M_0 = F(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ mit der Parametrisierung $F : U \rightarrow W$. Die Abbildung F ‘biegt’ hier die flache Menge $U \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ zu M_0 auf. Dabei kann der Flächeninhalt lokal verzerrt werden. Diese Verzerrung wird durch die Wurzel der Funktion $g_F(t) = \det(F'(t)^\top F'(t))$ beschrieben. Die Matrix $F'(t)^\top F'(t) \in L(\mathbb{R}^{m-1})$ ist symmetrisch und auch positiv definit, da $F'(t)$ wegen des vollen Rangs auch injektiv ist, also $(F'(t)^\top F'(t)v|v) = |F'(t)v|_2^2 > 0$ für $v \in \mathbb{R}^{m-1} \setminus \{0\}$ gilt.

DEFINITION 4.6. Sei $F : U \rightarrow W$ eine Parametrisierung. Dann heißt

$$g_F(t) = \det(F'(t)^\top F'(t)) > 0$$

die Gramsche Determinante von F . Für $m = 3$ ergibt sich

$$g_F(t) = |\partial_1 F(t) \times \partial_2 F(t)|_2^2 = \left| \begin{pmatrix} \partial_1 F_2(t) \partial_2 F_3(t) - \partial_1 F_3(t) \partial_2 F_2(t) \\ \partial_1 F_3(t) \partial_2 F_1(t) - \partial_1 F_1(t) \partial_2 F_3(t) \\ \partial_1 F_1(t) \partial_2 F_2(t) - \partial_1 F_2(t) \partial_2 F_1(t) \end{pmatrix} \right|_2^2.$$

Für $m = 3$ steht das *Vektorprodukt* $\partial_1 F(t) \times \partial_2 F(t)$ senkrecht auf der Tangentialebene $T_{F(t)} M$ bei $F(t)$ und seine euklidische Norm ist gleich der Fläche des von $\partial_1 F(t)$ und $\partial_2 F(t)$ aufgespannten Parallelogramms, siehe Abschnitt 5.2 in [4]. Wir besprechen zunächst die für diese Vorlesung wichtigsten Beispiele.

BEISPIEL 4.7. a) Sei $R > 0$. Für die geschlitzte Sphäre S' mit der Parametrisierung aus Beispiel 4.4 b) gilt $g_F(\varphi)^{1/2} = R$ für $m = 2$ und

$$g_F(\varphi, \theta)^{\frac{1}{2}} = R^{m-1} \cos(\theta_1) \cos^2(\theta_2) \cdot \dots \cdot \cos^{m-2}(\theta_{m-2}) \quad (4.2)$$

für $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{m-2}$ und $m \geq 3$. Im Falle $m = 3$ erhalten wir also

$$g_F(\varphi, \theta)^{\frac{1}{2}} = R^2 \cos(\theta), \quad (\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

BEWEIS¹. Man prüft für $m = 2$ die Gleichung $g_F(\varphi) = R^2$ leicht nach. Die Behauptung gelte für ein $m \geq 2$. Wir schreiben vorübergehend F_m statt F . Für

¹In der Vorlesung wurde die Behauptung nur für $m = 3$ bewiesen.

$\theta' = (\theta, \theta_{m-1}) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{m-1}$, wobei θ für $m = 2$ wegfällt, erhalten wir

$$F_{m+1}(\varphi, \theta') = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{m-1})F_m(\varphi, \theta) \\ R \sin(\theta_{m-1}) \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$F'_{m+1}(\varphi, \theta') = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{m-1})F'_m(\varphi, \theta) & -\sin(\theta_{m-1})F_m(\varphi, \theta) \\ 0 & R \cos(\theta_{m-1}) \end{pmatrix}.$$

Mit den Abkürzungen $t' := (\varphi, \theta')$ und $t := (\varphi, \theta)$ folgen daraus die Identitäten

$$\begin{aligned} & F'_{m+1}(t')^\top F'_{m+1}(t') \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta_{m-1})F'_m(t)^\top F'_m(t) & -\sin(\theta_{m-1})\cos(\theta_{m-1})F'_m(t)^\top F_m(t) \\ -\sin(\theta_{m-1})\cos(\theta_{m-1})F_m(t)^\top F'_m(t) & \sin^2(\theta_{m-1})|F_m(t)|_2^2 + R^2 \cos^2(\theta_{m-1}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta_{m-1})F'_m(t)^\top F'_m(t) & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} =: G, \end{aligned}$$

wobei wir die Gleichung $R^2 = |F_m(\varphi, \theta)|_2^2$ und ihre Konsequenz $0 = \partial_{\varphi, \theta} |F_m(\varphi, \theta)|_2^2 = 2F_m(\varphi, \theta)^\top F'_m(\varphi, \theta) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ verwenden. Eine Entwicklung der Determinante und die Induktionsvoraussetzung liefern die Behauptung durch

$$\begin{aligned} g_{F_{m+1}}(\varphi, \theta') &= \det G = (-1)^{2m} R^2 \cos^{2m-2}(\theta_{m-1}) g_{F_m}(\varphi, \theta) \\ &= R^{2m} \cos^2(\theta_1) \cdot \dots \cdot \cos^{2m-4}(\theta_{m-2}) \cos^{2m-2}(\theta_{m-1}). \quad \square \end{aligned}$$

b) Im Graphenfall $F(t) = (t, h(t))^\top$ für $t \in U$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ offen und $h \in C^1(U, \mathbb{R})$ ist, ergibt sich die Beziehung

$$g_F(t) = 1 + |\nabla h(t)|_2^2, \quad t \in U. \quad (4.3)$$

BEWEIS. Zunächst berechnen wir

$$G(t) := F'(t)^\top F'(t) = \begin{pmatrix} I_{m-1} & \nabla h(t) \\ \nabla h(t)^\top & \end{pmatrix} = I_{m-1} + \nabla h(t) \cdot \nabla h(t)^\top.$$

Wenn $\nabla h(t) = 0$ ist, erhalten wir wie behauptet $g_F(t) = \det G(t) = 1$. Andernfalls ist $\nabla h(t)$ ein Eigenvektor von $G(t)$ zum Eigenwert $1 + |\nabla h(t)|_2^2$, da

$$G(t)\nabla h(t) = \nabla h(t) + \nabla h(t) (\nabla h(t)^\top \nabla h(t)) = \left(1 + |\nabla h(t)|_2^2\right) \nabla h(t)$$

gilt. Weiter stehe $v \in \mathbb{R}^{m-1} \setminus \{0\}$ senkrecht auf $\nabla h(t)$. Dann folgt genauso

$$G(t)v = v + \nabla h(t) (\nabla h(t)^\top v) = v,$$

sodass $G(t)$ den $(m-2)$ -fachen Eigenwert 1 hat. Der Spektralsatz zeigt nun, dass $G(t)$ orthogonal äquivalent zu der Diagonalmatrix mit den Einträgen $1 + |\nabla h(t)|_2^2, 1, \dots, 1$ ist (siehe Abschnitt 5.6.2 in [4]). Nach dem Determinantenkalkül ist demnach $g_F(t)$ das Produkt der Eigenwerte von $G(t)$, also $g_F(t) = \det G(t) = 1 + |\nabla h(t)|_2^2$. \square

c) Sei $F : U \rightarrow W$ eine Parametrisierung. Wenn wir U wie in Bemerkung 4.3 b) wählen, liefert der Satz vom Maximum Konstanten $C, c > 0$ mit $c \leq g_F(t)^{\frac{1}{2}} \leq C$ für

alle $t \in U$. In Beispiel a) für $m \geq 3$ ist hingegen die untere Abschätzung verletzt, da die Winkel θ_k sich $\pm \frac{\pi}{2}$ annähern können. \diamond

Wir definieren das Oberflächenmaß und -integral zuerst auf einem Hyperflächenstück $M_0 = F(U)$ mit Parametrisierung $F : U \rightarrow W$. Mittels F soll auf das neue Integral auf M_0 durch ein Integral auf U bezüglich λ_{m-1} eingeführt werden.

Zunächst liegt M_0 in \mathcal{B}_m gemäß der Bemerkungen 4.3 a) und 4.2 b). Da auch $F^{-1} : M_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ stetig ist und $f = f \circ F \circ F^{-1}$ gilt, ergibt sich die Äquivalenz

$$f : M_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ ist messbar} \iff f \circ F : U \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ ist messbar.} \quad (4.4)$$

Ferner ist $f \geq 0$ äquivalent zu $f \circ F \geq 0$, und $F(A) \in \mathcal{B}_m$ für alle $A \in \mathcal{B}(U)$.

Sei $f : M_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Weiter sei f nichtnegativ oder $f \circ F \sqrt{g_F} : U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann definieren wir das *Oberflächenintegral auf M_0* durch

$$\int_{M_0} f \, d\sigma = \int_{M_0} f(x) \, d\sigma(x) := \int_U f(F(t)) \sqrt{g_F(t)} \, dt. \quad (4.5)$$

Für $B \in \mathcal{B}(M_0)$ ist $f = \mathbb{1}_B$ messbar und $A := F^{-1}(B)$ liegt in $\mathcal{B}(U)$. Weiter gilt $\mathbb{1}_B \circ F = \mathbb{1}_A$. Wir erhalten so das *Oberflächenmaß auf M_0*

$$\sigma_{M_0}(B) = \sigma(B) := \int_{M_0} \mathbb{1}_B \, d\sigma = \int_U \mathbb{1}_B(F(t)) \sqrt{g_F(t)} \, dt = \int_A \sqrt{g_F(t)} \, dt. \quad (4.6)$$

Diese Begriffe werden weiter unten in größerer Allgemeinheit genauer untersucht. Wir wollen sie zuerst mit einigen Beispielen illustrieren.

BEISPIEL 4.8. a) Es sei $S_- = \{x \in \partial B(0, R) \mid x_2 > 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ die hintere Halbsphäre mit der Parametrisierung F aus Beispiel 4.7 a). Dann gelten $S_- = F((0, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2))$ und $g_F(\varphi, \theta) = R^4 \cos^2 \theta$. Mit (4.2) und (4.6) berechnen wir das Oberflächenmaß

$$\sigma(S_-) = \int_{S_-} 1 \, d\sigma = \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi = \pi R^2 \sin(\theta) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi R^2.$$

Für die stetige nichtnegative Funktion $f : S_- \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = |x_3| = R |\sin \theta|$, ergibt sich aus (4.5) entsprechend

$$\begin{aligned} \int_{S_-} f \, d\sigma &= \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(F(\varphi, \theta)) R^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi = \pi R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(\theta)| \cos(\theta) \, d\theta \\ &= \pi R^3 \int_0^{\pi/2} 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \, d\theta = \pi R^3 \sin^2(\theta) \Big|_0^{\pi/2} = \pi R^3. \end{aligned}$$

b) Seien $R, b > 0$. Wir setzen $h(s, t) = b(1 - R^{-2}(s^2 + t^2))$ für $(s, t) \in B(0, R) =: U' \subseteq \mathbb{R}^2$. Der Graph von h ist die Paraboloidfläche P mit Grundradius R und Höhe b , vergleiche Abbildung 4.2 und Beispiel 3.28. Es gilt $h'(s, t) = -2bR^{-2}(s, t)$. Somit berechnet sich der Oberflächeninhalt von P laut (4.3) und (4.6) als

$$\sigma(P) = \int_P 1 \, d\sigma = \int_{B(0, R)} \sqrt{1 + 4b^2 R^{-4}(s^2 + t^2)} \, d(s, t)$$

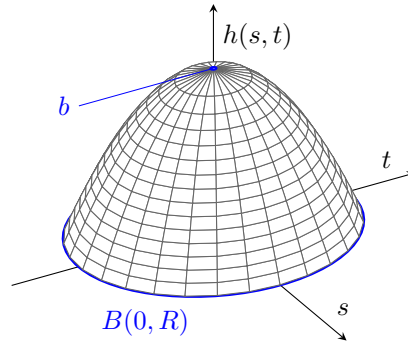


ABBILDUNG 4.2. Das Paraboloid aus Beispiel 4.8.

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r \sqrt{1 + 4b^2 R^{-4} r^2} dr = 2\pi \frac{R^4}{8b^2} \int_0^{4b^2 R^{-2}} \sqrt{1 + \tau} d\tau \\
 &= \frac{\pi R^4}{4b^2} \frac{2}{3} (1 + y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{4b^2 R^{-2}} = \frac{4\pi}{3} bR \left(\left(1 + \frac{R^2}{4b^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{R}{2b}\right)^3 \right).
 \end{aligned}$$

Hierbei haben wir zuerst Polarkoordinaten und dann die Substitution $\tau = 4b^2 R^{-4} r^2$ im dr -Integral verwendet.

c) Für $m = 2$ ist die Parametrisierung eine C^1 -Abbildung $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ und damit gilt $g_F(t) = |F'(t)|_2^2$. Das Integral in (4.5) liefert hier einen Typ von Kurvenintegral, der in Analysis 2 nur für $f = 1$ (also für die Kurvenlänge) behandelt worden ist. \diamond

Sei nun M eine C^1 -Hyperfläche mit Parametrisierungen $F_j : U_j \rightarrow W_j$ für j aus $J \in \{\mathbb{N}, \{1, \dots, k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Wir setzen $M_j = F_j(U_j)$ für $j \in J$. In Bemerkung 4.2 und vor (4.4) haben wir gesehen, dass $M = \bigcup_{j \in J} M_j$ ist und alle M_j in \mathcal{B}_m liegen. Gemäß Korollar 1.11 gelten also $\mathcal{B}(M) = \{B \in \mathcal{B}_m \mid B \subseteq M\}$ und $\mathcal{B}(M_j) = \{B \in \mathcal{B}_m \mid B \subseteq M_j\}$. Für $B \in \mathcal{B}(M)$ ist somit der Durchschnitt $B \cap M_j$ für jedes $j \in J$ in $\mathcal{B}(M_j)$ enthalten. In (4.6) haben wir die Oberflächenmaße $\sigma_j := \sigma_{M_j}$ auf $\mathcal{B}(M_j)$ mit Gramscher Determinante $g_j := g_{F_j}$ für jedes $j \in J$ definiert.

Um ein Maß auf $\mathcal{B}(M)$ zu erklären, muss man die Maße σ_j auf M_j geeignet ‘zusammenkleben’, wobei sich Mengen M_j überlappen können. Dazu konstruieren wir eine messbare Zerlegung der Eins zu einer gegebenen Folge von Borelmengen.

LEMMA 4.9. Seien $A_j \in \mathcal{B}_m$ für $j \in J$, $J \in \{\mathbb{N}, \{1, \dots, k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$ und $A = \bigcup_{j \in J} A_j$.

a) Dann existieren messbare Funktionen $\varphi_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ für $j \in J$ mit

$$0 \leq \varphi_j \leq 1 \text{ auf } A, \quad \varphi_j = 0 \text{ auf } A \setminus A_j \quad \text{und} \quad \sum_{j \in J} \varphi_j = \mathbb{1} \text{ auf } A.$$

b) Für gegebenes $i \in J$ kann man in a) solche Funktionen φ_j wählen, dass $\varphi_i = \mathbb{1}_{A_i}$ und $\varphi_j = 0$ auf A_i für $j \in J \setminus \{i\}$ erfüllt sind.

c) Eine Abbildung $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn jede Einschränkung $(\varphi_j f)|_{A_j} : A_j \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar ist.

BEWEIS. a) Wie in Lemma 1.14 setzen wir $A'_1 = A_1$ und $A'_j = A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1})$ für $j \in J \setminus \{1\}$. Dann sind die Mengen $\{A'_j \mid j \in J\}$ disjunkt und ihre Vereinigung ist gleich A . Die Funktionen $\varphi_j := \mathbb{1}_{A'_j}$, $j \in J$, erfüllen Behauptung a).

b) Wir wenden Schritt a) auf die Mengen $A_i, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots$ an und nummerieren dann wieder um.

c) Für messbares $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist $(\varphi_j f)|_{A_j} : A_j \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ wegen Satz 2.5 und Bemerkung 2.2 messbar. Umgekehrt ist mit $(\varphi_j f)|_{A_j}$ auch die Nullfortsetzung $\varphi_j f$ und damit $f = \sum_{j \in J} \varphi_j f$ nach den Beispielen 2.6 und 2.10 messbar. \square

Das folgende Resultat erlaubt unten die Definition des Oberflächenmaßes auf M .

SATZ 4.10. *Seien M eine C^1 -Hyperfläche mit Parametrisierungen $F_j : U_j \rightarrow W_j$ von $M_j = M \cap W_j$ für $j \in J$. Die Funktionen $\{\varphi_j \mid j \in J\}$ seien wie in Lemma 4.9 zu $\{M_j \mid j \in J\}$ gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Für $B \in \mathcal{B}(M)$ definieren wir durch

$$\sigma_M(B) = \sigma(B) := \sum_{j \in J} \int_{M_j} \mathbb{1}_B \varphi_j d\sigma_j = \sum_{j \in J} \int_{U_j} \mathbb{1}_B(F_j(t)) \varphi_j(F_j(t)) \sqrt{g_j(t)} dt$$

ein Maß auf $\mathcal{B}(M)$. Es ist endlich, wenn J endlich ist und die Parametrisierungen wie in Bemerkung 4.3 b) gewählt werden. Für kompakte M ist dies möglich.

b) σ ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierungen und der Zerlegung der Eins.

c) Sei $B \in \mathcal{B}(M_i)$ für ein $i \in J$. Dann gilt

$$\sigma(B) = \sigma_i(B) = \int_{F_i^{-1}(B)} \sqrt{g_i(t)} dt.$$

BEWEIS. a) Wir haben offenbar $\sigma(\emptyset) = 0$. Es seien B_k für $k \in \mathbb{N}$ aus $\mathcal{B}(M)$ disjunkt gewählt, und B sei ihre Vereinigung. Also gilt $\mathbb{1}_B = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_k}$. Mittels der Definition von σ und Korollar 2.23 berechnen wir dann

$$\begin{aligned} \sigma(B) &= \sum_{j \in J} \int_{U_j} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_k}(F_j(t)) \varphi_j(F_j(t)) \sqrt{g_j(t)} dt \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{U_j} \mathbb{1}_{B_k}(F_j(t)) \varphi_j(F_j(t)) \sqrt{g_j(t)} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in J} \int_{U_j} \mathbb{1}_{B_k}(F_j(t)) \varphi_j(F_j(t)) \sqrt{g_j(t)} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(B_k). \end{aligned}$$

Zum Vertauschen der Reihen haben wir noch einmal Korollar 2.23 für das Zählmaß ζ auf J verwendet, vergleiche Beispiel 2.28. Also ist σ ein Maß auf $\mathcal{B}(M)$. Seien nun J endlich, sowie F_j und U_j wie in Bemerkung 4.3 b) gewählt. Für jedes $B \in \mathcal{B}(M)$ ergibt sich daraus die Abschätzung

$$\sigma(B) \leq \sum_{j \in J} \lambda_{m-1}(U_j) \|\sqrt{g_j}\|_{\infty} < \infty.$$

b) 1)² Wir wollen zuerst U_j so verkleinern, dass es zu F_j eine zugehörige Karte ψ_j wie in Bemerkung 4.3 c) gibt und σ gleich bleibt. Laut dieser Bemerkung und einem Überdeckungsargument finden wir zunächst für jedes $j \in J$ abzählbar viele offene Teilmengen U_{jk} von U_j und Karten $\psi_{jk} : V_{jk} \rightarrow \tilde{U}_{jk}$ mit $k \in K_j$, die die Eigenschaften $U_j = \bigcup_{k \in K_j} U_{jk}$, $U_{jk} = \tilde{U}_{jk} \cap (\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})$ und $F_j(t) = \psi_{jk}^{-1}(t, 0)$ für $t \in U_{jk}$ besitzen. Lemma 4.9 liefert nun eine messbare Zerlegung der Eins $\{\varphi_{jk} \mid k \in K_j\}$ zu den Mengen $M_{jk} := V_{jk} \cap M = F_j(U_{jk})$. Dann ist $\hat{\varphi}_{jk} := \varphi_j \varphi_{jk}$ eine messbare Zerlegung der Eins zu der Familie $\{M_{jk} \mid j \in J, k \in K_j\}$. Seien F_{jk} und g_{jk} die Einschränkungen von F_j bzw. g_j auf U_{jk} . Sei $B \in \mathcal{B}(M)$. Da $\mathbb{1}_{M_j} = \sum_{k \in K_j} \varphi_{jk}$ ist, impliziert Korollar 2.23 wie in Schritt a) die Identität

$$\begin{aligned} \sigma(B) &= \sum_{j \in J} \int_{U_j} \sum_{k \in K_j} \varphi_{jk}(F_j(t)) \varphi_j(F_j(t)) \mathbb{1}_B(F_j(t)) \sqrt{g_j(t)} dt \\ &= \sum_{j \in J, k \in K_j} \int_{U_{jk}} \hat{\varphi}_{jk}(F_{jk}(t)) \mathbb{1}_B(F_{jk}(t)) \sqrt{g_{jk}(t)} dt, \end{aligned}$$

wobei wegen der Bijektivität von F_j die Funktion $\hat{\varphi}_{jk} \circ F_j$ auf $U_j \setminus U_{jk}$ verschwindet. Wir ändern die Indizierung wieder zu $j \in J$. Demnach gibt es nun zu jedem $F_j : U_j \rightarrow W_j$ so eine Karte ψ_j , dass $F_j(t) = \psi_j^{-1}(t, 0)$ für alle $t \in U_j$ gilt.

2) Seien $G_l : V_l \rightarrow Z_l$ für $l \in L$ weitere Parametrisierungen von M und $\kappa_l : Z_l \rightarrow \tilde{V}_l$ zugehörige Karte wie in Teil 1), also mit $G_l(s) = \kappa_l^{-1}(s, 0)$ für $s \in V_l$. Wir setzen $M'_l = G_l(V_l)$ für $l \in L$. Zu diesen Mengen sei $\{\chi_l \mid l \in L\}$ eine messbare Zerlegung der Eins wie in Lemma 4.9. Die zu G_l und χ_l gehörigen Maße auf M'_l bzw. M bezeichnen wir mit τ_l bzw. τ , vergleiche (4.6) und Teil a). Sei $B \in \mathcal{B}(M)$. Mit der Gleichung $\mathbb{1} = \sum_{j \in J} \varphi_j$ erhalten wir wie in Schritt a)

$$\tau(B) = \sum_{l \in L} \int_{M'_l} \sum_{j \in J} \varphi_j \mathbb{1}_B \chi_l d\tau_l = \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \int_{V_l} \chi_l(G_l(s)) \varphi_j(G_l(s)) \mathbb{1}_B(G_l(s)) \sqrt{g_{G_l}(s)} ds.$$

Wir wollen nun mit der Abbildung $\psi_j \circ G_l$ einen Koordinatenwechsel von der Menge V_l nach U_j durchführen. Dies kann nur für Indizes $(j, l) \in J \times L$ gelingen, bei denen der (offene) Durchschnitt $Y_{jl} := W_j \cap Z_l$ nichtleer ist. In diesem Fall setzen wir $S_{jl} := P\kappa_l(Y_{jl}) \neq \emptyset$ mit der Projektion $P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$; $P(s, s_m) = s$. Da $\kappa_l(Y_{jl})$ in \mathbb{R}^m offen ist, folgt leicht die Offenheit von S_{jl} in \mathbb{R}^{m-1} . Weiter liegt $G_l(S_{jl})$ in Y_{jl} nach der Wahl der κ_l , sodass wir die Abbildung $\Phi_{jl} := P\psi_j|_{Y_{jl}} \circ G_l : S_{jl} \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ definieren können. Diese Funktion ist C^1 und injektiv als Komposition ebensolcher Abbildungen und da $\psi_j(M_j) \subseteq \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ ist. Nach der Kettenregel gilt

$$\Phi'_{jl}(s) = P\psi'_j(G_l(s))G'_l(s) \quad \text{für } s \in S_{jl}.$$

Da alle Faktoren auf der rechten Seite maximalen Rang haben, gilt dies auch für $\Phi'_{jl}(s)$ gemäß Lemma 2.5.5 aus [4]. Korollar 3.37 aus Analysis 2 besagt nun, dass das Bild $T_{jl} := \Phi_{jl}(S_{jl})$ in \mathbb{R}^{m-1} offen und $\Phi_{jl} : S_{jl} \rightarrow T_{jl}$ diffeomorph ist.

²Der Beweis dieses Schrittes war in der Vorlesung ausgelassen worden.

In 1) haben wir ψ_j mit $F_j(t) = \psi_j^{-1}(t, 0)$ für $t \in U_j$ gewählt, was die Gleichheit $F_j(\Phi_{jl}(s)) = G_l(s)$ für alle $s \in S_{jl}$ liefert. Aus der Kettenregel folgt also die Formel $G'_l(s) = F'_j(\Phi_{jl}(s))\Phi'_{jl}(s)$. Im Hinblick auf die Gramsche Determinante schließen wir

$$\begin{aligned} G'_l(s)^\top G'_l(s) &= \Phi'_{jl}(s)^\top F'_j(\Phi_{jl}(s))^\top F'_j(\Phi_{jl}(s))\Phi'_{jl}(s), \\ g_{G_l}(s) &= (\det \Phi'_{jl}(s))^2 g_{F_j}(\Phi_{jl}(s)) \end{aligned}$$

für $s \in S_{jl}$, wobei wir auch Determinantenregeln aus den Abschnitten 3.1.3 und 3.2.6 in [4] verwendet haben.

3) Wir wollen nun in der oben abgesetzten Formel für $\tau(B)$ fortfahren. Dazu beachte man, dass $\varphi_j(G_l(s))$ nur für $G_l(s) \in M_j \subseteq W_j$ ungleich 0 sein kann. Also können wir uns in jedem Summanden auf $s \in V_l$ mit $G_l(s) \in Y_{jl}$ und damit auf $s \in S_{jl}$ einschränken. Mittels der obigen Beobachtungen und des Transformations-theorems 3.36 folgern wir mit der Substitution $t = \Phi_{jl}(s)$ die Identitäten

$$\begin{aligned} \tau(B) &= \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \int_{S_{jl}} \chi_l(F_j(\Phi_{jl}(s))) \varphi_j(F_j(\Phi_{jl}(s))) \mathbb{1}_B(F_j(\Phi_{jl}(s))) \\ &\quad \cdot |\det \Phi'_{jl}(s)| \sqrt{g_{F_j}(\Phi_{jl}(s))} \, ds \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \int_{T_{jl}} \chi_l(F_j(t)) \varphi_j(F_j(t)) \mathbb{1}_B(F_j(t)) \sqrt{g_{F_j}(t)} \, dt. \end{aligned}$$

Weiter gelten die Beziehungen $F_j(T_{jl}) = G_l(S_{jl}) = Y_{jl} \cap M = M_j \cap M'_l$ laut Schritt 2. Da F_j injektiv ist, verschwindet demnach $\chi_l(F_j(t))$ auf $U_j \setminus T_{jl}$. Wir können also im letzten Integral T_{jl} durch U_j ersetzen. Korollar 2.23 und die Gleichung $\mathbb{1} = \sum_{l \in L} \chi_l$ liefern schließlich wie gefordert

$$\begin{aligned} \tau(B) &= \sum_{j \in J} \int_{U_j} \sum_{l \in L} \chi_l(F_j(t)) \varphi_j(F_j(t)) \mathbb{1}_B(F_j(t)) \sqrt{g_{F_j}(t)} \, dt \\ &= \sum_{j \in J} \int_{U_j} \varphi_j(F_j(t)) \mathbb{1}_B(F_j(t)) \sqrt{g_{F_j}(t)} \, dt = \sigma(B). \end{aligned}$$

c) Sei $B \in \mathcal{B}(M_i)$ für ein $i \in J$. Nach Aussage b) können wir für $\sigma(B)$ Funktionen φ_j wie in Lemma 4.9 b) wählen. Folglich sind $\varphi_i \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_B$ und $\varphi_j \mathbb{1}_B = 0$ für $j \neq i$. Daraus ergibt sich

$$\sigma(B) = \sum_{j \in J} \int_{M_j} \varphi_j \mathbb{1}_B \, d\sigma_j = \int_{M_i} \mathbb{1}_B \, d\sigma_i = \sigma_i(B). \quad \square$$

DEFINITION 4.11. *Sei M eine C^1 -Hyperfläche. Das Maß σ aus Satz 4.10 a) heißt Oberflächenmaß auf M und das zugehörige Integral heißt Oberflächenintegral.*

Nach Satz 4.10 b) hängt Definition 4.11 nicht von der Wahl der F_j und φ_j ab. Für das Oberflächenintegral und -maß gelten natürlich die Aussagen über allgemeine Integrale und Maße bis einschließlich Abschnitt 3.2. Der nächste Satz geht näher auf den Zusammenhang zwischen σ und dem Lebesguemaß λ_{m-1} auf den Mengen

U_j ein, wobei wir auch die jeweilige Integrierbarkeit beleuchten. Die Messbarkeit auf M wurde schon in (4.4) und Lemma 4.9 geklärt.

SATZ 4.12. *Seien M eine C^1 -Hyperfläche mit Parametrisierungen $F_j : U_j \rightarrow W_j$ von $M_j = M \cap W_j$ für $j \in J$. Die Funktionen $\{\varphi_j \mid j \in J\}$ seien wie in Lemma 4.9 zu $\{M_j \mid j \in J\}$ gegeben. Sei $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Sei $\sum_{j \in J} \int_{U_j} |f \circ F_j| \sqrt{g_j} dt < \infty$. Dann ist f integrierbar für σ .*

b) *Seien J endlich und F_j wie in Bemerkung 4.3 b). Dann ist f genau dann für σ integrierbar, wenn alle Funktionen $f \circ F_j : U_j \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ für λ_{m-1} integrierbar sind.*

c) *Sei $f \geq 0$, beziehungsweise f integrierbar für σ , und für ein $i \in J$ gelte $f = 0$ auf $M \setminus M_i$. Dann ist*

$$\int_M f d\sigma = \int_{M_i} f d\sigma_i = \int_{U_i} f(F_i(t)) \sqrt{g_i(t)} dt.$$

d) *Gegeben seien λ_{m-1} -Nullmengen $N'_j \subseteq U_j$ für jedes $j \in J$. Dann ist $N = \bigcup_{j \in J} F_j(N'_j)$ eine σ -Nullmenge.*

BEWEIS. a) Die Voraussetzung impliziert die gewünschte Abschätzung

$$\int_M |f| d\sigma = \sum_{j \in J} \int_{U_j} |f \circ F_j| (\varphi_j \circ F_j) \sqrt{g_j} dt \leq \sum_{j \in J} \int_{U_j} |f \circ F_j| \sqrt{g_j} dt < \infty.$$

b) Da nach Bemerkung 4.3 b) jede Funktion g_j auf U_j beschränkt ist, folgt die Integrierbarkeit von f gemäß Teil a) aus der aller Abbildungen $f \circ F_j : U_j \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Sei umgekehrt f integrierbar. Wähle $i \in J$ und eine messbare Zerlegung der Eins φ_j wie in Lemma 4.9 b). Dann gilt $\varphi_i \circ F_i = \mathbb{1}_{U_i}$ und damit wie behauptet

$$\infty > \int_M |f| d\sigma \geq \int_{U_i} |f \circ F_i| (\varphi_i \circ F_i) \sqrt{g_i} dt \geq c \int_{U_i} |f \circ F_i| dt,$$

wobei die Konstante $c > 0$ aus Beispiel 4.7 c) stammt.

c) Die dritte Aussage zeigt man wie Teil c) von Satz 4.10.

d) Wie nach (4.4) gesehen, liegt $F_j(N'_j)$ in $\mathcal{B}_m(M_j)$. Weiter folgt die Gleichung $\mathbb{1}_{F_j(N'_j)} \circ F_j = \mathbb{1}_{N'_j}$ aus der Injektivität von F_j . Teil c) und Lemma 2.20 liefern nun

$$\sigma(F_j(N'_j)) = \int_{U_j} \mathbb{1}_{F_j(N'_j)}(F_j(t)) \sqrt{g_j(t)} dt = \int_{N'_j} \sqrt{g_j(t)} dt = 0$$

für $j \in J$. Somit ist N eine σ -Nullmenge. \square

Mittels der obigen Eigenschaften kann man nun die Berechnung des Oberflächenintegrals auf Integrale wie in (4.5) über einzelne Flächenstücke zurückführen. Zunächst zeigt man dazu mit u.U. *überlappenden* Parameterisierungen $F_j : U_j \rightarrow W_j$, dass M eine C^1 -Hyperfläche ist. Dann sucht man (soweit nötig) andere Parameterisierungen $G_l : V_l \rightarrow Z_l$ mit $l \in L$ und eine σ -Nullmenge N derart, dass M die *disjunkte* Vereinigung von N und der Flächenstücken $M'_l = G_l(V_l)$ ist. Die Nullmengen-eigenschaft überprüft man dabei typischerweise mit den Parameterisierungen F_j und

Satz 4.12 d). Man kann nun in Satz 4.12 c) die Familie aller Parametrisierungen F_j und G_l verwenden und erhält (soweit existent) das Integral

$$\int_M \mathbb{1}_{M'_l} f \, d\sigma = \int_{M'_l} f \, d\sigma_{M'_l} = \int_{V_l} f(G_l(t)) \sqrt{g_{G_l}(t)} \, dt.$$

Die Linearität des Integrals und Lemma 3.6 implizieren nun

$$\int_M f \, d\sigma = \int_M \left(\mathbb{1}_N f + \sum_{l \in L} \mathbb{1}_{M'_l} f \right) d\sigma = \sum_{l \in L} \int_{V_l} f(G_l(s)) \sqrt{g_{G_l}(t)} \, dt. \quad (4.7)$$

In den folgenden Beispielen wird dies exemplarisch ausgeführt.

BEISPIEL 4.13. a) Die Sphäre $S = \partial B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^m$ hat das Oberflächenmaß

$$\sigma(S) = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)} R^{m-1} = \omega_m R^{m-1}, \quad \text{vergleiche (3.17).}$$

BEWEIS. Nach Definition 4.1 haben wir schon gesehen, dass S eine C^1 -Hyperfläche ist. Mittels der sphärischen Koordinaten $F : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$; $F(\varphi, \theta) = \Phi_m(R, \varphi, \theta)$, aus den Beispielen 3.38 und 4.4, geben wir dafür einen anderen Beweis, der auch die nötigen Eigenschaften zur Berechnung von $\sigma(S)$ liefert.

Im Beispiel 4.4 haben wir gesehen, dass die Einschränkung $F_1 : U = (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{m-2} \rightarrow \mathbb{R}^m$ die geschlitzte Sphäre $S \setminus N$ mit $N = S \cap ((-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R}^{m-2})$ parametrisiert. (Für $m = 2$ fällt $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{m-2}$ weg.) Um den Schlitz N zu behandeln, betrachten wir die verschobene Einschränkung $F_2 : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{m-2} \rightarrow \mathbb{R}^m$ von F . Man kann wie in Beispiel 4.4 zeigen, dass auch F_2 eine Parametrisierung ist. Im Falle $m = 2$ überdeckt man damit ganz N und hat $N = F_2(\{\pi\})$. Für $m = 3$ fehlen noch Nord- und Südpol $(0, 0, \pm R)$, die man durch Graphendarstellungen $F_{3,4}$ mittels $h_{\pm} : B(0, R) \rightarrow \mathbb{R}$; $h_{\pm}(t) = \pm(R^2 - |t|_2^2)^{1/2}$ erreicht. Hier ist $N = F_2(\{\pi\} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) \cup F_3(\{0\}) \cup F_4(\{0\})$. Für $m \geq 4$ muss man noch die Menge $\{0\} \times \{0\} \times \partial B_{\mathbb{R}^{m-2}}(0, R) \subseteq N$ überdecken. Mittels sphärischer Koordinaten $F : \mathbb{R}^{m-3} \rightarrow \mathbb{R}^{m-2}$ kann man die Fälle $m \in \{4, 5\}$ wie oben behandeln, bzw. für $m \geq 6$ das Problem auf $\{0\}^4 \times \partial B_{\mathbb{R}^{m-4}}(0, R) \subseteq N$ reduzieren. Iterativ parametrisiert man auf diese Weise ganz S mittels gewisser F_k , wobei N die endliche Vereinigung von Mengen $F_k(U_k)$ ist und die Urbilder U_k Teilmengen von Hyperebenen im \mathbb{R}^{m-1} sind. Laut Satz 4.12 d) ist N also eine σ -Nullmenge.

Wir erhalten folglich gemäß (4.7) und (4.2) den Ausdruck

$$\begin{aligned} \sigma(S) &= \int_U \sqrt{g_F(\varphi, \theta)} \, d(\varphi, \theta) = R^{m-1} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{m-2}} \cos(\theta_1) \cdot \dots \cdot \cos^{m-2}(\theta_{m-2}) \, d\theta \, d\varphi \\ &= R^{m-1} 2\pi \frac{\pi^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} R^{m-1} = \omega_m R^{m-1}, \end{aligned}$$

wobei wir auch die Formeln (3.15) und (3.17) verwendet haben. \square

b) Seien $m = 3$ und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y, z) = |xyz|$. Dann gilt

$$\int_S f \, d\sigma = R^5.$$

BEWEIS. Es sei $O_j \subseteq S$ der j -te offene Sphären-Oktant im \mathbb{R}^3 . Mit F aus Teil a) gelten also $O_j = F(U_j)$ für die Quadrate $U_1 = (0, \frac{\pi}{2})^2$, $U_2 = (\frac{\pi}{2}, \pi) \times (0, \frac{\pi}{2})$ und so weiter. Wie in Beispiel a) sieht man, dass $S \setminus (O_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} O_8)$ eine σ -Nullmenge ist. Es gibt Bewegungen $T_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $T_j((0, \frac{\pi}{2})^2) = U_j$, die und aus den Abbildungen $\varphi \mapsto \varphi + \frac{\pi}{2}$, $\varphi \mapsto -\varphi$ und $\theta \mapsto -\theta$ zusammengesetzt sind. Damit überprüft man leicht, dass $f \circ F \circ T_j = f \circ F$ und $g_F \circ T_j = g_F$ auf U_1 gelten. Wie in Teil a) und mit Beispiel 3.37 zur affinen Transformation berechnen wir nun

$$\begin{aligned} \int_S f \, d\sigma &= \sum_{j=1}^8 \int_{O_j} f \, d\sigma = \sum_{j=1}^8 \int_{T_j(U_1)} (f \circ F) \sqrt{g_F} \, d(\varphi, \theta) \\ &= \sum_{j=1}^8 \int_{U_1} (f \circ F \circ T_j) \sqrt{g_F \circ T_j} \, d(\varphi, \theta) \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} R \cos(\varphi) \cos(\theta) R \sin(\varphi) \cos(\theta) R \sin(\theta) R^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \\ &= 8R^5 \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^3(\theta) \sin(\theta) \, d\theta \\ &= 8R^5 \cdot \frac{1}{2} \sin^2(\varphi) \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{4} \cos^4(\theta) \Big|_{\pi/2}^0 = R^5. \quad \square \end{aligned}$$

Typische Flächen der Elementargeometrie wie die Oberflächen von Polyedern, Zylindern oder Kegeln sind wegen ihrer Kanten und Ecken keine C^1 -Flächen. Um auch diese Flächen behandeln zu können, benötigen wir einen neuen Begriff. Wir erinnern daran, dass eine Funktion $f : X \rightarrow Z$ zwischen zwei metrischen Räumen Lipschitz stetig ist, wenn es so eine Konstante $L \geq 0$ gibt, dass $d_Z(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt. Der Raum dieser Funktionen heißt $C^{1-}(X, Z)$.

DEFINITION 4.14. *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt Lipschitz-Hyperfläche (oder C^{1-} -Hyperfläche), wenn es für jedes $x \in M$ eine Bewegung T , offene Mengen $U' \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ und $I \subseteq \mathbb{R}$, sowie und eine Lipschitz stetige Funktion $h : U' \rightarrow \mathbb{R}$ so gibt, dass Tx in $U' \times I$ liegt und $TM \cap (U' \times I)$ der Graph von h ist.*

Auch hier spricht man für $m = 2$ und $m = 3$ von Kurven bzw. Flächen statt von Hyperflächen. Wir gehen unten auf Beispiele ein.

Für uns ist entscheidend, dass Lipschitz stetige Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^l$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^k$ für fast alle $x \in D$ differenzierbar (im Sinne von Definition 3.7 aus Analysis 2) und wieder durch die Jakobimatrix gegeben sind. Man setzt dann $f'(x) = 0$ auf der Ausnahmemenge vom Maß 0. Weiter ist $f' : D \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ messbar und beschränkt. Dieser tiefe Satz von *Rademacher* wird etwa in Theorem 2.2.4 von [9] bewiesen.

Für Lipschitz stetige Funktionen gelten die Kettenregel und viele der Rechenregeln des Differentialkalküls analog (außerhalb von Nullmengen), wobei der Umkehrsatz eine wesentliche Ausnahme ist, siehe die nächste Bemerkung. Im Falle $k = l = 1$ erfüllen Lipschitz stetige Funktionen den Hauptsatz. Man findet diese Aussagen

etwa im Abschnitt 3.1 des Skriptums [8]. (Der Schlüssel ist Proposition 3.13.) Es gibt aber stetige, nicht konstante Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, deren Ableitung f.ü. verschwindet, siehe §7.16 in [7]. Weiter gilt der Transformationssatz 3.36 laut Proposition 7.6 in [10] auch für bijektive Abbildungen $\Phi : X \rightarrow Y$ zwischen offenen Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$, wenn Φ und Φ^{-1} Lipschitz stetig sind. Die eben aufgezählten Resultate werden unten verwendet; ihre Beweise können aber im Rahmen dieser Vorlesung nicht dargestellt werden und sie gehören auch nicht zu unserem Stoff.

Wir sehen nun, dass wir auf C^{1-} -Hyperflächen wieder ein Oberflächenmaß σ mit den obigen Eigenschaften erhalten. Danach behandeln wir einige typische Beispiele.

BEMERKUNG 4.15. Sei M eine C^{1-} -Hyperfläche im \mathbb{R}^m .

a) Analog zu Bemerkung 4.3 b) findet man abzählbar viele Graphendarstellungen mit Lipschitz stetigen Funktionen $h_j : U'_j \rightarrow \mathbb{R}$ mit Graphen G_j wie in Definition 4.14 für $j \in J$ derart, dass M durch die Vereinigung der Mengen $M_j = T_j^{-1}G_j$ gegeben ist. Also ist M Borelsch.

b) Die Formeln (4.1) definieren nach wie vor Karten, Parametrisierungen und Darstellungen von M als Nullstellenmengen, wobei die auftretenden Funktionen ψ_j , F_j und g_j Lipschitz stetig statt stetig differenzierbar sind, aber ansonsten Eigenschaften wie in Definition 4.1 bzw. Bemerkung 4.3 a) besitzen. (Allerdings gelten hier die Umkehrungen **nicht**; wir verzichten auf ein Beispiel.) Demzufolge besitzt M an fast allen Punkten Tangentialhyperebenen und Normalen, die wie Bemerkung 4.5 gegeben sind. Insbesondere ist $(-\nabla h_j(t), 1)^\top$ eine Normale an $x = T_j^{-1}F_j(t) \in M_j$ mit $F_j(t) = (t, h_j(t))^\top$, $t \in U'_j \setminus N'_j$ und λ_{m-1} -Nullmengen N'_j .

c) Die Gramsche Determinante von M_j wird wie in Beispiel 4.7 b) durch

$$g_j(t) := g_{M_j}(t) = 1 + |\nabla h_j(t)|_2^2 \quad \text{für } t \in U'_j \setminus N'_j$$

definiert. Diese Funktion ist messbar und beschränkt. Somit kann man $\sigma_j := \sigma_{M_j}$ auf M_j wie in (4.6), sowie das Oberflächenmaß σ und das zugehörige Integral auf M wie in Definition 4.11 einführen. Mit den oben skizzierten Aussagen zeigt man die Sätze 4.10 und 4.12 für C^{1-} -Hyperflächen wie im C^1 -Fall. Folglich können wir Integrale auf M wieder mittels (4.7) berechnen. Dabei ist $\bigcup_j F_j(N'_j)$ eine σ -Nullmenge (in der z.B. die Kanten liegen). Die anderen Teilmengen M'_l sind typischerweise C^1 -Hyperflächen. \diamond

BEISPIEL 4.16. a) Der Rand M eines Quaders $[a, b]$ im \mathbb{R}^3 ist eine C^{1-} -Fläche. In der Tat, lassen sich die begrenzenden offenen Rechtecke R_j (nach Rotation) als Graphen einer konstanten Funktion über der jeweiligen ‘Grundfläche’ schreiben, z.B. durch $h_1 : (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \rightarrow \mathbb{R}$; $h_1(x, y) = b_3$. (Damit sind alle $x \in R_j$ behandelt.) Da man hier Gramsche Determinante gleich $g_j = 1$ ist, hat R_j den Inhalt der Grundfläche – also im Beispiel $(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)$. Weiter kann man jede Ecke p so drehen, dass M in einer Umgebung von p der Graph des Minimums der Funktionen \tilde{h}_j ist, deren Graphen die Ebenen sind, in denen die angrenzenden R_j nach Rotation liegen. Man sieht leicht, dass das Minimum (oder Maximum)

endlich vieler Lipschitzfunktionen wieder Lipschitz stetig ist. In der Umgebung von Kantenpunkten geht man genauso vor. Also ist M eine C^{1-} -Fläche.

Die Kanten von M sind dabei Bilder von Strecken in \mathbb{R}^2 und damit σ_M -Nullmengen laut Satz 4.12 c) für C^{1-} -Flächen. Also ist $\sigma(M)$ gemäß (4.7) gleich der Summe der Inhalte der Seitenflächen. Bei Pyramiden und anderen Polyedern geht man entsprechend vor.

b) Der Rand Z des senkrechten Kreiszyinders im \mathbb{R}^3 mit Höhe $b > 0$ und Radius $R > 0$ ist eine C^{1-} -Fläche, und es gilt $\sigma(Z) = 2\pi R^2 + 2\pi Rb$.

BEWEIS. Die offenen Boden- und Deckelflächen B und D behandelt man wie in Teil a). Die Mantelfläche M wird durch Graphen wie $y = h(x, z) = \sqrt{R^2 - x^2}$ dargestellt. Um die Punkte auf den Kantenkreisen zu behandeln, drehen wir den Zylinder so, dass die Mittelachse in $A = \{(t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ liegt. Dann ist D bzw. B in der Ebene $z = h_c(x, y) = c - x$ für ein passendes $c \in \mathbb{R}$ enthalten. Den gedrehten Mantel beschreiben wir durch $z = h_M(x, y) = x + \sqrt{2(R^2 - y^2)}$. (Die Mantelpunkte $(x, y, h_M(x, y))$ haben in der Tat den Abstand R zu A mit Lotfußpunkt $(t, 0, t)$ und $t = x + \sqrt{(R^2 - y^2)/2}$.) Also erhalten wir auch in einer Umgebung jedes Kantenpunktes nach Rotation eine Darstellung als Graph von $h := \min\{h_c, h_M\}$.

Wie in a) sind die Kanten wieder σ_Z -Nullmengen, und die Flächeninhalte von B und D sind jeweils πR^2 . Weiter betrachten wir die Zylinderkoordinaten $F(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)^\top$ mit $(\varphi, z) \in \mathbb{R}^2$. Eingeschränkt auf $U = (-\pi, \pi) \times (0, b)$ parametrisiert F den Mantel M bis auf die σ_Z -Nullmenge $N = F(\{\pi\} \times (0, b))$, siehe Satz 4.12 d) und eine Übung. Um den Inhalt zu bestimmen, berechnen wir

$$F'(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi & 0 \\ R \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F'(\varphi, z)^\top F'(\varphi, z) = \begin{pmatrix} R^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also gilt $g_F(\varphi, z) = R^2$. Gemäß (4.7) hat Z den Oberflächeninhalt

$$\sigma(Z) = \sigma(B) + \sigma(D) + \sigma(M \setminus N) = 2\pi R^2 + \int_0^b \int_{-\pi}^{\pi} R \, d\varphi \, dz = 2\pi R^2 + 2\pi Rb. \quad \square$$

c) Der Rand K des geraden Kreiskegels im \mathbb{R}^3 mit Höhe $b > 0$ und Radius $R > 0$ ist eine C^{1-} -Fläche, und es gilt $\sigma(K) = \pi R^2 + \pi R\sqrt{R^2 + b^2}$.

BEWEIS. Den offenen Boden B und den Kantenkreis Γ behandeln wir wie in Beispiel c). Der Mantel M samt Spitze aber ohne Γ ist der Graph von $h : B(0, R) \rightarrow \mathbb{R}$; $h(x, y) = b - bR^{-1}|(x, y)|_2$. (Vergleiche Beispiel 3.28.) Dann ist h Lipschitz, und wir haben $|\nabla h(x, y)|_2 = b/R$ für $(x, y) \neq (0, 0)$. Somit liefert (4.7) den Inhalt

$$\sigma(K) = \sigma(B) + \sigma(M) = \pi R^2 + \int_{B(0, R)} \sqrt{1 + b^2 R^{-2}} \, d(x, y) = \pi R^2 + \pi R\sqrt{R^2 + b^2}. \quad \square$$

d) Der Graph $M = \{(t, |t|^{1/2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist keine Lipschitzkurve (verwende Bemerkung 2.35 in Analysis 2). Solche Spitzen werden also ausgeschlossen. Auch Verzweigungen wie $\partial B(0, 1) \cup ((1, 2] \times \{0\})$ in \mathbb{R}^2 oder Selbstdurchdringungen

wie in einer Acht sind keine C^1 -Hyperflächen, da hier am Verzweigungs- bzw. Schnittpunkt keine Graphendarstellung möglich ist. \diamond

4.3. Die Sätze von Gauß und Stokes

Wir kommen nun zu den angekündigten Verallgemeinerungen des Hauptsatzes und der Regel der partiellen Integration, die nach Gauß, Green und Stokes benannt sind. Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen. Für $r > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^m$ setzen wir

$$\gamma_{r,x_0} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}; \quad \gamma_{r,x_0}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{r^2-|x-x_0|_2^2}\right), & x \in B(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^m, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^m \setminus B(x_0, r). \end{cases}$$

Diese Funktion ist nichtnegativ, genau auf $B(x_0, r)$ positiv und beliebig oft differenzierbar (vergleiche Beispiel 5.39 in Analysis 1).

Sei $f : X \rightarrow Y$ für einen metrischen Raum X und einen Vektorraum Y oder $Y = \overline{\mathbb{R}}$. Dann ist der *Träger* von f durch

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} = \{x \in X \mid \exists x_n \in X : f(x_n) \neq 0, x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)\}$$

definiert. Es gilt $\text{supp } \gamma_{r,x_0} = \overline{B}(x_0, r)$. Wir betrachten oft eine offene Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^m$ mit der euklidischen Metrik. Hier ist zu beachten, dass der (relative) Abschluss in X auf Grund seiner Definition eine Teilmenge des Abschlusses in \mathbb{R}^m ist, die aber echt kleiner sein kann und in \mathbb{R}^m *nicht* abgeschlossen sein muss! Dies zeigt das Beispiel $A = (0, 1)$ in $X = (0, \infty)$ für $m = 1$, wo der Abschluss in X gleich $(0, 1]$ und der in \mathbb{R} gleich $[0, 1]$ ist. (Siehe auch Bemerkung 2.25 in Analysis 2.)

Weiter definieren wir einige Funktionenräume für eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $l \in \mathbb{N}$. Sei $f \in C^k(D, \mathbb{R}^l)$. Wir schreiben $f \in C^k(\overline{D}, \mathbb{R}^l)$ (bzw. $f \in C_b^k(D, \mathbb{R}^l)$), wenn f und alle Ableitungen (bis zur Ordnung k falls $k < \infty$) stetige Fortsetzungen auf \overline{D} haben (bzw. beschränkt sind). Wir fassen dabei $C^k(\overline{D}, \mathbb{R}^l)$ auch als Teilraum von $C^k(D, \mathbb{R}^l)$ auf und lassen den Bildraum \mathbb{R}^l in Falle $l = 1$ oft weg. Für $f \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R})$ setzen wir

$$\partial_j f(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in D} \partial_j f(y)$$

für $x \in \partial D$ und $j \in \{1, \dots, m\}$, und entsprechend für höhere Ableitungen.

Im Beweis des Satzes von Gauß unten benötigen wir die folgende *glatte Zerlegung der Eins*, mit der wir Lemma 4.9 ergänzen.³

SATZ 4.17. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt und es gebe offene Mengen $V_j \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $K \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_n$. Dann existieren eine offene Menge $U \supseteq K$ und Funktionen $\varphi_j \in C^\infty(U)$, die die Eigenschaften*

$$0 \leq \varphi_j \leq 1, \quad \text{supp } \varphi_j \subseteq V_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^n \varphi_j = 1$$

auf U für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ besitzen.

³Der folgende Beweis und die Definition von $\gamma_{r,x}$ waren in der Vorlesung ausgelassen worden.

BEWEIS. Nach Voraussetzung gibt es für jeden Punkt $x \in K$ einen Radius $r(x) > 0$ und einen Index $j \in \{1, \dots, n\}$ derart, dass $\overline{B}(x, r(x))$ eine Teilmenge von V_j ist. Wegen der Kompaktheit von K liefert Theorem 2.46 von Heine–Borel aus Analysis 2 solche Punkte x_1, \dots, x_l in K , dass K in der Vereinigung $B_1 \cup \dots \cup B_l$ der Kugeln $B_k := B(x_k, r(x_k))$ enthalten ist. Also gibt es für jeden Index $k \in \{1, \dots, l\}$ ein $j(k) \in \{1, \dots, n\}$ mit $B_k \subseteq \overline{B}_k \subseteq V_{j(k)}$. Wir setzen nun

$$\gamma_j := \sum_{k: \overline{B}_k \subseteq V_j} \gamma_{r(x_k), x_k} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$$

für $j \in \{1, \dots, n\}$. Folglich umfasst V_j den Träger $\text{supp } \gamma_j$ und die Funktion γ_j ist nichtnegativ. Für $x \in B_k$ gilt $\gamma_{r(x_k), x_k}(x) > 0$. Da jedes $x \in K$ in einer Kugel B_k liegt, ist somit die Abbildung

$$\alpha := \sum_{j=1}^n \gamma_j \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$$

auf K positiv. Da sie auf der kompakten Menge K ihr Minimum $a > 0$ annimmt, ist die Funktion α wegen ihrer Stetigkeit auch auf einer offenen Obermenge $U \supseteq K$ größer gleich $a/2$. Wir setzen nun

$$\varphi_j := \frac{\gamma_j}{\alpha} \in C^\infty(U) \quad \text{für } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Offenbar sind alle Funktionen φ_j nichtnegativ und ihr Träger ist jeweils gleich $\text{supp } \gamma_j \subseteq V_j$. Ferner erhalten wir

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \sum_{j=1}^n \gamma_j(x) = 1$$

für alle $x \in U$ und $j \in \{1, \dots, n\}$, woraus dann auch $0 \leq \varphi_j \leq 1$ folgt. \square

In vielen Bereichen der Analysis benötigt man Annahmen an die Regularität des Randes einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^m . Die wichtigsten Begriffe in diesem Kontext sind die des C^k -Randes und des Lipschitz-Randes.

DEFINITION 4.18. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Die Menge D hat einen C^k -Rand, wenn ∂D eine C^k -Hyperfläche ist und für jedes $x \in \partial D$ eine Graphendarstellung wie Bemerkung 4.3 a) mit beschränkten U'_j und $h_j \in C^k(\overline{U}'_j, \mathbb{R})$ besitzt, die einer der beiden Gleichungen*

$$D \cap Z_j = \left\{ x \in Z_j \mid x_{i(j)} < h_j(\hat{x}^{i(j)}) \right\}, \quad D \cap Z_j = \left\{ x \in Z_j \mid x_{i(j)} > h_j(\hat{x}^{i(j)}) \right\} \quad (4.8)$$

genügt. Wenn hier $h_j : U' \rightarrow I$ nur Lipschitz stetig ist (wobei $i(j) = m$ ist und D wie in Definition 4.14 beliebig rotiert werden kann), hat D einen Lipschitz-Rand. Man schreibt dann $\partial D \in C^k$ bzw. $\partial D \in C^{1-}$.

Falls ∂D beschränkt (z.B. bei beschränktem D) und $\partial D \in C^1$ oder $\partial D \in C^{1-}$ ist, kann man ∂D mit endlich vielen Mengen Z_j wie in (4.8) überdecken. Laut Satz 4.10 a) und seiner Variante für $\partial D \in C^{1-}$ ist σ dann endlich.

Die Bedingung (4.8) besagt, dass D ‘lokal auf einer Seite’ von ∂D liegt. Sie schließt geschlitzte Mengen wie $B(0, 1) \setminus ([-1/2, 1/2] \times \{0\})$ oder $B(0, 1) \setminus ([0, 1] \times \{0\})$ in \mathbb{R}^2 aus. An diesen Schlitzten gibt es keine ‘äußere’ Normale an ∂D wie in Bemerkung 4.19, die man für den Satz von Gauß benötigt. Ferner werden Spitzen wie in Beispiel 4.16 d) nicht zugelassen.

BEMERKUNG 4.19. Sei ∂D ein C^1 -Rand, und es gelte $i = m$ in (4.8).

a) Je nach Fall in (4.8) haben wir dann bei (fast allen) $x \in \partial D$ die *äußere Einheitsnormale*

$$\nu(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|_2^2}} \begin{pmatrix} -\nabla h(x') \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = (x', x_m), \quad (4.9)$$

siehe Bemerkungen 4.5 und 4.15. Sie zeigt nach oben bzw. unten aus D hinaus, und hat Länge 1 für (fast) alle x . Mittels Rotationen kann man andere Graphendarstellungen auf den obigen Fall zurückführen (siehe den Beweis von Theorem 4.20). Folglich ist $\nu : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^m$ für $\partial D \in C^1$ stetig. Wir setzen $\nu(x) = \pm e_m$ für die x , an denen h nicht differenzierbar ist. Dann ist $\nu : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^m$ messbar und beschränkt.

b) Sei $u \in C_b^1(D)$ und $M := \|u'\|_\infty$. Wir wollen zeigen, dass u eine stetige Fortsetzung auf \bar{D} besitzt.⁴ Gemäß Satz 2.55 aus Analysis 2 folgt dies aus der gleichmäßigen Stetigkeit von u . Wir nehmen an, u wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es Punkte $x_n, y_n \in D$ mit $x_n - y_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $|u(x_n) - u(y_n)| \geq \delta$ für ein $\delta > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Da \bar{D} kompakt ist, konvergieren für eine (gleich bezeichnete) Teilfolge (x_n) und (y_n) gegen einen Punkt $x \in \bar{D}$. Laut Satz 3.23 in Analysis 2 ist u auf abgeschlossenen Kugeln in D sogar Lipschitz stetig, sodass x in ∂D liegen muss, also am Rand einer Menge wie in (4.8). Wir können annehmen, dass dort der erste Fall vorliegt und (nach eventuellem Verkleinern von U') dass U' und I konvex sind, sowie $\max_{U'} h - \min_{U'} h \leq \delta/(4M)$ gilt. Seien $\tau = \min_{U'} h$, $x_n = (x'_n, s_n)$ und $y_n = (y'_n, t_n)$ für $s_n, t_n \in \mathbb{R}$. Dann liefert Satz 3.23 in Analysis 2

$$\begin{aligned} |u(x_n) - u(y_n)| &\leq |u(x'_n, s_n) - u(x'_n, \tau)| + |u(x'_n, \tau) - u(y'_n, \tau)| + |u(y'_n, \tau) - u(y'_n, t_n)| \\ &\leq M|s_n - \tau| + M|x'_n - y'_n|_2 + M|\tau - t_n| \leq \delta/2 + M|x_n - y_n|_2. \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhalten wir einen Widerspruch und damit die Behauptung. \diamond

Für $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ und eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^m$ definieren wir die *Divergenz*

$$\operatorname{div} f(x) := \operatorname{sp} f'(x) = \partial_1 f_1(x) + \dots + \partial_m f_m(x), \quad x \in D.$$

Dabei ist die Abbildung $\operatorname{div} : C^1(D, \mathbb{R}^m) \rightarrow C(D, \mathbb{R})$ linear. Wenn ferner u in $C^1(D, \mathbb{R})$ liegt, erhalten wir die Produktregel

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(uf)(x) &= \sum_{k=1}^m \partial_k(u(x)f_k(x)) = \sum_{k=1}^m (f_k(x)\partial_k u(x) + u(x)\partial_k f_k(x)) \\ &= (\nabla u(x)|f(x)) + u(x)\operatorname{div} f(x), \quad x \in D. \end{aligned} \quad (4.10)$$

⁴Dieser Beweis war in der Vorlesung ausgelassen worden.

Der folgende grundlegende *Divergenzsatz von Gauß* verallgemeinert den Hauptsatz aus Analysis 2, der auch entscheidend in den Beweis eingeht. Er wurde wohl erstmals von Ostrogradsky 1826 in etwas anderem Rahmen bewiesen; Gauß betrachtete zuvor Spezialfälle. Im Beweis reduziert man die Aussage mit Lokalisierungsargumenten auf Funktionen, deren Träger ganz in D oder in einem günstig gewählten Kartengebiet am Rand liegen. Dieses Vorgehen tritt in der Analysis oft auf, wenn das Randverhalten von Funktionen eine Rolle spielt (wie hier im Randintegral).

Im Falle eines Quaders, z.B. $(0, 1)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, folgt der Divergenzsatz direkt aus dem Hauptsatz in Analysis 2, denn es gilt

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)^2} \operatorname{div} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^1 \partial_1 f_1(x, y) \, dx \, dy + \int_0^1 \int_0^1 \partial_2 f_2(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 (f_1(1, y) - f_1(0, y)) \, dy + \int_0^1 (f_2(x, 1) - f_2(x, 0)) \, dx \\ &= \int_{\partial(0,1)^2} (f(x, y) | \nu(x, y)) \, d\sigma(x, y). \end{aligned}$$

(Wir haben hier die Normalen $\pm e_k$ und die Gramsche Determinante $g_F = 1$.)

THEOREM 4.20. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt mit C^{1-} -Rand, f in $C_b^1(D, \mathbb{R}^m)$ und ν die äußere Einheitsnormale. Dann gilt*

$$\int_D \operatorname{div} f(x) \, dx = \int_{\partial D} (f(x) | \nu(x)) \, d\sigma(x).$$

BEWEIS. Wir betrachten nur den Fall $\partial D \in C^1$. Der allgemeine Fall wird analog bewiesen, vergleiche Theorem I.1 in [10]. Laut Bemerkung 4.19 b) hat f eine stetige Fortsetzung auf \overline{D} . Da alle Funktionen und Maße beschränkt sind, existieren die Integrale nach Satz 2.29 f). Das gilt auch für die Integrale im Beweis.

1) (Lokalisierung) Nach Definition 4.18 und Bemerkung 4.3 gibt es offene und beschränkte Quader $U_j \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$, Intervalle $(a_j, b_j) \subseteq \mathbb{R}$, Funktionen $h_j \in C^1(\overline{U_j}, \mathbb{R})$ und Rotationen $Q_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$; $Q_j(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m, x_i)$, für ein $i = i(j)$ und alle $j \in \{1, \dots, l\}$ mit den folgenden Eigenschaften. Für alle $j \in \{1, \dots, l\}$ setzen wir $Z_j := U_j \times (a_j, b_j)$, $V_j := Q_j^{-1} Z_j$ und $D_j := Q_j D$. Es gelten die Beziehungen $\partial D \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_l =: V$, $h_j(U_j) \subseteq (a_j, b_j)$,

$$\begin{aligned} \partial D_j \cap Z_j &= \{(x', x_m) \in Z_j \mid x_m = h_j(x')\}, \\ D_j \cap Z_j &= \{(x', x_m) \in Z_j \mid x_m < h_j(x')\}, \end{aligned}$$

wobei wir in (4.8) den ersten Fall gewählt haben. (Den zweiten behandelt man analog.) Da Q_j und Q_j^{-1} stetig sind, erhalten wir $Q_j \overline{D} = \overline{D_j}$ und $Q_j \partial D = \partial D_j$.

Die Menge $C := \overline{D} \setminus V \subseteq D$ ist abgeschlossen und beschränkt und somit kompakt nach Bolzano–Weierstraß. Nach Korollar 2.52 in Analysis 2 gibt es deswegen eine Zahl $\delta > 0$ so, dass $|x - y|_2 \geq \delta$ für alle $x \in C$ und $y \in \partial D$ gilt. Also liegt die offene Menge $V_0 := \bigcup_{x \in C} B(x, \delta/2)$ samt Abschluss in D und \overline{D} ist in $V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_l$

enthalten. Satz 4.17 liefert nun eine glatte Zerlegung der Eins $\{\varphi_j \mid j \in \{0, 1, \dots, l\}\}$ auf \overline{D} zu den Mengen V_j . Wir setzen $f^j = \varphi_j f \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^m) \cap C_b^1(D, \mathbb{R}^m)$ für $j \in \{0, 1, \dots, l\}$. (Vorsicht: j ist hier ein Index, keine Potenz.) Dann gelten

$$\text{supp } f^j \subseteq V_j \cap \overline{D}, \quad \sum_{j=0}^l f^j = f \sum_{j=0}^l \varphi_j = f \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^l \text{div } f^j = \text{div } \sum_{j=0}^l f^j = \text{div } f.$$

2) (weg vom Rand) Da die Funktion f^0 in der Nähe von ∂D verschwindet, können wir sie mit 0 zu einer Funktion $\tilde{f}^0 \in C_b^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ fortsetzen. Wir wählen eine Zahl $R > 0$ mit $\overline{D} \subseteq (-R, R)^m$. Mittels Fubinis Theorem 3.29 schließen wir dann

$$\int_D \text{div } f^0 \, dx = \sum_{k=1}^m \int_{(-R, R)^{m-1}} \int_{-R}^R \partial_k \tilde{f}_k^0(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m) \, dx_k \, d\hat{x}^k.$$

Auf das dx_k -Integral wenden wir den Hauptsatz Theorem 1.10 aus Analysis 2 an. Da \tilde{f}_k^0 für $x_k = \pm R$ gleich 0 ist, verschwinden dieses Integral. Wir erhalten also

$$\int_D \text{div } f^0 \, dx = 0 = \int_{\partial D} (f^0 | \nu) \, d\sigma,$$

weil $f^0 = 0$ auf ∂D ist.

3) (am Rand) Sei $j \in \{1, \dots, l\}$. Wir wollen die behauptete Formel für f^j zeigen. Dazu transformieren wir die Integrale mittels Q_j von D und ∂D nach D_j und ∂D_j . Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen.

a) (Reduktion) Es seien $y \in Q_j \overline{D}$ und $x = Q_j^{-1} y \in \overline{D}$. Im Hinblick auf die eben erwähnte Transformation definieren wir die Abbildung

$$\tilde{f}^j : \overline{D}_j \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad \tilde{f}^j(y) = Q_j f^j(Q_j^{-1} y) = Q_j f^j(x),$$

die in $C(\overline{D}_j, \mathbb{R}^m) \cap C_b^1(D_j, \mathbb{R}^m)$ liegt. Weiter liefert die Kettenregel die Gleichungen

$$\text{div } \tilde{f}^j(y) = \text{sp}(\tilde{f}^j)'(y) = \text{sp}[Q_j (f^j)'(Q_j^{-1} y) Q_j^{-1}] = \text{sp}(f^j)'(x) = \text{div } f^j(x).$$

Dabei verwenden wir auch die Invarianz der Spur unter Ähnlichkeitstransformationen laut Abschnitt 4.2.2 von [4]. (Die eben gezeigte Rotationsinvarianz der Divergenz motiviert die obige Definition von \tilde{f}^j .)

Die äußere Normale $\tilde{\nu}^j(y)$ an ∂D_j bei $y \in \partial D_j \cap Z_j$ ist gemäß Bemerkung 4.19 gegeben. (Man beachte, dass in (4.9) nur der Fall $i(j) = m$ betrachtet wird, den wir mit der Rotation Q_j erreicht haben.) Die inverse Rotation Q_j^{-1} liefert dann die äußere Normale

$$\nu(x) = Q_j^{-1} \tilde{\nu}^j(y) = Q_j^{-1} \tilde{\nu}^j(Q_j x)$$

an ∂D bei $x \in \partial D \cap V_j$. Es gilt $|\det Q_j| = 1$. Mittels dieser Beobachtungen und der Transformation $y = Q_j x$ nach Beispiel 3.37 berechnen wir nun

$$\int_D \text{div } f^j(x) \, dx = \int_D \text{div } \tilde{f}^j(Q_j x) \, dx = \int_{D_j} \text{div } \tilde{f}^j(y) \, dy.$$

Entsprechend folgern wir mittels eines speziellen Transformationssatzes für das Oberflächenintegral (siehe eine Übung) die Identitäten

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (f^j(x)|\nu(x)) \, d\sigma(x) &= \int_{\partial D} (Q_j f^j(x)|Q_j \nu(x)) \, d\sigma(x) = \int_{\partial D} (\tilde{f}^j(Q_j x)|\tilde{\nu}^j(Q_j x)) \, d\sigma(x) \\ &= \int_{\partial D_j} (\tilde{f}^j(y)|\tilde{\nu}^j(y)) \, d\sigma(y), \end{aligned}$$

wobei die Orthogonalität $Q_j^\top = Q_j^{-1}$ einging. Wir zeigen in Schritt 2b) die noch fehlende Gleichung

$$\int_{D_j} \operatorname{div} \tilde{f}^j(y) \, dy = \int_{\partial D_j} (\tilde{f}^j(y)|\tilde{\nu}^j(y)) \, d\sigma(y).$$

Wenn dies geschehen ist, folgt mit den Schritten 1) und 2a) die Behauptung

$$\int_D \operatorname{div} f \, dx = \sum_{j=0}^l \int_{D_j} \operatorname{div} f^j \, dx = \sum_{j=0}^l \int_{\partial D_j} (f^j|\nu) \, d\sigma = \int_{\partial D} (f|\nu) \, d\sigma.$$

b) (Hauptschritt) Um die Notation zu vereinfachen, betrachten wir eine Abbildung $u \in C_b^1(D, \mathbb{R}^m)$ mit $\operatorname{supp} u \subseteq Z = U \times (a, b)$ für einen offenen Quader $U \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ und eine Funktion $h \in C_b^1(U, \mathbb{R})$ mit $\overline{h(U)} \subseteq (a, b)$ und

$$\partial D \cap Z = \{(x', x_m) \in Z \mid x_m = h(x')\}, \quad D \cap Z = \{(x', x_m) \in Z \mid x_m < h(x')\}.$$

Man beachte, dass u am seitlichen und unteren Rand von $D \cap Z$, aber nicht notwendig am oberen bei $x_m = h(x')$ verschwindet. Um hier etwas Platz zu gewinnen, wählen wir Zahlen $\varepsilon \in (0, \inf_U h - a)$ und setzen

$$W_\varepsilon = \{(x', x_m) \in Z \mid x_m < h(x') - \varepsilon\} \subseteq D \cap Z.$$

Korollar 3.14 und Fubinis Theorem 3.29 liefern die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{div} u \, dx &= \sum_{k=1}^m \int_{D \cap Z} \partial_k u_k \, dx = \sum_{k=1}^m \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{W_\varepsilon} \partial_k u_k \, dx \\ &= \sum_{k=1}^m \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_U \int_a^{h(x')-\varepsilon} \partial_k u_k(x', x_m) \, dx_m \, dx'. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen das dx_m -Integral mit $I_k^\varepsilon(x')$. Im Falle $k = m$ folgern wir mit dem Hauptsatz die Konvergenz

$I_m^\varepsilon(x') = u_m(x', h(x') - \varepsilon) - u_m(x', a) = u_m(x', h(x') - \varepsilon) \rightarrow u_m(x', h(x'))$, $\varepsilon \rightarrow 0$, da $u_m(x', a) = 0$ ist. Der Limes ist gleichmäßig in x' , weil $u_m \in C(\overline{D}, \mathbb{R})$ nach Theorem 2.47 aus Analysis 2 gleichmäßig stetig ist. Mittels Satz 2.29 b) und f) folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_U \int_a^{h(x')-\varepsilon} \partial_m u_m(x', x_m) \, dx_m \, dx' = \int_U u_m(x', h(x')) \, dx'.$$

Für $k \leq m - 1$ berechnen wir hingegen

$$\partial_k \int_a^{h(x')-\varepsilon} u_k(x', x_m) \, dx_m = u_k(x', h(x') - \varepsilon) \partial_k h(x') + \int_a^{h(x')-\varepsilon} \partial_k u_k(x', x_m) \, dx_m,$$

wobei wir eine Übung aus Analysis 2 verwenden.

Sei zuerst $k = 1$. Wir schreiben $U = (\alpha, \beta) \times U^*$ für einen offenen beschränkten Quader $U^* \subseteq \mathbb{R}^{m-2}$, der für $m = 2$ leer sein soll. Wieder mit Fubinis Theorem und dem Hauptsatz berechnen wir weiter

$$\begin{aligned} & \int_U \partial_1 \int_a^{h(x')-\varepsilon} u_1(x', x_m) dx_m dx' \\ &= \int_{U^*} \int_\alpha^\beta \partial_1 \int_a^{h(x')-\varepsilon} u_1(x_1, \dots, x_m) dx_m dx_1 d(x_2, \dots, x_{m-1}) \\ &= \int_{U^*} \left[\int_a^{h(x_1, \dots, x_{m-1})-\varepsilon} u_1(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_m \right]_{x_1=\alpha}^\beta d(x_2, \dots, x_{m-1}) = 0, \end{aligned}$$

da u_1 für $x_1 = \alpha$ und $x_1 = \beta$ verschwindet. Die Fälle $k \geq 2$ behandelt man genauso. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{div} u dx &= \int_U u_m(x', h(x')) dx' - \sum_{k=1}^{m-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_U u_k(x', h(x') - \varepsilon) \partial_k h(x') dx' \\ &= \int_U \left(u_m(x', h(x')) - \sum_{k=1}^{m-1} u_k(x', h(x')) \partial_k h(x') \right) dx'. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun die Parametrisierung $F(x') = (x', h(x'))$ mit $x' \in U$ von $\partial D \cap Z$. Nach Bemerkung 4.5 und (4.3) ist hier die äußere Einheitsnormale durch

$$\nu(F(x')) = (1 + |\nabla h(x')|_2^2)^{-1/2} (-\nabla h(x'), 1) = g_F(x')^{-1/2} (-\nabla h(x'), 1)$$

gegeben. Somit folgt nun die Behauptung durch

$$\int_D \operatorname{div} u dx = \int_U (u(F(x')) | \nu(F(x'))) \sqrt{g_F(x')} dx' = \int_{\partial D} (u | \nu) d\sigma. \quad \square$$

Der Divergenzsatz kann zur Berechnung von Volumen- und Oberflächenintegrale herangezogen werden. Wir geben hier nur das einfachste Beispiel an, weitere werden in den Übungen diskutiert.

BEISPIEL 4.21. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt mit $\partial D \in C^{1-}$, sowie $f(x) = x$. Dann gilt $\operatorname{div} f = m$ und der Satz von Gauß liefert die Gleichung

$$\int_{\partial D} (x | \nu(x)) d\sigma(x) = \int_D \operatorname{div} f(x) dx = m \lambda_m(D). \quad \diamond$$

Für $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ hatten wir in Analysis 2 den Laplace-Operator

$$\Delta u(x) = \partial_{11} u(x) + \dots + \partial_{mm} u(x) = \operatorname{div} \nabla u(x), \quad x \in D,$$

definiert. Aus dem Satz von Gauß leiten wir nun die Formeln der partiellen Integration her, wobei Teil b) auf Green zurückgeht. Dabei schreiben wir für $u \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R})$

$$\partial_\nu u(x) := (\nabla u(x) | \nu(x)) = \lim_{y \rightarrow x, y \in D} \sum_{j=1}^m \nu_j(x) \partial_j u(y), \quad (\text{f.a.}) x \in \partial D.$$

KOROLLAR 4.22. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt mit $\partial D \in C^{1-}$.

a) Seien $f \in C_b^1(D, \mathbb{R}^m)$ und $u \in C_b^1(D, \mathbb{R})$. Dann erhalten wir die Formel

$$\int_D (\nabla u(x) | f(x)) dx = - \int_D u(x) \operatorname{div} f(x) dx + \int_{\partial D} u(x) (f(x) | \nu(x)) d\sigma(x).$$

b) Seien $u, v \in C_b^2(D, \mathbb{R})$. Dann gelten

$$\begin{aligned} \int_D u(x) \Delta v(x) dx &= - \int_D (\nabla u(x) | \nabla v(x)) dx + \int_{\partial D} u(x) \partial_\nu v(x) d\sigma(x) \\ &= \int_D \Delta u(x) v(x) dx + \int_{\partial D} (u(x) \partial_\nu v(x) - \partial_\nu u(x) v(x)) d\sigma(x). \end{aligned}$$

BEWEIS. Aussage a) folgt aus Theorem 4.20 für die Funktion uf und der Gleichung (4.10). Aus a) leitet man Teil b) ab, indem man zuerst $f = \nabla v \in C_b^1(D, \mathbb{R}^m)$ und dann $f = \nabla u$ setzt. \square

Für z.B. $f = (\varphi, 0, \dots, 0)$ folgt in Korollar 4.22 a) die Formel

$$\int_D \partial_1 u \varphi dx = \int_D (\nabla u | f) dx = - \int_D u \partial_1 \varphi dx + \int_{\partial D} u \varphi \nu_1 d\sigma.$$

In Theorem 4.20 mit $m = 3$ beschreibe f ein elektrisches Feld. Dann ist

$$\Phi := \int_{\partial D} (f | \nu) d\sigma = \int_D \operatorname{div} f dx \quad (4.11)$$

der Durchfluss des Feldes durch ∂D , und man kann $\operatorname{div} f$ als Quelldichte verstehen.

BEISPIEL 4.23. Es sei $m = 3$, $q \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt mit $\partial D \in C^{1-}$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$. Das von der Punktladung q bei \bar{x} erzeugte elektrische Feld ist durch

$$f(x) = \frac{q}{|x - \bar{x}|_2^3} (x - \bar{x}) = q \left(\sum_{k=1}^3 (x_k - \bar{x}_k)^2 \right)^{-3/2} (x - \bar{x}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{x}\}$$

gegeben (bis auf Konstanten). Dann gelten $\operatorname{div} f = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{x}\}$, $\Phi = 0$ für $\bar{x} \notin \bar{D}$ und $\Phi = 4\pi q$ für $\bar{x} \in D$.

BEWEIS. Sei $x \neq \bar{x}$. Zunächst berechnen wir wie in Analysis 2

$$\begin{aligned} \partial_j f_j(x) &= \frac{q}{|x - \bar{x}|_2^3} - 3q \left(\sum_{k=1}^3 (x_k - \bar{x}_k)^2 \right)^{-5/2} (x_j - \bar{x}_j)^2, \\ \operatorname{div} f(x) &= \frac{3q}{|x - \bar{x}|_2^3} - \frac{3q}{|x - \bar{x}|_2^5} \sum_{j=1}^3 (x_j - \bar{x}_j)^2 = 0. \end{aligned}$$

Sei zuerst $\bar{x} \notin \bar{D}$. Dann liegt f in $C^1(\bar{D}, \mathbb{R}^3)$ und (4.11) liefert die Behauptung.

Sei nun $\bar{x} \in D$. In diesem Fall liegt eine singuläre, punktförmige Ladungsquelle bei \bar{x} vor, obgleich $\operatorname{div} f$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{x}\}$ verschwindet. Da f nun nicht in $C^1(D, \mathbb{R}^3)$ enthalten ist, kann man den Divergenzsatz und (4.11) nicht direkt anwenden. Vorher muss man die Singularität 'herausschneiden'. Dazu betrachtet man einen Radius $\delta > 0$ mit $\bar{B}(\bar{x}, \delta) \subseteq D$ und die Menge $D_\delta = D \setminus \bar{B}(\bar{x}, \delta)$. Dann genügen D_δ und ∂D_δ den Bedingungen des Divergenzsatzes, wobei $\partial D_\delta = \partial D \cup \partial \bar{B}(\bar{x}, \delta)$ gilt. Die äußere

Einheitsnormale von D_δ bei $x \in \partial\overline{B}(\bar{x}, \delta)$ ist durch $-\delta^{-1}(x - \bar{x})$ mit $\delta = |x - \bar{x}|_2$ gegeben. Der Satz von Gauß und Beispiel 4.13 liefern nun

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D_\delta} \operatorname{div} f \, dx = \int_{\partial D_\delta} (f|\nu) \, d\sigma = \int_{\partial D} (f|\nu) \, d\sigma - \int_{\partial\overline{B}(\bar{x}, \delta)} \frac{q}{\delta |x - \bar{x}|_2^3} (x - \bar{x}|x - \bar{x}) \, d\sigma \\ &= \Phi - q\delta^{-2}\sigma(\partial\overline{B}(\bar{x}, \delta)) = \Phi - 4\pi q. \quad \square \end{aligned}$$

Im folgenden Beispiel wird mittels der Greenschen Formel auf typische Weise die Eindeutigkeit der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung gezeigt. Diese Technik ist von grundlegender Bedeutung für die Analysis.

BEISPIEL 4.24. Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt mit $m \in \{1, 2, 3\}$ und $\partial D \in C^{1-}$, sowie $u_0 \in C_b^2(D)$ mit $u_0 = 0$ auf ∂D und $u_1 \in C_b^1(D)$. Eine Funktion $u \in C_b^2(\mathbb{R}_{\geq 0} \times D)$ beschreibe die Auslenkung eines Objekts zur Zeit $t \geq 0$ am Punkt $x \in D$. Es ist am Rande ∂D festgespannt und besitzt zur Zeit $t = 0$ die Auslenkung $u_0(x)$ und die Geschwindigkeit $u_1(x)$. Wir nehmen an, dass die Massendichte $m = 1$ konstant sei. Dann sollte die ‘Beschleunigung’ $\partial_{tt}u(t, x)$ durch eine Rückstellkraft gegeben sein, die für stärker gekrümmtes Material größer sein wird. Diese Kraft wird näherungsweise durch $a\Delta u(t, x)$ für eine Materialkonstante $a > 0$ beschrieben. Dann genügt u der *Wellengleichung*

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(t, x) &= a\Delta u(t, x), & t \geq 0, x \in D, \\ u(t, x) &= 0, & t \geq 0, x \in \partial D, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), & x \in D. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Lösungen dieses Problems sind in $C_b^2(\mathbb{R}_{\geq 0} \times D)$ eindeutig bestimmt und erfüllen für alle $t \geq 0$ die *Energiegleichung*⁵

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_D \left(\partial_t u(t, x)^2 + a|\nabla u(t, x)|_2^2 \right) dx = \frac{1}{2} \int_D \left(u_0(x)^2 + a|u_1(x)|_2^2 \right) dx. \quad (4.13)$$

BEWEIS. Es gelte (4.13). Sei $v \in C_b^2(\mathbb{R}_{\geq 0} \times D)$ eine zweite Lösung von (4.12). Dann löst auch $w := v - u \in C_b^2(\mathbb{R}_{\geq 0} \times D)$ das Problem (4.12) mit $u_0 = 0$ und $u_1 = 0$. Laut (4.13) ist dann $\int_D \partial_t w(t, x)^2 dx = 0$ für alle $t \geq 0$, sodass $\partial_t w(t, x) = 0$ für fast alle $x \in D$ gilt. Da $\partial_t w$ stetig ist, liefert Bemerkung 5.8 unten $\partial_t w(t, x) = 0$ und damit $w(t, x) = \int_0^t \partial_t w(s, x) ds = 0$ für alle $x \in D$ und $t \geq 0$. Also ist $u = v$.

Wir zeigen nun (4.13) für eine Lösung u . Die Funktionen $\varphi_1 = \partial_t u \partial_{tt} u$ und $\varphi_2 = a(\nabla u | \partial_t \nabla u)$ sind auf $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \overline{D}$ beschränkt. Somit implizieren der Differenzierbarkeitssatz 3.18 mit $g = (\|\varphi_1\|_\infty + \|\varphi_2\|_\infty) \mathbb{1}_D$, die Kettenregel, Korollar 4.22 und Wellengleichung (4.12) die Ableitbarkeit von E und die Abschätzung

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2} \int_D \partial_t \left(\partial_t u(t, x)^2 + a|\nabla u(t, x)|_2^2 \right) dx \\ &= \int_D \left(\partial_t u(t, x) \partial_{tt} u(t, x) + a(\nabla u(t, x) | \nabla \partial_t u(t, x)) \right) dx \end{aligned}$$

⁵In dieser Situation ist $E(t)$ die Summe der kinetischen und potentiellen Energie.

$$= \int_D \partial_t u(t, x) (\partial_{tt} u(t, x) - a \Delta u(t, x)) \, dx = 0.$$

Man beachte, dass hier das Randintegral in der Greenschen Formel wegen der Randbedingung $u(t, x) = 0$ (und damit $\partial_t u(t, x) = 0$) verschwindet. Also ist E konstant und (4.13) gilt. \square

Wir wenden uns nun der einfachsten Version des *Satzes von Stokes* im \mathbb{R}^3 zu. (In §13.8 von [6] findet man eine Variante im \mathbb{R}^3 auf dem begrifflichen Niveau des Divergenzsatzes Theorem 4.20. Es gibt auch eine Verallgemeinerung von Stokes im \mathbb{R}^m , die jenseits der Möglichkeiten dieser Vorlesung liegt, siehe Kapitel XII.3 in [2] oder Kapitel 13 in [6].)

Dazu sei $F : U_0 \rightarrow D$ eine C^2 -Parametrisierung mit offenen Mengen $U_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Weiter sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt mit $\bar{U} \subseteq U_0$ und ∂U sei eine geschlossene einfache C^1 -Kurve mit der regulären Parametrisierung $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial U$. Insbesondere ist ∂U ein C^1 -Rand. Dabei verlaufe γ im Gegenuhrzeigersinn. Die Tangentenrichtung an ∂U bei $\gamma(\tau)$ ist der Vektor $\gamma'(\tau) \in \mathbb{R}^2$ und die äußere Einheitsnormale ist $\nu(\tau) = |\gamma'(\tau)|_2^{-1}(\gamma'_2(\tau), -\gamma'_1(\tau))$.

Wir definieren das Flächenstück $M = F(U) \subseteq D$. Die Randkurve $\partial_2 M \subseteq F(\bar{U}) \subseteq D$ von M ist durch die reguläre C^1 -Parametrisierung $\varphi = F \circ \gamma : (a, b) \rightarrow \partial_2 M$ gegeben. Die äußere Einheitsnormale an M ist

$$\mathfrak{n}(F(t)) = \frac{1}{|\partial_1 F(t) \times \partial_2 F(t)|_2} \partial_1 F(t) \times \partial_2 F(t), \quad t \in U, \quad (4.14)$$

siehe die Bemerkungen nach Definition 4.6 und Abbildung 4.3. Für $f \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ definiert man die *Rotation*

$$\text{rot } f(x) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3(x) - \partial_3 f_2(x) \\ \partial_3 f_1(x) - \partial_1 f_3(x) \\ \partial_1 f_2(x) - \partial_2 f_1(x) \end{pmatrix}, \quad x \in D,$$

und für $f \in C(D, \mathbb{R}^3)$ wie in Abschnitt 4.2 von Analysis 2 das Kurvenintegral

$$\int_{\partial_2 M} f \cdot dx = \int_a^b (f(\varphi(\tau)) | \varphi'(\tau) |) \, d\tau = \sum_{j=1}^3 \int_a^b f_j(\varphi(\tau)) \varphi'_j(\tau) \, d\tau =: R.$$

THEOREM 4.25. *Unter den obigen Voraussetzungen gilt die Gleichung*

$$\int_M (\text{rot } f(x) | \mathfrak{n}(x) |) \, d\sigma(x) = \int_{\partial_2 M} f \cdot dx.$$

BEWEIS. Wir⁶ setzen

$$N(t) := \partial_1 F(t) \times \partial_2 F(t) = \begin{pmatrix} \partial_1 F_2 \partial_2 F_3 - \partial_1 F_3 \partial_2 F_2 \\ \partial_1 F_3 \partial_2 F_1 - \partial_1 F_1 \partial_2 F_3 \\ \partial_1 F_1 \partial_2 F_2 - \partial_1 F_2 \partial_2 F_1 \end{pmatrix}.$$

⁶Dieser Beweis wurde in der Vorlesung ausgelassen.

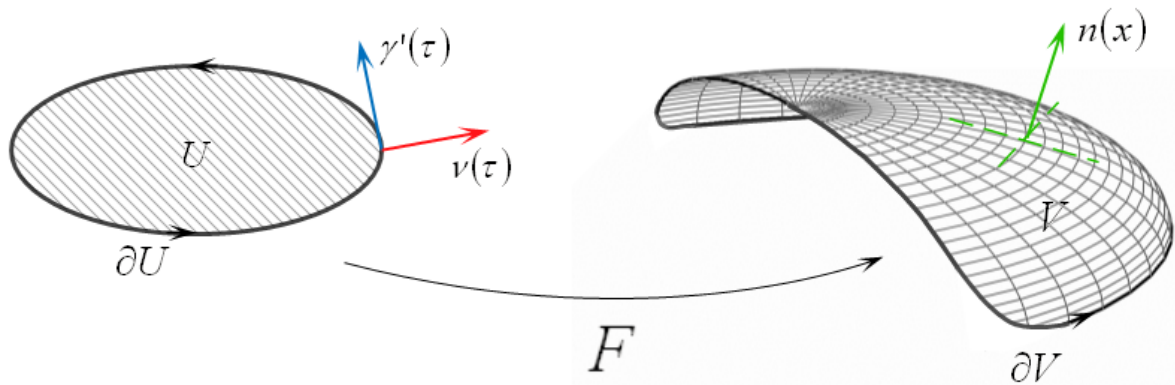


ABBILDUNG 4.3. Die Situation im Satz von Stokes.

Definition 4.6 und (4.14) liefern zunächst

$$\begin{aligned} \int_M (\operatorname{rot} f | n) \, d\sigma &= \int_U \left((\operatorname{rot} f)(F(t)) \left| |N(t)|_2^{-1} N(t) \right| |N(t)|_2 \, dt \right. \\ &= \int_U \left[\left((\partial_2 f_3) \circ F - (\partial_3 f_2) \circ F \right) N_1 + \left((\partial_3 f_1) \circ F - (\partial_1 f_3) \circ F \right) N_2 \right. \\ &\quad \left. + \left((\partial_1 f_2) \circ F - (\partial_2 f_1) \circ F \right) N_3 \right] dt =: L. \end{aligned}$$

Andererseits berechnen wir den dritten Summanden des Kurvenintegrals R oben mittels der Kettenregel als

$$\begin{aligned} \int_a^b f_3(\varphi(\tau)) \varphi'_3(\tau) \, d\tau &= \int_a^b f_3(F(\gamma(\tau))) \left((\partial_1 F_3)(\gamma(\tau)) \gamma'_1(\tau) + (\partial_2 F_3)(\gamma(\tau)) \gamma'_2(\tau) \right) \, d\tau \\ &= \int_a^b \left(f_3(F(\gamma(\tau))) \left(\begin{array}{c} (\partial_2 F_3)(\gamma(\tau)) \\ -(\partial_1 F_3)(\gamma(\tau)) \end{array} \right) \left| |\gamma'(\tau)|_2^{-1} \begin{pmatrix} \gamma'_2(\tau) \\ -\gamma'_1(\tau) \end{pmatrix} \right| |\gamma'(\tau)|_2 \, d\tau \right. \\ &= \int_{\partial U} \left(f_3 \circ F \left(\begin{array}{c} \partial_2 F_3 \\ -\partial_1 F_3 \end{array} \right) \middle| \nu \right) \, d\sigma =: J, \end{aligned}$$

wobei die obige Formel für ν und Beispiel 4.7 c) eingingen. Unter Verwendung von $F \in C^2$, wenden wir nun den Divergenzansatz in \mathbb{R}^2 , die Produktregel (4.10), Schwarz' Theorem 3.24 aus Analysis 2 und die Kettenregel an. Es folgt

$$\begin{aligned} J &= \int_U \operatorname{div} \left(f_3 \circ F (\partial_2 F_3, -\partial_1 F_3) \right) \, dt \\ &= \int_U \left[\left(\nabla(f_3 \circ F) \middle| (\partial_2 F_3, -\partial_1 F_3) \right) + f_3 \circ F (\partial_{12} F_3 - \partial_{21} F_3) \right] \, dt \\ &= \int_U \left(\partial_1(f_3 \circ F) \partial_2 F_3 - \partial_2(f_3 \circ F) \partial_1 F_3 \right) \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_U \left[\left((\partial_1 f_3) \circ F \partial_1 F_1 + (\partial_2 f_3) \circ F \partial_1 F_2 + (\partial_3 f_3) \circ F \partial_1 F_3 \right) \partial_2 F_3 \right. \\
&\quad \left. - \left((\partial_1 f_3) \circ F \partial_2 F_1 + (\partial_2 f_3) \circ F \partial_2 F_2 + (\partial_3 f_3) \circ F \partial_2 F_3 \right) \partial_1 F_3 \right] dt \\
&= \int_U \left((\partial_2 f_3) \circ F N_1 - (\partial_1 f_3) \circ F N_2 \right) dt,
\end{aligned}$$

wobei sich in der letzten Gleichung zwei Terme gekürzt haben. Wir haben somit zwei der sechs Summanden des Integranden von L erhalten. Die anderen beiden Terme des Kurvenintegrals R liefern auf ähnliche Weise die verbleibenden vier Summanden. \square

Wenn f ein magnetisches Feld beschreibt, interpretiert man

$$Z = \int_{\partial_2 M} f \cdot dx$$

als die Zirkulation in der Leiterschleife $\partial_2 M$. Unter den Voraussetzungen des Satzes von Stokes liefert dieser die Formel

$$Z = \int_M (\operatorname{rot} f | n) d\sigma.$$

BEISPIEL 4.26. a) In der Situation von Theorem 4.25 sei $f = \nabla u$ für $u \in C^2(D, \mathbb{R})$. Dann gilt $\operatorname{rot} f = \operatorname{rot} \nabla u = 0$ laut einer Übung in Analysis 2 und somit

$$\int_{\partial_2 M} \nabla u \cdot dx = \int_M (\operatorname{rot} \nabla u | n) d\sigma = 0.$$

Sei etwa $u(x) = |x|^\alpha$ für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann folgt

$$\int_{\partial_2 M} x |x|^{\alpha-2} \cdot dx = 0, \quad \text{falls } \overline{M} \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

b) Im Rahmen des Divergenzsatzes sei $f = \operatorname{rot} g$ für $g \in C^2(\overline{D}, \mathbb{R}^3)$. Hier ergibt sich $\operatorname{div} \operatorname{rot} g = 0$ und damit

$$\int_{\partial D} (\operatorname{rot} g | \nu) d\sigma = \int_D \operatorname{div} \operatorname{rot} g dx = 0.$$

c) Für $f(x) = (-x_2, x_1, 0)$ gilt $\operatorname{rot} f(x) = (0, 0, 2)$. Seien $R > r > 0$ und $h(x_1, x_2) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$ für $(x_1, x_2) \in B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^2$ sowie M als Graph durch $F(x_1, x_2, h(x_1, x_2))$ parametrisiert. Man beachte, dass Bemerkung 4.5 und (4.3) die Formel $n_3(F(x_1, x_2)) = (1 + |\nabla h(x_1, x_2)|_2^2)^{-1/2} = g_F(x_1, x_2)^{-1/2}$ liefern. Dann erhalten wir

$$\int_{\partial_2 M} f \cdot dx = \int_M (\operatorname{rot} f | n) d\sigma = 2 \int_{B(0, r)} n_3 \circ F \sqrt{g_F} d(x_1, x_2) = 2\pi r^2. \quad \diamond$$

Die Lebesgueschen Räume und Fourierreihen

Es seien (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty]$, soweit nichts anderes gesagt wird. In diesem Kapitel untersuchen wir zunächst Funktionenräume zur p -Norm und zeigen in einem weiteren wichtigen Konvergenzsatz, dass sie vollständig sind. Im zweiten Abschnitt verwenden wir geometrische und analytische Überlegungen in einem dieser Räume, um eine elegante Lösung eines klassischen Problems der Analysis zu finden.

5.1. Die L^p -Räume

Für messbare $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir die p -Normen

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } p \in [1, \infty) \quad \text{und} \quad (5.1)$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x \in X} |f(x)| := \inf \{c > 0 \mid \exists \mu\text{-Nullmenge } N_c \forall x \in X \setminus N_c : |f(x)| \leq c\},$$

wobei $\infty^\alpha := \infty$ für $\alpha > 0$ ist, sowie die Räume

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{L}^p(X) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ messbar, } \|f\|_p < \infty \right\} \quad (5.2)$$

für $p \in [1, \infty]$. Wir betonen dabei, dass die Größe $\|f\|_p \in [0, \infty]$ wegen der Messbarkeit von f stets definiert ist. Weiter liegt eine messbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann in $\mathcal{L}^p(\mu)$ für $p \in [1, \infty)$ bzw. in $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, wenn $|f|^p$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$ enthalten bzw. $|f|$ fast überall beschränkt ist. Man beachte, dass die Funktion $f = \infty \mathbb{1}_{\{0\}} : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ f.ü. beschränkt ist, aber nicht $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x$, oder $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 1/x$. Im Folgenden konzentrieren wir uns auf den Fall $p \in [1, \infty)$.

Die p -Normen spielen in der Mathematik eine zentrale Rolle. Zu ihrer Bedeutung für andere Wissenschaften erwähnen wir, dass die Gesamtmasse eines Stoffes mit Massendichte $u \geq 0$ in $D \subseteq \mathbb{R}^3$ durch $\|u\|_1 = \int_D u \, dx$ gegeben ist. Die anderen p -Normen stehen oft mit Energieausdrücken in Beziehung; der Fall $p = 2$ entspricht dabei linearen Materialgesetzen, siehe (4.13). Ferner ist $\|f_n - f\|_1 = \int |f_n - f| \, dx$ gerade die Fläche zwischen den Graphen von f_n und f . Man nennt deshalb die Konvergenz $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ für $p \in [1, \infty)$ *Konvergenz im p -ten Mittel*. Wir verwenden in diesem Kontext Begriffe wie bei metrischen Räumen, auch wenn wir erst unten die Frage beleuchten, ob $\|\cdot\|_p$ eine (vollständige) Norm ist.

Um das Symbol $\|\cdot\|_\infty$ für das *wesentliche Supremum* $\operatorname{esssup}_{x \in X} |f(x)|$ teilweise zu rechtfertigen, betrachten wir $X \in \mathcal{B}_m$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ und $\mu = \lambda_m$ und nehmen

an, dass $\lambda_m(B(x, r) \cap X) > 0$ für alle $x \in X$ und $r > 0$ ist (z.B. sei X offen). Für stetige $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dann $\operatorname{esssup}_{x \in X} |f(x)| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. In der Tat ist dabei die Ungleichung ' \leq ' klar. Sei weiter $\varepsilon > 0$. Es gibt dann einen Punkt $x \in X$ mit $|f(x)| \geq \sup_X |f| - \varepsilon$. Da f stetig ist, existiert so ein Radius $r > 0$, dass $|f(y)| \geq \sup_X |f| - \varepsilon/2$ für alle $y \in X \cap B(x, r)$ gilt. Nach der Voraussetzung ist dann $\operatorname{esssup}_X |f| \geq \sup_X |f| - \varepsilon/2$, woraus die behauptete Gleichheit folgt.

Wir führen wie in Analysis 2 den konjugierten Exponenten

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1}, & p \in (1, \infty), \\ \infty, & p = 1, \\ 1, & p = \infty, \end{cases}$$

ein. Laut (2.2) in Analysis 2 genügt er den Beziehungen

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p'' = p, \quad p = p' \iff p = 2, \quad p \leq q \iff p' \geq q'$$

für $p, q \in [1, \infty]$. Im nächsten Satz zeigen wir die Dreiecksungleichung für die p -Normen. Als Hilfsmittel benötigt man dabei die Höldersche Ungleichung, die aber auch unabhängig davon eine fundamentale Rolle in der Analysis spielt. Einige ihrer wichtigen Varianten und Folgerungen werden in den Übungen besprochen.

SATZ 5.1. *Sei $p \in [1, \infty]$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Seien $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^{p'}(\mu)$. Dann liegt das Produkt fg in $\mathcal{L}^1(\mu)$ und es erfüllt die Höldersche Ungleichung*

$$\left| \int_X fg \, d\mu \right| \leq \int_X |fg| \, d\mu = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

b) *Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Dann ist die Summe $f + g$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ enthalten und sie genügt der Minkowskischen Ungleichung*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

BEWEIS. a) Zunächst sind fg und $|fg|$ messbar. Satz 2.29 zeigt die erste Ungleichung. Sei zuerst $p = 1$. Dann gibt es für jedes $c > \|g\|_\infty$ so eine Nullmenge N_c , dass $|g(x)| \leq c$ für alle $x \in X \setminus N_c$ ist. Mit Lemma 3.6 folgern wir

$$\int_X |fg| \, d\mu = \int_{X \setminus N_c} |f| |g| \, d\mu \leq c \int_{X \setminus N_c} |f| \, d\mu = c \|f\|_1.$$

Im Infimum über alle solche c folgt Behauptung a) für $p = 1$. Den Fall $p = \infty$ behandelt man analog.

Sei weiter $p \in (1, \infty)$ und damit auch $p' = p/(p-1) \in (1, \infty)$. Falls $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_{p'} = 0$ ist, verschwinden laut Lemma 2.20 die Funktionen f bzw. g f.ü., und die Aussage gilt. Es seien also beide Normen ungleich 0. Die Youngsche Ungleichung

(Beispiel 5.27 in Analysis 1) liefert dann

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'\|g\|_{p'}^{p'}} \quad \text{für jedes } x \in X.$$

Wir können diese nichtnegativen messbaren Funktionen integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \int_X |f(x)g(x)| \, d\mu(x) &\leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) + \frac{1}{p'\|g\|_{p'}^{p'}} \int_X |g(x)|^{p'} \, d\mu(x) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \end{aligned}$$

Also ist das Produkt fg integrierbar und die Höldersche Ungleichung ist gezeigt.

b) Der Fall $p = 1$ folgt aus Satz 2.29 (vergleiche die Rechnung unten). Den Beweis für $p = \infty$ lassen wir aus. Es sei $p \in (1, \infty)$. Zunächst sind auch die Funktionen $f + g$ und $|f + g|^p$ messbar. Weiter wenden wir Satz 2.8 in Analysis 2 auf den Vektor $(|f(x)|, |g(x)|) \in \mathbb{R}^2$ an und folgern die Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \leq 2^{1/p'} (|f(x)|^p + |g(x)|^p)^{1/p}, \\ |f(x) + g(x)|^p &\leq 2^{p-1} (|f(x)|^p + |g(x)|^p). \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion $|f + g|^p$ nach den Sätzen 2.26 und 2.29 integrierbar und damit liegt $f + g$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$. Satz 2.29 und Teil a) implizieren ferner

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g| |f + g|^{p-1} \, d\mu \leq \int_X |f| |f + g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g| |f + g|^{p-1} \, d\mu \\ &\leq \|f\|_p \left(\int_X |f + g|^{(p-1)p'} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} + \|g\|_{p'} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)p'} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_{p'}) \|f + g\|_p^{p-1}, \end{aligned}$$

wobei wir die Identitäten $(p-1)p' = p$ und $1/p' = (p-1)/p$ benutzen. Da $\|f + g\|_p$ endlich ist, ergibt sich Minkowskis Ungleichung per Division. \square

Wir haben auf einem Maßraum eine Familie von Räumen definiert, sodass sich die Fragen stellen, ob diese in einander enthalten sind und wie sich die jeweiligen Konvergenzen verhalten. Die Höldersche Ungleichung liefert eine erste Antwort.

KOROLLAR 5.2. *Seien $\mu(X) < \infty$ und $1 \leq p < q \leq \infty$. Dann ist $\mathcal{L}^q(\mu)$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ enthalten und für $f \in \mathcal{L}^q(\mu)$ gilt die Ungleichung*

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p-1/q} \|f\|_q.$$

Somit folgt hier aus $\|f - f_n\|_q \rightarrow 0$ auch die Konvergenz $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

BEWEIS. Den Fall $q = \infty$ behandelt man ähnlich wie im Beweis von Satz 5.1 a). Sei nun $q < \infty$. Wir verwenden die Höldersche Ungleichung mit $r := q/p \in (1, \infty)$,

um von $|f|^p$ auf $|f|^q$ zu kommen. Da dann $r' = (q/p)' = q/(q-p)$ ist, erhalten wir

$$\|f\|_p = \left(\int_X 1 \cdot |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X 1^{r'} \, d\mu \right)^{\frac{1}{pr'}} \left(\int_X |f|^{\frac{pq}{p}} \, d\mu \right)^{\frac{p}{pq}} = \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q. \quad \square$$

In den folgenden Beispielen zeigen wir, dass im Allgemeinen keine weiteren Inklusionen zwischen den Räumen $\mathcal{L}^p(\mu)$ gelten. Die dabei verwendeten Potenzfunktionen sind wichtige Majoranten und Testfälle in $\mathcal{L}^p(\lambda_m)$. Man beachte, wie die Aussagen von p und m abhängen.

BEISPIEL 5.3. Seien $\mu = \lambda_m, p, q \in [1, \infty), \alpha \in \mathbb{R}$ und $f_\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}; f_\alpha(x) = |x|_2^\alpha$ (wobei $f_\alpha(0) = 0$ für $\alpha < 0$ ist). Sei B die Kugel $\overline{B}(0, 1)$ in \mathbb{R}^m . Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Die Einschränkung $f_\alpha : B \rightarrow \mathbb{R}$ liegt genau dann in $\mathcal{L}^p(B)$, wenn $\alpha > -\frac{m}{p}$ ist. Also ist eine messbare Funktion $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ in $\mathcal{L}^p(B)$ enthalten, wenn die Ungleichung $|g| \leq cf_\alpha$ für ein $\alpha > -\frac{m}{p}$ und eine Konstante $c \geq 0$ gilt.

b) Die Einschränkung $f : \mathbb{R}^m \setminus B \rightarrow \mathbb{R}$ liegt genau dann in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m \setminus B)$, wenn $\alpha < -\frac{m}{p}$ ist. Also ist eine messbare Funktion $g : \mathbb{R}^m \setminus B \rightarrow \mathbb{R}$ in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m \setminus B)$ enthalten, wenn $|g| \leq cf_\alpha$ für ein $\alpha < -\frac{m}{p}$ und eine Konstante $c \geq 0$ gilt.

c) Es besteht keine Inklusion zwischen $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m)$ und $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^m)$, wenn p und q ungleich sind.

d) Produkte können einen Raum $\mathcal{L}^p(\mu)$ verlassen. Für $\alpha < 0$ ist etwa f_α für alle $1 \leq p < \frac{m}{|\alpha|}$ in $\mathcal{L}^p(B)$, aber $f_{2\alpha} = f_\alpha f_\alpha$ liegt nur für $1 \leq q < \frac{m}{2|\alpha|}$ in $\mathcal{L}^q(B)$.

BEWEIS. a) Polarkoordinaten und Beispiel 3.40 liefern

$$\|f_\alpha\|_p^p = \omega_m \int_0^1 r^{\alpha p} r^{m-1} \, dr.$$

Dieses Integral ist nach Beispiel 1.24 aus Analysis 2 genau für $\alpha p + m > 0$, also für $\alpha > -\frac{m}{p}$, endlich. Die zweite Aussage folgt dann aus Satz 2.26 und der Ungleichung $|g|^p \leq c^p f_\alpha^p$.

b) Die Behauptungen erhalten wir analog wie in Schritt a), da $\int_1^\infty r^{\alpha p} r^{m-1} \, dr$ genau für $\alpha < -\frac{m}{p}$ endlich ist.

c) Sei $1 \leq p < q < \infty$ und damit $-m/q > -m/p$. Wir setzen

$$h(x) = \begin{cases} |x|_2^\alpha, & |x|_2 < 1, \\ |x|_2^\beta, & |x|_2 \geq 1. \end{cases}$$

Auf Grund der Aussagen a) und b) liegt h in $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^m) \setminus \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m)$, wenn $\alpha > -m/q$ und $-m/q > \beta \geq -m/p$ gelten. Umgekehrt ist für $-m/q \geq \alpha > -m/p$ und $\beta < -m/p$ die Funktion h in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m) \setminus \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^m)$ enthalten. \square

Wie übertragen ferner den den *Satz von der majorisierten Konvergenz* auf $\mathcal{L}^p(\mu)$.

SATZ 5.4. Seien $1 \leq p < \infty, f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen und g eine Abbildung aus $\mathcal{L}^p(\mu)$. Weiter gelte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|f_n| \leq g$ f.ü.

und (f_n) konvergiere f.ü. gegen f für $n \rightarrow \infty$. Dann liegen auch alle f_n und f in $\mathcal{L}^p(\mu)$ und wir erhalten den Grenzwert $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

BEWEIS. Zunächst liefern die Voraussetzungen die f.ü. Majoranten $|f_n|^p, |f|^p \leq g^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da g^p integrierbar ist, liegen somit alle f_n und f in $\mathcal{L}^p(\mu)$ wegen Satz 2.26 und Lemma 3.6. Weiter konvergieren auch die Funktionen $|f_n - f|^p$ für $n \rightarrow \infty$ f.ü. gegen 0 und werden durch

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) \leq 2^p g^p$$

f.ü. dominiert. Lebesgue's Theorem 3.12 liefert nun die Konvergenzaussage durch

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p d\mu \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Wir wollen nun der Frage nachgehen, ob $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ein normierter Vektorraum ist. Sei dazu $p \in [1, \infty]$. Die Definitionen (5.1) und (5.2) implizieren leicht, dass für alle $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ auch αf in $\mathcal{L}^p(\mu)$ liegt und der Gleichung

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p \quad (5.3)$$

genügt. Wegen Satz 5.1 ist also $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein Vektorraum über \mathbb{R} . Außerdem besitzt die Abbildung $f \mapsto \|f\|_p$ die Eigenschaften (N2) und (N3) aus der Definition 2.1 einer Norm in Analysis 2. Wenn es allerdings eine nichtleere μ -Nullmenge N gibt, dann ist die Definitheit (N1) wegen den Relationen $\|\mathbb{1}_N\|_p = 0$ und $\mathbb{1}_N \neq 0$ verletzt.

Um dieses Problem zu lösen, betrachten wir die Menge

$$\mathcal{N} = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar, } f = 0 \text{ f.ü.}\}$$

der Nullfunktionen, die ein Untervektorraum jedes $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist. Dann ist der Quotientenraum

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = L^p(\mu) = L^p(X) := \mathcal{L}^p(\mu)/\mathcal{N} = \{\hat{f} = f + \mathcal{N} \mid f \in \mathcal{L}^p(\mu)\}. \quad (5.4)$$

ein Vektorraum über \mathbb{R} für die Verknüpfungen $\hat{f} + \hat{g} = \widehat{f+g}$ und $\alpha \hat{f} = \widehat{\alpha f}$ der Restklassen. Es gilt genau dann $\hat{f} = \hat{g}$ in $L^p(\mu)$, wenn alle Repräsentanten $f \in \hat{f}$ und $g \in \hat{g}$ fast überall gleich sind. Wir setzen außerdem $\hat{f} \leq \hat{g}$, falls $f \leq g$ fast überall gilt. (Wenn diese (Un-)Gleichung f.ü. für gewisse $f \in \hat{f}$ und $g \in \hat{g}$ erfüllt ist, dann gilt sie schon für alle Repräsentanten.) Ferner definieren wir für alle $\hat{f} \in L^p(\mu)$ und $p \in [1, \infty]$ die Norm

$$\|\hat{f}\|_p := \|f\|_p \quad \text{und für } p = 1 \text{ auch das Integral } \int_X \hat{f} d\mu = \int_X f d\mu \quad (5.5)$$

für ein $f \in \hat{f}$. (Nach Lemma 3.6 hängen diese Objekte nicht von der Wahl des Repräsentanten f ab.) Für $\hat{f}, \hat{g} \in L^p(\mu)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten weiter die Aussagen

$$\|\alpha \hat{f}\|_p = \|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p = |\alpha| \|\hat{f}\|_p,$$

$$\|\hat{f} + \hat{g}\|_p = \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p = \|\hat{f}\|_p + \|\hat{g}\|_p,$$

$$\|\hat{f}\|_p = 0 \iff \forall f \in \hat{f} : \|f\|_p = 0 \iff \forall f \in \hat{f} : f = 0 \text{ f.ü.} \iff \hat{f} = 0.$$

Hier haben wir die Formel (5.3), Satz 5.1 und Lemma 2.20 verwendet. Also ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ für jedes $p \in [1, \infty]$ ein normierter Vektorraum.

Die bisherigen Resultate zu $\mathcal{L}^p(\mu)$ übertragen sich auf $L^p(\mu)$, nachdem man gegebenenfalls punktweise Eigenschaften durch die entsprechenden Eigenschaften fast überall ersetzt hat.¹ Weiter sind die Abbildungen

$$L^1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}; \quad \hat{f} \mapsto \int_X \hat{f} \, d\mu, \quad (5.6)$$

$$L^p(\mu) \times L^{p'}(\mu) \rightarrow \mathbb{R}; \quad (\hat{f}, \hat{g}) \mapsto \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle := \int_X \hat{f} \hat{g} \, d\mu = \int_X f g \, d\mu, \quad (5.7)$$

stetig, sowie linear bzw. bilinear nach Satz 2.29. (Hier sind $f \in \hat{f}$ und $g \in \hat{g}$; man beachte $\hat{f}\hat{g} = \widehat{fg}$.) So folgt nach Satz 2.29 aus $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ in $L^1(\mu)$ die Konvergenz

$$\left| \int_X \hat{f} \, d\mu - \int_X \hat{f}_n \, d\mu \right| = \left| \int_X (\hat{f} - \hat{f}_n) \, d\mu \right| \leq \|\hat{f} - \hat{f}_n\|_1 \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Ähnlich impliziert für $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ in $L^p(\mu)$ und $\hat{g}_n \rightarrow \hat{g}$ in $L^{p'}(\mu)$ die Höldersche Ungleichung in Satz 5.1 die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle - \langle \hat{f}_n, \hat{g}_n \rangle| &= \left| \int_X (\hat{f} - \hat{f}_n) \hat{g} \, d\mu + \int_X \hat{f}_n (\hat{g} - \hat{g}_n) \, d\mu \right| \\ &\leq \|\hat{f} - \hat{f}_n\|_p \|\hat{g}\|_{p'} + \|\hat{f}_n\|_p \|\hat{g} - \hat{g}_n\|_{p'} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

da die konvergente Folge (\hat{f}_n) beschränkt ist. Für $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mu)$ setzen wir außerdem

$$(\hat{f}|\hat{g}) := \int_X \hat{f} \hat{g} \, d\mu = (\hat{g}|\hat{f}).$$

Dies ist ein reelles Skalarprodukt auf $L^2(\mu)$ mit induzierter Norm $\|\hat{f}\|_2^2 = (\hat{f}|\hat{f})$.

Im folgenden *Satz von F. Riesz und Fischer* (1907) wird die Vollständigkeit der L^p -Räume für $p \in [1, \infty)$ gezeigt. Ferner folgt aus dem Beweis, dass eine in $\mathcal{L}^p(\mu)$ konvergente Folge eine f.ü. konvergente Teilfolge mit einer f.ü. Majorante in $\mathcal{L}^p(\mu)$ besitzt. Also sind die Voraussetzungen des Satzes von der majorisierten Konvergenz zumindest für eine Teilfolge notwendig. Dies erlaubt einem z.B. in Korollar 5.7 von der Konvergenz im p -ten Mittel auf punktweise Aussagen zu schließen, was oft wichtig ist. Anschließend präsentieren wir ein Beispiel, in dem punktweise Konvergenz und Majorante wirklich nur für eine Teilfolge vorliegt. Man kann mit anderen Techniken auch zeigen, dass $L^\infty(\mu)$ ein Banachraum ist.

THEOREM 5.5. *Seien (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, $1 \leq p < \infty$ und (f_n) in $\mathcal{L}^p(\mu)$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_p$. Dann gibt es Funktionen $f, h \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und eine Teilfolge $(f_{n_j})_j$ derart, dass $(f_{n_j})_j$ fast überall gegen f für $j \rightarrow \infty$ strebt, $|f_{n_j}| \leq h$ fast überall für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt und $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Weiter ist $L^p(\mu)$ ein Banachraum und für $p = 2$ ein Hilbertraum (vgl. §2.1 in Analysis 2).*

¹Wir werden schon bald (in Bemerkung 5.8) die Räume $L^p(\mu)$ und $\mathcal{L}^p(\mu)$ identifizieren.

BEWEIS. 1) Nach Voraussetzung existiert für jedes $j \in \mathbb{N}$ so ein Index n_j , dass $n_{j+1} > n_j$ und $\|f_l - f_{n_j}\|_p \leq 2^{-j}$ für alle $l \geq n_j$ gelten. Die Funktionen $g_j := f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$ genügen somit der Ungleichung $\|g_j\|_p \leq 2^{-j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Auf Grund der Wahl der Abstände 2^{-j} sollte die (Teleskop-)Reihe der g_j absolut konvergieren. Um dies nachzuweisen, setzen wir

$$s_k := \left(\int_X \left(\sum_{j=1}^k |g_j(x)| \right)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| \sum_{j=1}^k |g_j| \right\|_p \leq \sum_{j=1}^k 2^{-j} \leq 1$$

für $k \in \mathbb{N}$, wobei auch die Dreiecksungleichung aus Satz 5.1 eingeht. Nach Beispiel 2.10 ist die Funktion

$$g : X \rightarrow [0, \infty]; \quad g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(x)|,$$

messbar. Aus dem Theorem 3.10 von Fatou schließen wir ferner

$$\int_X g(x)^p d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^k |g_j(x)| \right)^p d\mu(x) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} s_k^p \leq 1.$$

Also liegt g in $\mathcal{L}^p(\mu)$. Korollar 2.27 liefert nun so eine Nullmenge N , dass $g(x)^p$ und damit $g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ endlich ist. Folglich konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ für jedes $x \in X \setminus N$ absolut in \mathbb{R} .

2) Daraus ergibt sich die Konvergenz von

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} g_j(x) \longrightarrow f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) =: f(x)$$

für $k \rightarrow \infty$ und jedes $x \in X \setminus N$. Wir setzen ferner $f(x) = 0$ für $x \in N$. Die Beispiele 2.10 und 2.6 liefern die Messbarkeit der Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Demnach konvergiert die Teilfolge $(f_{n_k})_k$ f.ü. gegen f und ist durch

$$|f_{n_k}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_j| \leq |f_{n_1}| + g =: h \in \mathcal{L}^p(\mu)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ f.ü. dominiert. Laut Satz 5.4 liegt somit f in $\mathcal{L}^p(\mu)$ und $\|f_{n_k} - f\|_p$ strebt für $k \rightarrow \infty$ gegen 0.

Um die Konvergenz im p -ten Mittel der ganzen Folge zu zeigen, greifen wir auf die eingangs formulierte Cauchyfolgeneigenschaft zurück. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen ein $j \in \mathbb{N}$ mit $2^{-j} \leq \varepsilon$ und $\|f - f_{n_j}\|_p \leq \varepsilon$. Für alle $l \geq n_j$ folgt dann

$$\|f - f_l\|_p \leq \|f - f_{n_j}\|_p + \|f_{n_j} - f_l\|_p \leq \varepsilon + 2^{-j} \leq 2\varepsilon.$$

3) Sei $(\hat{f}_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L^p(\mu)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es demgemäß so einen Index $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$, dass die Ungleichung $\varepsilon \geq \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_p = \|f_n - f_m\|_p$ für alle $n, m \geq M_\varepsilon$ gilt. Damit bilden die Repräsentanten (f_n) in $\mathcal{L}^p(\mu)$ eine Cauchyfolge

bzgl. der p -Norm, sodass sie nach Schritt 2) für $\|\cdot\|_p$ gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ konvergieren. Also strebt $(\hat{f}_n)_n$ in $L^p(\mu)$ gegen \hat{f} und dieser Raum ist vollständig. \square

BEISPIEL 5.6. Seien $X = [0, 1]$, $\mu = \lambda_1$, $p \in [1, \infty)$ und

$$f_1 = \mathbb{1}_{[0,1/2)}, \quad f_2 = \mathbb{1}_{[1/2,1]}, \quad f_3 = 2\mathbb{1}_{[0,1/4)}, \quad f_4 = 2\mathbb{1}_{[1/4,1/2)}, \quad \dots, \quad f_7 = 3\mathbb{1}_{[0,1/8)}, \dots$$

Also gilt $\|f_n\|_p = l2^{-l/p} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, wobei l durch

$$\sum_{k=1}^{l-1} 2^k < n \leq \sum_{k=1}^l 2^k =: m_l$$

gegeben ist. Gleichwohl gibt es für jedes $x \in [0, 1]$ und jedes $j \in \mathbb{N}$ einen Index $n_j \in (m_{j-1}, m_j]$ mit $f_{n_j}(x) = j \rightarrow \infty$ für $j \rightarrow \infty$. Somit konvergiert (f_n) an *keiner* Stelle gegen 0 und besitzt keine Majorante in $\mathcal{L}^p([0, 1])$, da $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \infty$ ist.

Andererseits strebt die Teilfolge $(f_{n_k})_k = (\mathbb{1}_{[0,1/2)}, 2\mathbb{1}_{[1/2,3/4)}, 3\mathbb{1}_{[3/4,7/8)}, \dots)$ punktweise gegen 0 und hat die Majorante $g := \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}$ mit endlicher p -Norm wegen

$$\|g\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1-2^{1-k}}^{1-2^{-k}} k^p dx = \sum_{k=1}^{\infty} k^p 2^{-k} < \infty. \quad \diamond$$

Beispiel 5.3 impliziert, dass p -Normen zu verschiedenen p für λ_m auf Kugeln nicht äquivalent und auf \mathbb{R}^m nicht einmal vergleichbar sind. Immerhin folgt aus dem Satz von Riesz-Fischer, dass eine Folge im Schnitt von $L^p(\mu)$ und $L^q(\mu)$ nicht zwei verschiedene Grenzwerte in diesen Räumen besitzen kann.

KOROLLAR 5.7. *Es seien $\hat{f}_n \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ für $1 \leq p, q < \infty$ mit $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ in $L^p(\mu)$ und $\hat{f}_n \rightarrow \hat{g}$ in $L^q(\mu)$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt $\hat{f} = \hat{g} \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ und die Repräsentanten f und g sind fast überall gleich.*

BEWEIS. Nach Theorem 5.5 existieren solche Teilfolgen und Nullmengen N_1 und N_2 , dass $f_{n_k}(x)$ für alle $x \in X \setminus N_1$ und $k \rightarrow \infty$ gegen $f(x)$ und $f_{n_{k_j}}(x)$ für alle $x \in X \setminus N_2$ und $j \rightarrow \infty$ gegen $g(x)$ konvergiert. Also gilt $f(x) = g(x)$ für alle x außerhalb der Nullmenge $N_1 \cup N_2$. \square

BEMERKUNG 5.8. a) Seien $1 \leq p \leq \infty$ und $X \in \mathcal{B}_m$ so, dass $\lambda_m(B(x, r) \cap X) > 0$ für alle $x \in X$ und $r > 0$ gilt. Dann ist die Abbildung $J : C(X, \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}(X), \lambda_m) \rightarrow L^p(X, \mathcal{B}(X), \lambda_m)$; $f \mapsto \hat{f}$, injektiv. Also ist hier f der einzige stetige Repräsentant von $Jf = \hat{f}$.

BEWEIS. Seien $f, g \in C(X, \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}(X), \lambda_m)$ mit $\hat{f} = \hat{g}$. Dann ist $f = g$ f.ü.. Wir nehmen an, es gäbe eine Stelle $x_0 \in X$ mit $f(x_0) \neq g(x_0)$. Die Voraussetzung liefert dann Punkte $x_n \in X$ mit $f(x_n) = g(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$. Aus der Stetigkeit folgt dann der Widerspruch $f(x_0) = g(x_0)$. \square

b) Man identifiziert meist $L^p(\mu)$ mit $\mathcal{L}^p(\mu)$ und \hat{f} mit $f \in \hat{f}$, wobei dann alle punktwisen Beziehungen nur fast überall gelten. Aussagen auf Nullmengen sind aber in $L^p(\mu)$ sinnlos. So ist für $x_0 \in X$ die Abbildung $f \mapsto f(x_0)$ zwar auf $\mathcal{L}^p(\mu)$, aber nicht auf $L^p(\mu)$ definiert, wenn $\{x_0\}$ eine μ -Nullmenge ist. \diamond

Im folgenden Approximationstheorem nehmen wir den Raum $L^p(\mu)$ als Ganzen in den Blick: Wir identifizieren dichte Teilmengen, die somit in $L^p(\mu)$ wie etwa \mathbb{Q} in \mathbb{R} liegen. Dabei betrachten wir den Raum der stetigen Funktionen mit kompakten Träger in einer offenen Menge $X \subseteq \mathbb{R}^m$, die also insbesondere am Rand ∂X verschwinden (was etwa bei partieller Integration nützlich ist). Solche Sätze und ihre Verfeinerungen in späteren Vorlesungen ermöglichen es oft, Sachverhalte zuerst auf Teilräumen ‘guter’ Funktionen nachzurechnen und dann (falls möglich) durch Grenzwertbildung auf ganz $L^p(\mu)$ zu übertragen – dies ist eine der fundamentalen Techniken der Analysis. Einen ersten Eindruck davon gibt der folgende Abschnitt. Das nächste Theorem gilt im übrigen nicht für $p = \infty$.

THEOREM 5.9. *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Seien (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Dann ist der Raum*

$$E = \{f \in L^p(\mu) \mid f \text{ ist einfach}\}$$

dicht in $L^p(\mu)$; d.h., für alle $f \in L^p(\mu)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine einfache Funktion $g \in L^p(\mu)$ mit $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

b) *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Dann liegt der Raum*

$$C_c(X, \mathbb{R}) = \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid \text{supp } f \text{ ist kompakt}\}$$

dicht in $L^p(X, \mathcal{B}(X), \lambda_m)$.

BEWEIS. a) Sei $f \in L^p(\mu)$. Aus Satz 2.13 erhalten wir eine Folge einfacher Funktionen (f_n) , die punktweise gegen f konvergieren und die Ungleichung $|f_n| \leq f$ für jedes n erfüllen. Nach Lebesgues Satz 5.4 liegen alle f_n in $L^p(\mu)$ und damit in E , und sie streben in $L^p(\mu)$ gegen f .

b) Seien $f \in L^p(X)$ und $\varepsilon > 0$. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1) Zuerst liefert Teil a) eine Funktion $g \in E$ mit $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Weiter setzen wir

$$X_k = \overline{B}(0, k) \cap \{x \in X \mid d(x, \partial X) = \inf_{y \in \partial X} |x - y|_2 \geq 1/k\} \subseteq X$$

für $k \in \mathbb{N}$. Wie in Bemerkung 4.2 sind diese Mengen kompakt und ihre Vereinigung ist X . Weiter gilt $X_k \subseteq X_{k+1}^\circ$. Somit hat die Folge $(\mathbb{1}_{X_k} g)$ in E den punktweisen Grenzwert g und wird durch $|g|$ majorisiert. Wieder Satz 5.4 impliziert nun die Konvergenz $\mathbb{1}_{X_k} g \rightarrow g$ in $L^p(X)$. Wir finden also einen Index $\bar{k} \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $h := \mathbb{1}_{X_{\bar{k}}} g \in E$ mit kompakten Träger in $X_{\bar{k}} \subseteq X$ und

$$\|f - h\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - h\|_p \leq 2\varepsilon.$$

2) Es gibt folglich $n \in \mathbb{N}$, $y_j \in \mathbb{R}$ und $A_j \in \mathcal{B}_m$ mit $A_j \subseteq X_{\bar{k}}$ und

$$h = \sum_{j=1}^n y_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Wenn alle $y_j = 0$ sind, ist $h = 0 \in C_c(X, \mathbb{R})$ und wir sind fertig. Andernfalls setzen wir $\delta = (\sum_{j=1}^n |y_j|)^{-1} \varepsilon$. Wir wenden nun Theorem 1.26 auf $A := A_j$ an und ersetzen

dann dort O durch $O_j := O \cap X_{\bar{k}+1}^\circ$. So erhalten wir kompakte bzw. offene Mengen K_j und O_j mit $K_j \subseteq A_j \subseteq O_j \subseteq X_{\bar{k}+1}$ und $\lambda_m(O_j \setminus K_j) \leq \delta^p$. Wir führen dann

$$\varphi_j(x) = \frac{d(x, X \setminus O_j)}{d(x, K_j) + d(x, X \setminus O_j)}$$

für $x \in X$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ ein. Wegen Bemerkung 2.35 in Analysis 2 erhalten wir damit stetige Funktionen $\varphi_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\varphi_j = 0$ auf $X \setminus O_j$ und $\varphi_j = 1$ auf K_j . Demnach gehört die Abbildung

$$\varphi := \sum_{j=1}^n y_j \varphi_j$$

zu $C(X, \mathbb{R})$ und hat einen kompakten Träger in $X_{\bar{k}+1}$. Auf Grund der Dreiecksungleichung in Satz 5.1 genügt sie der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\varphi - h\|_p &\leq \sum_{j=1}^n |y_j| \|\varphi_j - \mathbb{1}_{A_j}\|_p = \sum_{j=1}^n |y_j| \left(\int_X |\varphi_j - \mathbb{1}_{A_j}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{j=1}^n |y_j| \lambda_m(O_j \setminus K_j)^{\frac{1}{p}} \leq \delta \sum_{j=1}^n |y_j| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit Schritt 1) folgt Behauptung b). □

5.2. Fourierreihen

Als Motivation betrachten wir die Wellengleichung (4.12) in Raumdimension $m = 1$ für die am Rand eingeklemmte schwingende Saite $D = (0, 2\pi)$ mit einer gegebenen Konstanten $a > 0$ und der (ruhenden) Anfangsauslenkung $f \in C_b^2((0, 2\pi))$, sowie gesuchter Auslenkung $u(t, x)$ zur Zeit $t \geq 0$ und am Ort $x \in (0, 2\pi)$. Dann erfüllt $u \in C_b^2(\mathbb{R}_{\geq 0} \times (0, 2\pi))$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(t, x) &= a\partial_{xx}u(t, x), & t \geq 0, x \in (0, 2\pi), \\ u(t, 0) &= u(t, 2\pi) = 0, & t \geq 0, \\ u(0, x) &= f(x), \quad \partial_t u(0, x) = 0, & x \in (0, 2\pi). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Für $f_n(x) = \sin(nx)$ und $n \in \mathbb{N}$ besitzt das obige Problem die spezielle Lösung $u_n(t, x) = \cos(\sqrt{a}nt) \sin(nx)$, die eine stehende Welle beschreibt. (Probe!)

Es stellt sich nun die Frage, ob man die Lösung u für ‘beliebige’ gegebene f als eine Reihe von Funktionen wie u_n darstellen kann. Auch unabhängig von der Motivation durch die Wellengleichung ist dies eine wichtige Fragestellung, da Taylorreihen unbeschränkte Polynome verwenden und deswegen meist nur in der Nähe des Entwicklungspunktes gut approximieren. Die hier verwendeten Funktionen sind hingegen beschränkt. Wir werden unten im L^2 -Rahmen eine Reihendarstellung durch trigonometrische Funktionen nachweisen können.

Hierbei ist es bequemer mit der komplexen Exponentialfunktion als mit Sinus und Kosinus zu arbeiten. Deswegen diskutieren wir kurz die Integration von komplexwertigen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. (Vergleiche etwa das Buch [3].)

Als metrischer Raum ist $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ homöomorph zu $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_2)$, wobei man $z = s + it \in \mathbb{C}$ auf $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ abbildet. Demzufolge identifizieren wir $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ mit \mathcal{B}_2 . Wir verwenden auch den Real- und Imaginärteil $(\operatorname{Re}f)(x) = \operatorname{Re}f(x)$ bzw. $(\operatorname{Im}f)(x) = \operatorname{Im}f(x)$ für $x \in X$ von f . Es gilt $f = \operatorname{Re}f + i\operatorname{Im}f$. Satz 2.5 liefert nun die Äquivalenz

$$f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ ist } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{C})\text{-messbar} \Leftrightarrow \operatorname{Re}f, \operatorname{Im}f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ sind } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}_1\text{-messbar.} \quad (5.9)$$

Aus diesen Eigenschaften folgt dann auch die $\mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}_1$ -Messbarkeit des Absolutbetrags $|f| : X \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nennen nun eine messbare Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ *integrierbar*, wenn die reelle Funktion $|f| : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist. Mittels der Ungleichungen

$$|\operatorname{Re}f|, |\operatorname{Im}f| \leq |f| \leq \sqrt{2} \max\{|\operatorname{Re}f|, |\operatorname{Im}f|\}$$

und Satz 2.26 können wir diese Eigenschaft durch

$$\begin{aligned} |f| : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ ist integrierbar} &\Leftrightarrow \operatorname{Re}f, \operatorname{Im}f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ sind integrierbar} \quad (5.10) \\ &\Leftrightarrow (\operatorname{Re}f)_{\pm}, (\operatorname{Im}f)_{\pm} : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ sind integrierbar} \end{aligned}$$

charakterisieren. In diesem Fall führen wir das Integral

$$\int_X f \, d\mu := \int_X \operatorname{Re}f \, d\mu + i \int_X \operatorname{Im}f \, d\mu \in \mathbb{C} \quad (5.11)$$

von f ein, wobei rechts nur bekannte reelle Integrale stehen. Schließlich definieren wir die Funktionenräume

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(X, \mathcal{A}, \mu) &= \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(\mu) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar, } |f| \in \mathcal{L}^p(\mu)\}, \\ L_{\mathbb{C}}^p(\mu) &:= \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(\mu) / \mathcal{N}_{\mathbb{C}}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

mit der Norm $\|f\|_p = \||f|\|_p$ für $p \in [1, \infty]$. Dabei ist nun

$$\mathcal{N}_{\mathbb{C}} = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist messbar, } f = 0 \text{ f.ü.}\}.$$

Wir identifizieren wieder $L_{\mathbb{C}}^p(\mu)$ mit $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(\mu)$ und \hat{f} mit $f \in \hat{f}$. Man kann unsere bisherigen Resultate leicht auf komplexwertige Funktionen übertragen, soweit nicht die Ordnung von \mathbb{R} wesentlich eingeht (wie etwa bei der Monotonie des Integrals). Wir sammeln das nachfolgend Benötigte.

BEMERKUNG 5.10. Sei $f \in L_{\mathbb{C}}^1(\mu)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Aus (5.11) und Satz 2.29 folgen die \mathbb{C} -Linearität der Abbildung $f \mapsto \int_X f \, d\mu$ und die Beziehungen

$$\operatorname{Re} \int_X f \, d\mu = \int_X \operatorname{Re}f \, d\mu, \quad \operatorname{Im} \int_X f \, d\mu = \int_X \operatorname{Im}f \, d\mu, \quad \overline{\int_X f \, d\mu} = \int_X \bar{f} \, d\mu.$$

b) Wir haben die Ungleichung

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu.$$

BEWEIS. Wir setzen $z = \int f \, d\mu$. Wenn $z = 0$ ist, sind wir fertig. Andernfalls folgern wir aus Teil a) und Satz 2.29 die Relationen

$$\begin{aligned} |z|^2 &= \bar{z} \int_X f \, d\mu = \int_X \bar{z} f \, d\mu = \operatorname{Re} \int_X \bar{z} f \, d\mu = \int_X \operatorname{Re}(\bar{z} f) \, d\mu \\ &\leq \int_X |\bar{z}| |f| \, d\mu = |z| \int_X |f| \, d\mu, \end{aligned}$$

wobei auch einging, dass $|z|^2$ und damit die zwei folgenden Terme reell sind. Wir dividieren nun durch $|z|$ und erhalten die Behauptung. \square

c) Die Ungleichungen von Hölder und Minkowski und die Sätze von Lebesgue und Riesz-Fischer gelten auch in $L^p_{\mathbb{C}}(\mu)$. Also ist $L^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ ein Banachraum über \mathbb{C} .

d) Für $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}$ setzen wir

$$(f|g) = \int_X f \bar{g} \, d\mu.$$

Wie in (5.7) definiert dies eine stetige Abbildung von $L^2_{\mathbb{C}}(\mu) \times L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ nach \mathbb{C} , die in f linear und in g additiv ist. Weiter folgt aus Aussage a) die Symmetriebeziehung

$$\overline{(f|g)} = \int_X \bar{f} g \, d\mu = (g|f).$$

Also ist $(\cdot|\cdot)$ ein \mathbb{C} -Skalarprodukt und antilinear im zweiten Argument. Wegen $(f|f) = \int |f|^2 \, d\mu = \|f\|_2^2$, ist $\|\cdot\|_2$ die induzierte Norm und $L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ ein \mathbb{C} -Hilbertraum.

e) Zwei Funktionen $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ heißen *orthogonal* (oder senkrecht), wenn $(f|g) = 0$ ist. Wir schreiben dann $f \perp g$. Dies gilt etwa, wenn f und g disjunkte Träger haben. Auch für $f = \mathbb{1}$ und $g = \mathbb{1}_{[0,1/2)} - \mathbb{1}_{[1/2,1]}$ auf $X = [0, 1]$ mit $\mu = \lambda_1$ erhalten wir

$$(f|g) = \int_0^{1/2} 1 \, dx - \int_{1/2}^1 1 \, dx = 0. \quad \diamond$$

Ab jetzt betrachten wir nur noch den Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu) = ([0, 2\pi], \mathcal{B}([0, 2\pi]), \lambda_1)$ und schreiben L^p statt $L^p_{\mathbb{C}}([0, 2\pi])$ für $p \in [1, \infty]$. Wir beginnen mit einem grundlegenden Beispiel.

BEISPIEL 5.11. Wir setzen $e_k(t) = e^{ikt}$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{R}$ sowie $b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_k \in C([0, 2\pi], \mathbb{C})$. Dann liegt b_k in L^2 und es gelten

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{ikt} \, dt &= \int_0^{2\pi} \cos kt \, dt + i \int_0^{2\pi} \sin kt \, dt \\ &= \begin{cases} 2\pi, & k = 0, \\ \frac{1}{k} \sin(kt) \Big|_0^{2\pi} - i \frac{1}{k} \cos(kt) \Big|_0^{2\pi} = 0, & k \neq 0, \end{cases} \\ (b_j|b_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_j \bar{e}_k \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t} \, dt = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \end{aligned}$$

für $j, k \in \mathbb{Z}$. Also ist das System $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ orthonormal in L^2 . \diamond

Wir wollen zeigen, dass $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine *Orthonormalbasis* von L^2 ist; d.h., $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist orthonormal in L^2 und für jedes $f \in L^2$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $\gamma_j \in \mathbb{C}$ mit

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n \gamma_j b_j =: \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma_j b_j \quad (\text{in } L^2).$$

Zunächst klären wir, welche Koeffizienten γ_j hier überhaupt in Frage kommen.

LEMMA 5.12. *Es gelte $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k b_k$ in L^2 für Zahlen $\gamma_k \in \mathbb{C}$. Dann ist $\gamma_k = (f|b_k)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$.*

BEWEIS. Die Stetigkeit und Linearität des Skalarprodukts laut Bemerkung 5.10 sowie Beispiel 5.11 liefern die Behauptung

$$(f|b_j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k (b_k|b_j) = \gamma_j \quad \text{für } j \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Für $f \in L^1$, $k \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man folglich den *k-ten Fourierkoeffizienten*

$$(f|b_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (5.13)$$

und die *n-te Fourierpartialsumme*

$$S_n f = \sum_{j=-n}^n (f|b_j) b_j. \quad (5.14)$$

Wenn die Folge $(S_n f)_n$ in L^2 konvergiert, so heißt ihr Grenzwert

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (f|b_k) b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n f \quad (5.15)$$

die *Fourierreihe von f*.

Es stellen sich nun die Fragen, ob die Fourierreihe für jedes $f \in L^2$ konvergiert und ob f der Grenzwert ist. Um diese zu beantworten, benutzen wir den Untervektorraum

$$E_n = \text{lin}\{b_{-n}, b_{-n+1}, \dots, b_n\}$$

von L^2 für $n \in \mathbb{N}$, wobei $E_n \subseteq E_{n+1}$ gilt. Mit Techniken aus der Linearen Algebra zeigen wir zuerst wesentliche Eigenschaften der Fourierpartialsummen.

LEMMA 5.13. *Seien $f, g \in L^2$, $n \in \mathbb{N}$ und $u \in E_n$.*

a) *Sei $f \perp g$. Dann gilt die Gleichung des Pythagoras*

$$\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2.$$

b) *Die Abbildung $S_n : L^2 \rightarrow E_n$ ist linear und erfüllt $S_n u = u$ sowie $(f - S_n f) \perp u$.*

c) *Die Fourierpartialsummen genügen der Besselschen Ungleichung*

$$\|S_n f\|_2^2 = \sum_{j=-n}^n |(f|b_j)|^2 = \|f\|_2^2 - \|f - S_n f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2.$$

d) *Es gilt $\|f - S_n f\|_2 \leq \|f - u\|_2$.*

BEWEIS. a) Die Eigenschaften des Skalarproduktes und die Orthogonalität implizieren

$$\|f+g\|_2^2 = (f+g|f+g) = (f|f) + (f|g) + (g|f) + (g|g) = (f|f) + (g|g) = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2.$$

b) Die Definition (5.14) zeigt sofort, dass S_n linear ist und nach E_n abbildet. Sei $u \in E_n$. Dann gibt es Koeffizienten $\gamma_j \in \mathbb{C}$ mit $u = \sum_{j=-n}^n \gamma_j b_j$. Wie im Beweis von Lemma 5.12 und mit (5.14) folgen nun

$$(u|b_k) = \sum_{j=-n}^n \gamma_j (b_j|b_k) = \gamma_k \quad \text{für } |k| \leq n,$$

$$S_n u = \sum_{j=-n}^n (u|b_j) b_j = \sum_{j=-n}^n \gamma_j b_j = u,$$

$$(f - S_n f|u) = (f|u) - (S_n f|u) = \sum_{j=-n}^n \overline{\gamma_j} (f|b_j) - \sum_{j=-n}^n (f|b_j) \overline{(u|b_j)} = 0.$$

c) Aus Teil a) und der Orthonormalität der b_j schließen wir auf die Gleichung

$$\|S_n f\|_2^2 = \sum_{j=-n}^n \|(f|b_j) b_j\|_2^2 = \sum_{j=-n}^n |(f|b_j)|^2.$$

Laut Aussage b) sind $f - S_n f$ und $S_n f$ orthogonal, sodass nochmals a) die Identität

$$\|f\|_2^2 = \|f - S_n f\|_2^2 + \|S_n f\|_2^2$$

und damit Behauptung c) liefert.

d) Nach Schritt b) stehen $f - S_n f$ und $S_n f - u \in E_n$ senkrecht aufeinander. Mit Aussage a) ergibt sich dann die Behauptung

$$\|f - u\|_2^2 = \|f - S_n f\|_2^2 + \|S_n f - u\|_2^2 \geq \|f - S_n f\|_2^2. \quad \square$$

Es folgt insbesondere $S_n^2 = S_n$, weswegen man S_n die *Orthogonalprojektion* auf E_n nennt. Gemäß des obigen Lemmas ist der *Lotfußpunkt* $S_n f$ von $f \in L^2$ auf E_n die Funktion in E_n , die f bezüglich der 2-Norm am nächsten ist und deren Verbindungsvektor $f - S_n f$ senkrecht auf E_n steht.

Die obigen Ergebnisse liefern alleine noch nicht die Konvergenz der Fourierreihe. Dazu bedarf es noch eines tieferen Dichtheitsresultats der Analysis, nämlich des *Approximationssatzes von Weierstraß*. Im Gegensatz zu Theorem 5.9 arbeiten wir hier mit der Supremumsnorm. Die Approximationen werden durch eine Faltung mit regulären, geschickt gewählten Funktionen konstruiert, was sich in späteren Vorlesungen noch als eine sehr wirkungsvolle Methode erweisen wird.

In Teil a) approximiert man mit Polynomen und in b) mit Elementen aus E_n , wobei wir b) auf a) zurückführen. Andere Beweise der Aussage b) findet man in Theorem V.4.16 aus [1] oder in Satz 16.1 aus [5].

THEOREM 5.14. *Seien $f \in C([a, b], \mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- a) Es gibt ein Polynom $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\|f - q\|_\infty \leq \varepsilon$.
 b) Seien speziell $a = 0$, $b = 2\pi$ und $f(0) = f(2\pi)$. Dann gibt es einen Index $n \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $u \in E_n$ mit $\|f - u\|_\infty \leq \varepsilon$.

BEWEIS. a) 1) Seien zuerst $a = 0$, $b = 1$ und $f(0) = f(1) = 0$. Wir setzen $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$. Da f auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig ist, gilt dies auch für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Also gibt es so einen Abstand $\delta = \delta_\varepsilon \in (0, 1)$, dass

$$|f(x) - f(x - y)| \leq \varepsilon/2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|y| \leq \delta$ gilt. Weiter definieren wir die Polynome

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{a_k} (1 - x^2)^k \mathbb{1}_{[-1, 1]}(x) \quad \text{mit} \quad a_k = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^k dx$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$, wobei die Ungleichung $a_k \geq \int_0^1 (1 - x)^k dx = \frac{1}{k+1}$ gilt. Es folgen die Beziehungen $\int_{\mathbb{R}} \varphi_k dx = 1$ und für $|x| \geq \delta$

$$0 \leq \varphi_k(x) \leq a_k^{-1} (1 - \delta^2)^k \leq (k+1) (1 - \delta^2)^k =: m_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

2) Wir verwenden die approximierenden Funktionen

$$f_k(x) = \varphi_k * f(x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(t) f(x - t) dt$$

für $x \in \mathbb{R}$. Nun gibt es stetige Abbildungen $g_{jk} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_k(x - y) = \frac{1}{a_k} (1 - (x - y)^2)^k \mathbb{1}_{[-1, 1]}(x - y) = \sum_{j=0}^{2k} g_{jk}(y) x^j$$

für alle $x, y \in [0, 1]$. Da f außerhalb $[0, 1]$ verschwindet, erhalten wir die Gleichung

$$f_k(x) = \int_0^1 \varphi_k(x - y) f(y) dy = \sum_{j=0}^{2k} x^j \int_0^1 g_{jk}(y) f(y) dy$$

für $x \in [0, 1]$. Also ist $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom.

Sei $x \in [0, 1]$. Wir verwenden nun die Gleichungen $\text{supp } \varphi_k = [-1, 1]$ und $\int \varphi_k dx = 1$, sowie die Eigenschaften des Integrals laut Satz 2.29 in der Rechnung

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 \varphi_k(t) f(x - t) dt - \int_{-1}^1 \varphi_k(t) dt f(x) \right| \\ &= \left| \int_{-1}^1 \varphi_k(t) (f(x - t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \int_{|t| \leq \delta} \varphi_k(t) |f(x - t) - f(x)| dt + \int_{\delta \leq |t| \leq 1} \varphi_k(t) |f(x - t) - f(x)| dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|t| \leq \delta} \varphi_k(t) dt + 2\|f\|_\infty \int_{\delta \leq |t| \leq 1} m_k dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 4\|f\|_\infty m_k \leq \varepsilon \end{aligned}$$

für alle genügend großen $k \in \mathbb{N}$, wobei auch die obigen Abschätzungen eingingen.

3) Für eine gegebene Funktion $f \in C([a, b], \mathbb{C})$ setzen wir

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}; \quad g(t) = f(a + t(b - a)) - \left(f(a) + (f(b) - f(a))t \right).$$

Also ist g stetig mit $g(0) = g(1) = 0$. Laut Schritt 2 gibt es ein Polynom q_0 auf $[0, 1]$ mit $\sup_{t \in [0, 1]} |g(t) - q_0(t)| \leq \varepsilon$. Wir definieren das Polynom q durch

$$q : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}; \quad q(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + q_0\left(\frac{x - a}{b - a}\right).$$

Mit der Substitution $t = (x - a)/(b - a)$ folgt dann die behauptete Ungleichung

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - q(x)| = \sup_{t \in [0, 1]} |g(t) - q_0(t)| \leq \varepsilon.$$

b) Sei $K = \partial B(0, 1)$ in \mathbb{R}^2 . Die Abbildung $\varphi : t \mapsto e^{it} = (x, y)$ ist ein Bijektion von $[0, 2\pi)$ auf K , die ferner 2π auf $1 = \varphi(0)$ abbildet. Wegen $f(0) = f(2\pi)$ ist die transformierte Funktion $g : K \rightarrow \mathbb{C}; g(x, y) = f(\varphi^{-1}(x, y)) = f(t)$, stetig. Mit einem Beweis wie in Teil a) liefert der Satz am Ende von §10.1 in [6] ein Polynom $q = \varphi_k * f$ in (x, y) mit $\|g - q\|_\infty \leq \varepsilon$. Dabei verwendet man

$$\varphi_k(x, y) = \frac{1}{a_k}(1 - x^2)^k(1 - y^2)^k \mathbb{1}_{[-1, 1]^2}(x, y),$$

wobei a_k analog zu Teil a1) gewählt ist. Mit $1 = x^2 + y^2$ gilt dann $\varphi_k(x, y) = \frac{1}{a_k} y^{2k} x^{2k}$ auf K , und q ist ein Polynom in $x^j y^l$ mit $j, l \in \{0, \dots, 2k\}$. Weiter erhalten wir $x^j = (2^{-1}(e^{it} + e^{-it}))^j = 2^{-j} \sum_{\kappa=0}^j c_\kappa e^{it(j-2\kappa)}$ und entsprechend für y^l . Also liegt die Abbildung $u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}; u(t) = q(x, y) = q(e^{it})$, in E_n für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(t) - u(t)| = \|g - q\|_\infty \leq \varepsilon$. \square

Wir kommen nun zum zentralen Resultat dieses Abschnitts, in dem wir nachweisen, dass die Fourierreihe von $f \in L^2$ stets in L^2 gegen f konvergiert. Damit kann man die Funktionen b_j wie eine kartesische Basis in \mathbb{C}^m verwenden. Zum Beispiel berechnet sich die Norm $\|f\|_2^2$ durch die Quadratsumme der Entwicklungskoeffizienten. In der Vorlesung Funktionalanalysis wird unser Vorgehen zu einer allgemeinen Theorie der Orthonormalbasen in Hilberträumen erweitert, cf. §V.4 in [11].

THEOREM 5.15. *Sei $f \in L^2 = L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi])$. Dann konvergieren die Fourierpartialsummen $S_n f$ in L^2 gegen f für $n \rightarrow \infty$. Also gilt*

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f|b_k) b_k$$

in L^2 , wobei die Koeffizienten $(f|b_k)$ in dieser Darstellung eindeutig bestimmt sind. Wir erhalten ferner die Parsevalsche Gleichung

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |(f|b_k)|^2.$$

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$. Zunächst liefert Theorem 5.9 (angewendet auf $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$) eine Funktion $g \in C_c((0, 2\pi), \mathbb{C})$ mit $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$. Wir setzen g mit 0 auf $C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ fort. Laut Theorem 5.14 gibt es dann einen Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ und ein

‘trigonometrisches Polynom’ $u \in E_{n_\varepsilon}$ mit $\|g - u\|_\infty \leq \varepsilon$, woraus sich die Abschätzung $\|g - u\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\varepsilon$ aus Korollar 5.2 ergibt. Sei nun $n \geq n_\varepsilon$. Dann liegt u auch in E_n und wir folgern mittels Lemma 5.13 die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|f - S_n f\|_2 &\leq \|f - g\|_2 + \|g - S_n g\|_2 + \|S_n g - S_n f\|_2 \\ &\leq \varepsilon + \|g - u\|_2 + \|S_n(f - g)\|_2 \\ &\leq \varepsilon + \sqrt{2\pi}\varepsilon + \|f - g\|_2 \leq (2 + \sqrt{2\pi})\varepsilon. \end{aligned}$$

Also konvergiert $(S_n f)$ in L^2 gegen f . Die Eindeutigkeit der Koeffizienten wurde in Lemma 5.12 bewiesen. Die Stetigkeit der Norm und Lemma 5.13 c) implizieren schließlich die Parsevalsche Gleichung

$$\|f\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n f\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |(f|b_k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |(f|b_k)|^2. \quad \square$$

Für reellwertige $f \in L^p_{\mathbb{R}} := L^p([0, 2\pi], \mathcal{B}([0, 2\pi]), \lambda_1)$ reformulieren wir das obige Theorem und geben eine Reihendarstellung von f durch Sinus und Kosinus

$$c_k(t) := \cos(kt) \quad \text{und} \quad s_k(t) := \sin(kt),$$

wobei $t \in [0, 2\pi]$ und $k \in \mathbb{Z}$ sind. Dabei gelten

$$\operatorname{Re} b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_k \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s_k.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \alpha_k &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \int_0^{2\pi} f \operatorname{Re} \bar{b}_k dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re}(f|b_k), \\ \beta_k &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \int_0^{2\pi} f(-\operatorname{Im} \bar{b}_k) dt = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Im}(f|b_k) \end{aligned} \quad (5.16)$$

für $f \in L^1_{\mathbb{R}}$ und $k \in \mathbb{N}_0$, wobei $\beta_0 = 0$ ist. Die Funktion f heißt *gerade* (bzgl. $t = \pi$), wenn die Gleichung $f(t) = f(2\pi - t)$, und *ungerade*, wenn $f(t) = -f(2\pi - t)$ für fast alle $t \in [0, 2\pi]$ erfüllt ist.

KOROLLAR 5.16. *Seien $f \in L^2_{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, sowie α_k und β_k wie in (5.16) definiert. Dann gelten die Aussagen*

$$\begin{aligned} S_n f &= \frac{\alpha_0}{2} \mathbb{1} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k c_k + \beta_k s_k), \\ f &= \frac{\alpha_0}{2} \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k c_k + \beta_k s_k), \quad (\text{Konvergenz in } L^2_{\mathbb{R}}) \\ \|f\|_2^2 &= \pi \frac{\alpha_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2). \end{aligned}$$

Wenn f gerade ist, dann hat f die Kosinusreihe

$$f = \frac{\alpha_0}{2} \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k c_k \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad \text{und} \quad \beta_k = 0.$$

Wenn f ungerade ist, dann hat f die Sinusreihe

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k s_k \quad \text{mit} \quad \beta_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad \text{und} \quad \alpha_k = 0.$$

BEWEIS. Vorbereitend² schreiben wir

$$S_n f = (f|b_0)b_0 + \sum_{k=1}^n (f|b_k)b_k + \sum_{k=1}^n (f|b_{-k})b_{-k}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Die obigen Definitionen liefern die Formeln $b_{-k} = \overline{b_k}$ und

$$(f|b_0)b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \cdot \mathbb{1} = \frac{\alpha_0}{2} \mathbb{1},$$

$$(f|b_{-k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt} = \overline{(f|b_k)}.$$

Mit (5.16) folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= \frac{\alpha_0}{2} \mathbb{1} + \sum_{k=1}^n 2\operatorname{Re}[(f|b_k)b_k] = \frac{\alpha_0}{2} \mathbb{1} + 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \alpha_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_k + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \beta_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s_k \right) \\ &= \frac{\alpha_0}{2} \mathbb{1} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k c_k + \beta_k s_k), \end{aligned}$$

$$\|S_n f\|_2^2 = \sum_{|k| \leq n} |(f|b_k)|^2 = |(f|b_0)|^2 + 2 \sum_{k=1}^n |(f|b_k)|^2 = \frac{\pi}{2} \alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Theorem 5.15 impliziert dann im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ die ersten Aussagen.

Sei nun f gerade. Mit der Substitution $s = 2\pi - t$ berechnen wir

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f c_k dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(s) \cos(ks) ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f c_k dt.$$

Die verbleibenden Behauptungen ergeben sich entsprechend. \square

Wir ergänzen Theorem 5.15 noch ein wenig.³ Nach Pythagoras ist die 2-Norm eines Reihenrests $\sum_{k=m}^n (f|b_k)b_k$ gleich $\left(\sum_{k=m}^n |(f|b_k)|^2\right)^{1/2}$ und geht damit etwa für $n, m \rightarrow \infty$ gegen 0. Somit ist die Fourierreihe für $f \in L^2$ gleich

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f|b_k)b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (f|b_k)b_k + \sum_{k=0}^{\infty} (f|b_{-k})b_{-k}.$$

Man kann auch die Summanden permutieren, siehe Lemma V.4.4 in [11].

²Wir korrigieren hier den Beweis in der Vorlesung ein wenig.

³Diese Ausführungen waren nicht Teil der Vorlesung.

Wir illustrieren das Korollar mit zwei Beispielen, vergleiche Abbildung 5.1.

BEISPIEL 5.17. a) Die ungerade Funktion

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \pi, \\ -1, & \pi < t \leq 2\pi, \end{cases}$$

besitzt die Sinusreihe

$$f = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} s_{2n+1} \quad (\text{in } L^2_{\mathbb{R}}).$$

Dabei gelten $S_n f(0) = S_n f(\pi) = S_n f(2\pi) = 0$, sowie $f(0) = 1$, $f(\pi) = 1$ und $f(2\pi) = -1$, sodass die Reihe *nicht* punktweise gegen f konvergiert.

BEWEIS. Die Behauptung folgt aus Korollar 5.16 und der Rechnung

$$\beta_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt) dt = \frac{-2}{\pi k} \cos(kt) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{4}{\pi k}, & k \text{ ungerade,} \\ 0, & k \text{ gerade.} \end{cases} \quad \square$$

b) Die gerade Funktion

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 2\pi - t, & \pi < t \leq 2\pi, \end{cases}$$

besitzt die Kosinusreihe

$$f = \frac{\pi}{2} \mathbb{1} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} c_{2n+1} \quad (\text{in } L^2_{\mathbb{R}}).$$

BEWEIS. Wie in Teil a) berechnen wir für $k \in \mathbb{N}$ mittels partieller Integration

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{1}{\pi} t^2 \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(kt)}{k^2} + \frac{t \sin(kt)}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} ((-1)^k - 1). \quad \square$$

Wir wollen nun die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihen untersuchen und beginnen mit einer einfachen Vorbereitung.

LEMMA 5.18. Sei $f \in L^2$ mit $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} |(f|b_k)| < \infty$ und $\sum_{k \in \mathbb{N}} |(f|b_{-k})| < \infty$. Dann konvergiert die Fourierreihe auf $[0, 2\pi]$ gleichmäßig und absolut gegen einen stetigen Repräsentanten von f . Dies gilt auch für $f \in L^2_{\mathbb{R}}$, wenn die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ und $\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|$ endlich sind.

BEWEIS. Es gilt $\|(f|b_k)b_k\|_{\infty} = |(f|b_k)|/\sqrt{2\pi}$. Wegen der Summierbarkeitsvoraussetzung können wir nun Satz 4.43 aus Analysis 1 auf Real- und Imaginärteil der Fourierteilreihen mit positiven und negativen Indizes anwenden. Demgemäß konvergiert die Folge $(S_n f)$ auf $[0, 2\pi]$ gleichmäßig und absolut gegen eine stetige Funktion $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$. Da $(S_n f)$ auch in L^2 gegen f strebt, liefert Korollar 5.2 die Gleichheit f.ü. von f und g . Die zweite Aussage zeigt man analog. \square

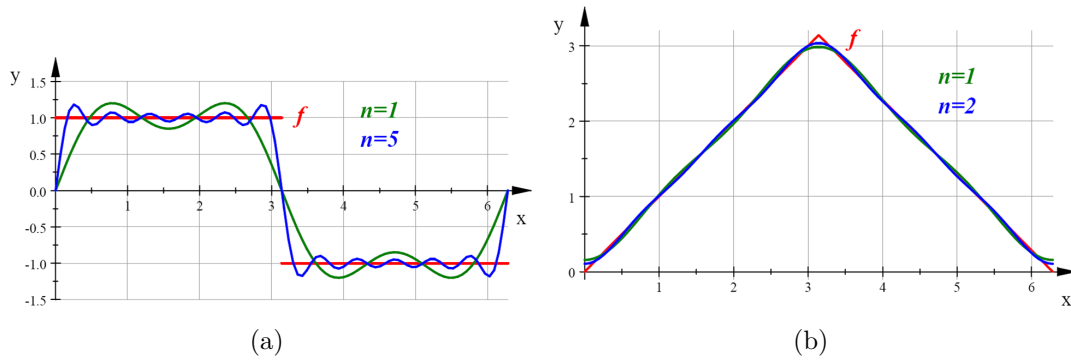


ABBILDUNG 5.1. Die Funktionen in Beispiel 5.17 und einige Fourierpartialsummen.

BEISPIEL 5.19. In Beispiel 5.17 b) liegt nach Korollar 5.18 gleichmäßige und absolute Konvergenz vor. In Beispiel 5.17 a) konvergiert die Reihe für $t = \frac{\pi}{2}$ nicht absolut. (Man auch zeigen, dass sie in keiner Umgebung von π gleichmäßig konvergiert.) Hier ist die Folge der Koeffizienten nicht summierbar. \diamond

Wir geben nun eine hinreichende Bedingung an f für die Summierbarkeit der Fourierkoeffizienten an. Das gezeigte Abfallverhalten von $(f|b_k)$ folgt aus der stetigen Differenzierbarkeit von f , was ein wichtiges Grundprinzip in diesem Bereich der Mathematik ist. Der Beweis beruht auf partieller Integration und der Hölderschen Ungleichung. (Der nächste Satz gilt entsprechend auch für \mathbb{C} -wertige f .)

SATZ 5.20. Sei $f \in C^1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ mit $f(0) = f(2\pi)$. Dann gilt $(f'|b_k) = ik(f|b_k)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ und die Fourierreihe konvergiert gegen f gleichmäßig und absolut auf $[0, 2\pi]$.

BEWEIS. Mittels partieller Integration berechnen wir wie behauptet

$$\begin{aligned} (f'|e_k) &= \int_0^{2\pi} f'(t) \cos(kt) dt - i \int_0^{2\pi} f'(t) \sin(kt) dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) k \sin(kt) dt + f(t) \cos(kt) \Big|_0^{2\pi} + i \int_0^{2\pi} f(t) k \cos(kt) dt + f(t) \sin(kt) \Big|_0^{2\pi} \\ &= ik \int_0^{2\pi} f(t) (i \sin(-kt) + \cos(-kt)) dt = ik (f|e_k) \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{Z}$, wobei auch die Voraussetzung $f(0) = f(2\pi)$ einging. Die Höldersche Ungleichung aus Satz 5.1 für das Zählmaß ζ (siehe Beispiel 2.28) impliziert nun

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |(f|b_k)| = |(f|b_0)| + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|} |(f'|b_k)| \leq |(f|b_0)| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |(f'|b_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

was nach Theorem 5.15 endlich ist. Lemma 5.18 zeigt nun die zweite Aussage. \square

Die obige Aussage kann mit anderen Methoden weitaus verfeinert werden. Sei zum Beispiel f stückweise stetig und f besitze bei t eine links- und eine rechtsseitige

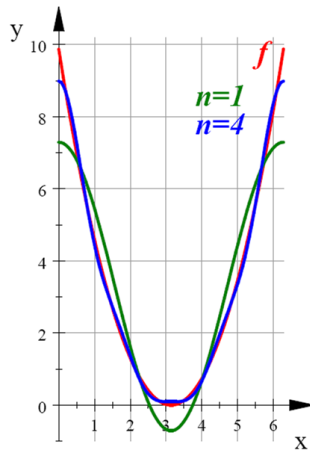


ABBILDUNG 5.2. Die Funktion in Beispiel 5.21 und einige Fourierpartialsummen.

Ableitung. Dann konvergiert die Fourierreihe bei t gegen den Mittelwert der links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f bei t (und somit gegen $f(t)$, wenn f bei t stetig ist). Dabei setzt man f periodisch auf \mathbb{R} fort. Es gibt stetige Funktionen mit $f(0) = f(2\pi)$, deren Fourierreihe nicht punktweise konvergiert. Siehe Abschnitte 16.3 und 16.4 in [5]. In der Master-Vorlesung Harmonische Analysis werden u.a. solche Fragen behandelt. Wir geben noch ein Beispiel für Satz 5.20 an.

BEISPIEL 5.21. Die gerade Funktion

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(t) = (t - \pi)^2,$$

hat die gleichmäßig und absolut konvergente Fourierreihe

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos(kt), \quad t \in [0, 2\pi],$$

siehe Abbildung 5.2. Für $t = 0$ folgt Eulers verblüffende Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

BEWEIS Zunächst gehört f zu $C^1([0, 2\pi])$ und erfüllt $f(0) = f(2\pi)$. Also konvergiert die Fourierreihe wie behauptet. Um sie gemäß Korollar 5.16 zu bestimmen, berechnen mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi)^2 dt = \frac{2}{3\pi} (t - \pi)^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}, \\ \alpha_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi)^2 \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2(t - \pi) \cos(kt)}{k^2} + \frac{(t - \pi)^2 \sin(kt)}{k} - \frac{2 \sin(kt)}{k^3} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{4}{k^2}. \end{aligned} \quad \diamond$$

Literaturverzeichnis

- [1] H. Amann und J. Escher, *Analysis I*. Dritte Auflage. Birkhäuser, 2006.
- [2] H. Amann und J. Escher, *Analysis III*. Birkhäuser, 2001.
- [3] J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*. Fünfte, korrigierte Auflage. Springer-Verlag, 2007.
- [4] G. Fischer, *Lineare Algebra*. 16te, überarbeitete, korrigierte Auflage. Vieweg+Teubner, 2008.
- [5] K. Königsberger, *Analysis 1*. Sechste, durchgesehene Auflage. Springer-Verlag, 2004.
- [6] K. Königsberger, *Analysis 2*. Fünfte, korrigierte Auflage. Springer-Verlag, 2004.
- [7] W. Rudin, *Reelle und Komplexe Analysis*. Oldenbourg, 1999.
- [8] R. Schnaubelt, *Spectral Theory*. Lecture Notes, Karlsruhe, 2017.
- [9] T. Tao, *An Introduction to Measure Theory*. American Math. Society, Providence, 2011.
- [10] M.E. Taylor, *Measure Theory and Integration*. American Math. Society, Providence, 2006.
- [11] D. Werner, *Einführung in die höhere Analysis*. Springer-Verlag, 2006.