Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis

JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Dynamische Systeme, WS 16/17

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Betrachten Sie (vgl. Aufgabe 2 des 2. Übungsblattes) den Vektorraum

$$X = \{(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid u_n \in \{0,1,\dots,k\}, \forall n \in \mathbb{Z}\}, \quad k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Versehen mit

$$d(u,v) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{|u_i - v_i|}{2^{|i|}}$$

ist X ein vollständiger metrischer Raum. Betrachten Sie das diskrete DS $(X, \mathbb{Z}, (\varphi^n)_{n\in\mathbb{Z}})$ mit Erzeuger $\varphi^1(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Dies ist ein separat stetiges, invertierbares DS.

(i) Bestimmen Sie alle Fixpunkte und periodischen Orbits.

(ii) Kontrollieren Sie, ob die Objekte aus (i) anziehend bzw. stabil sind.

b) Betrachten Sie die Norm

$$\|(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_\diamond = \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^i |u_i|$$

und den Banachraum

$$X = \{(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid u_n \in \{0,1,\dots,k\}, \forall n \in \mathbb{Z} : \|(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_\diamond < \infty\}, \quad k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Betrachten Sie das separat stetige, invertierbare, diskrete DS $(X, \mathbb{Z}, (\varphi^n)_{n\in\mathbb{Z}})$ mit Erzeuger $\varphi^1(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

(i) Bestimmen Sie alle Fixpunkte und periodischen Orbits.

(ii) Kontrollieren Sie, ob die Objekte aus (i) anziehend bzw. stabil sind.

Bitte wenden.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei $W \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in W$ ein Fixpunkt von $\dot{x} = f(x)$, wobei $f : W \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion ist. Sei $V : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion definiert auf einer Umgebung $U \subset W$ von $\bar{x}$, welche differenzierbar auf $U \setminus \{\bar{x}\}$ ist. Falls die Eigenschaften

a) $V(\bar{x}) = 0$ und $V(x) > 0$ für $x \neq \bar{x}$,

b) $DV(x)\, f(x) \leq 0$ in $U \setminus \{\bar{x}\}$

erfüllt sind ist $\bar{x}$ stabil. Falls zusätzlich

c) $DV(x)\, f(x) < 0$ in $U \setminus \{\bar{x}\}$

gilt, dann ist $\bar{x}$ asymptotisch stabil.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ und $\alpha > 0$ mit

$$\langle x, Ax \rangle_H \leq -\alpha (x, x)_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

wobei

$$\langle x, y \rangle_H := x^T H y, \quad x, y \in \mathbb{R}^m,$$
$$(x, y)_2 := x^T y, \qquad x, y \in \mathbb{R}^m$$

für ein symmetrisches und positiv definites $H \in \mathbb{R}^{m,m}$. Dann gilt $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Eigenwerte λ von A.

Bemerkung: Von obiger Aussage gilt auch die Umkehrung.

Abgabe: Bis Mittwoch, 9. November 13 Uhr (Postfach im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik).