Institut für Analysis

JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Dynamische Systeme, WS 16/17

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum, $f\colon X \to Y$ stetig und $K \subset X$ kompakt. Zeigen Sie, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_K(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass für alle $u \in K$ und $v \in X$ mit $\|u - v\| \leq \delta_K(\varepsilon)$ gilt $\|f(u) - f(v)\| \leq \varepsilon$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $(X, \mathbb{T}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{T}})$ ein DS. Für $A \subset X$ definiere $\Lambda(A) := \cup_{x\in A}\ \omega(x)$. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $\Lambda(B) \neq \Lambda(\Lambda(B))$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel das von der DGL

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1-r),\\ \dot{\phi} &= (1-r) + (\phi \bmod 1)\Big(1 - (\phi \bmod 1)\Big),\end{aligned}$$

für $r \in [0, \infty)$ und $\phi \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ auf $X = [0, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ erzeugte DS.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden diskreten Varianten der differentiellen und der integralen Form des Gronwall-Lemmas.

a) Aus $u_n \in \mathbb{R}$ mit $u_{n+1} \leq a u_n + b$, $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{cases} u_n \leq a_0 + nb, \forall n \in \mathbb{N} & \text{falls } a = 1,\\ u_n \leq \frac{b}{1-a}(1-a^m) + u_0 a^n, \forall n \in N, & \text{falls } a \neq 1.\end{cases}$$

b) Aus $u_n \in \mathbb{R}$ mit $u_{n+1} \leq a \sum_{k=0}^{n} u_k + b$, $\forall n \in \mathbb{N}$ folgt $u_n \leq b e^{na}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Abgabe: Bis Mittwoch, 30. November 13 Uhr (Postfach im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik).