JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Dynamische Systeme, WS 16/17

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 4.9 und Lemma 4.10 aus der Vorlesung zur Komplexifizierung:
Sei $(Y, \|\cdot\|)$ ein reeller Banachraum.

a) Dann ist $Z := Y \oplus iY$ mit $\|\cdot\|_Z$ gegeben durch $\|u\|_Z := \sup_{\phi\in[0,2\pi]} \|Re(e^{i\phi}u)\|$ ein komplexer Banachraum.

b) Für $A \in L(Y)$ erfüllt die Komplexifizierung $\tilde{A} \in L(Z)$ gegeben durch
$$\tilde{A}(x + iy) := Ax + iAy$$
die Eigenschaft $\|\tilde{A}\|_{L(Z)} = \|A\|_{L(Y)}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei X ein Banachraum. Zeigen Sie:

a) Sind $P, Q \in L(X)$ Projektoren mit $\|P - Q\|_{L(X)} < 1$, so sind $\mathcal{R}(P)$ und $\mathcal{R}(Q)$, sowie $\mathcal{N}(P)$ und $\mathcal{N}(Q)$ isomorphe Unterräume von X.

b) Beweisen Sie Folgerung A.7: Ist $P \in \mathcal{C}((a,b), L(X))$ eine projektorwertige Funktion mit $\dim \mathcal{R}(P(t_0)) < \infty$ für ein $t_0 \in (a,b)$, so folgt
$$\dim \mathcal{R}(P(t)) = \dim \mathcal{R}(P(t_0)) \quad \forall t \in (a,b).$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Seien $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ und Γ eine Kontur, $\Gamma = \overline{\Gamma}$ (einfach geschlossene rektifizierbare Kurve, die symmetrisch bzgl. der reellen Achse ist) mit $\Gamma \cap \sigma(A) = \emptyset$.

   Beweisen Sie, dass der Spektralprojektor
$$P := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I - A)^{-1}\, d\lambda \quad \text{eine reelle } m \times m\text{-Matrix ist.}$$

b) Berechnen Sie zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 22 & -4 & -36 \\ 26 & -5 & -42 \\ 10 & -2 & -16 \end{pmatrix}$ den Spektralprojektor zu dem Teil des Spektrums $\sigma^1 = \sigma \cap \overline{B_{3/2}(0)}$, d.h.
$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\{|\lambda|=\frac{3}{2}\}} (\lambda I - A)^{-1}\, d\lambda.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, 16. November 13 Uhr (Postfach im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik).