

Dynamische Systeme, WS 16/17

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1

(6 Punkte)

In dieser Aufgabe sei $X = \mathbb{R}^m$, $\Lambda = \mathbb{R}^p$.

- a) Angenommen für jedes $\lambda \in \Lambda$ ist $(X, \mathbb{T}, (\varphi^t(\cdot, \lambda))_{t \in \mathbb{T}})$ ein DS. Sei $Z := X \times \Lambda$. Zeigen Sie, dass $(Z, \mathbb{T}, (\phi^t)_{t \in \mathbb{T}})$ mit

$$\phi^t: \begin{array}{l} Z \rightarrow Z \\ (u, \lambda) \mapsto \phi^t(u, \lambda) = (\varphi^t(u, \lambda), \lambda) \end{array}$$

ein DS ist.

- b) Wie sieht der Erzeuger des dynamischen Systems $(Z, \mathbb{T}, (\phi^t)_{t \in \mathbb{T}})$ im Fall $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ aus?
c) Im Fall $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$ gelte für alle $u \in X$, $\lambda \in \Lambda$

$$\exists \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{T} \setminus \{0\}}} \frac{1}{h} (\varphi^h(u, \lambda) - u) = f(u, \lambda).$$

Was ist der infinitesimale Erzeuger von $(Z, \mathbb{T}, (\phi^t)_{t \in \mathbb{T}})$?

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Gegeben sei ein nicht-autonomes DS $(X, \mathbb{T}, (\varphi^{t,s})_{s, t-s \in \mathbb{T}})$ mit $X = \mathbb{R}^m$.

- a) Sei $Z := X \times \mathbb{T}$. Zeigen Sie, dass $(Z, \mathbb{T}, (\phi^t)_{t \in \mathbb{T}})$ mit

$$\phi^t: \begin{array}{l} Z \rightarrow Z \\ (u, s) \mapsto (\varphi^{t+s, s}(u), t + s) \end{array}$$

ein DS ist.

- b) Wie sieht der Erzeuger des dynamischen Systems $(Z, \mathbb{T}, (\phi^t)_{t \in \mathbb{T}})$ im Fall $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ aus?
c) Im Fall $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$ gelte für alle $u_0 \in X$, $t \in \mathbb{T}$

$$\exists \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{T} \setminus \{0\}}} \frac{1}{h} (\varphi^{t+h, t}(u_0) - u_0) = f(t, u_0).$$

Was ist der infinitesimale Erzeuger von $(Z, \mathbb{T}, (\phi^t)_{t \in \mathbb{T}})$?

Aufgabe 3

(6 Punkte)

- a) Gegeben sei das diskrete dynamische System $([0, 1], \mathbb{N}, (\varphi^t)_{t \in \mathbb{N}})$ mit Erzeuger φ^1 , d. h. $\varphi^n = (\varphi^1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, wobei

$$\varphi^1(u) = \begin{cases} 3u, & 0 \leq u \leq \frac{1}{3}, \\ 2 - 3u, & \frac{1}{3} \leq u \leq \frac{2}{3}, \\ 3u - 2, & \frac{2}{3} \leq u \leq 1. \end{cases}$$

Dieses DS besitzt periodische Punkte, welche Perioden können Sie finden? Was vermuten Sie, welche Perioden möglich sind?

- b) Konstruieren Sie ein separat stetiges dynamisches System $(X, \mathbb{T}, (\phi^t)_{t \in \mathbb{T}})$ mit einem metrischen Raum X , so dass
- es existiert mindestens ein Fixpunkt und
 - es existiert mindestens ein periodischer Orbit und
 - es existiert mindestens ein injektiver Orbit.

Abgabe: Bis Mittwoch, 26. Oktober 13 Uhr (Postfach im Foyer des Kollegengebäudes Mathematik).