Dynamische Systeme, WS 16/17

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Zeigen Sie die Aussagen von Bemerkung 3.8:

a) Das kontinuierliche DS, erzeugt von

$$\dot{u}_1 = -g(r)(1-r)^2 u_1 - u_2,$$
$$\dot{u}_2 = -g(r)(1-r)^2 u_2 + u_1,$$

$r^2 = u_1^2 + u_2^2$, $r \geq 0$ und

$$g(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < 1, \\ 1, & 1 \leq r \end{cases}$$

hat den globalen Attraktor $\mathcal{A} := \{u : \|u\|_2^2 \leq 1\}$.

b) Diskretisierung mit dem impliziten Euler-Verfahren ist gegeben durch

$$\psi_{\Delta t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

wobei $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ die Lösungen des nichtlinearen Systems

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} -g(r)(1-r)^2 u_1 - u_2 \\ u_1 - g(r)(1-r)^2 u_2 \end{pmatrix}$$

sind. Für $0 < \Delta t$ klein genug ist für alle $(u_1, u_2) \in B_2(0) = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1^2 + u_2^2 < 4\}$, die Gleichung eindeutig lösbar und $B_2(0)$ ist positiv invariant. Folglich gibt es einen (lokalen) Attraktor des diskreten dynamischen Systems in $\overline{B_2(0)}$.

Zeigen Sie, dass der Attraktor des diskreten DS $A_{\Delta t} = \{0\}$ ist.
Hinweis: Benutzen Sie, dass $u_1^2 + u_2^2 \leq C(\Delta t)(v_1^2 + v_2^2)$ mit einem $0 < C(\Delta t) < 1$ gilt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Betrachten Sie den Duffing Oszillator mit Dämpfung

$$\ddot{u} = -u^3 + u - \delta \dot{u}, \quad \delta > 0.$$

Benutzen Sie Satz I.3.7 (Invarianz von Niveaumengen) um eine begründete Skizze des Phasenbildes zeichnen zu können.

Hinweis: Betrachten Sie die Niveaumengen $M_c = \{(u,v)^T \mid E \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq c\}$.

Abgabe: Bis Mittwoch, 7. Dezember 13 Uhr (Postfach im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik).