Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Dynamische Systeme, WS 16/17

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich die Glattheit des Homöomorphismuses in der topologischen Konjugation bzw. Flussäquivalenz sich durch glattere rechte Seiten im Allgemeinen nicht erhöhen lässt.

Hinweis: Betrachten Sie dazu für $\alpha > \gamma > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ das DS erzeugt von der ODE

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha x \\ -\gamma y \\ (\alpha - \gamma)z + \varepsilon xy \end{pmatrix},$$

welches nach dem Satz von Hartman-Grobman zu der Linearisung an 0 flussäquivalent ist. Verwenden Sie den Homöomorphismus

$$S^{\pm 1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \pm \frac{\varepsilon}{\alpha} xy \log(|x|) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Betrachten Sie die ebene DGL

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u + av + u^2 v, \\ \dot{v} &= b - av - u^2 v, \end{aligned}$$

mit Parametern $a, b > 0$. Zeigen Sie: Wenn die Parameter

$$b^2 - a > (b^2 + a)^2$$

erfüllen, so gibt es eine periodische Lösung.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Menge

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \geq 0, v \geq 0, v \leq \tfrac{b}{a}, u + v \leq b + \tfrac{b}{a}\}$$

positiv invariant ist. Außerdem werden Sie noch einmal über die Bilder aus Kapitel III §1.1 nachdenken müssen.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Als Ergänzung zu Satz III.2.5:

Für $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, sei $\underline{u} \in \Omega$ hyperbolischer Fixpunkt des diskreten DS $u_{n+1} = f(u_n)$ bzw. des kontinuierlichen DS $\dot{u} = f(u)$. Dann ist dieses DS bei $\underline{u}$ zu dem DS $v_{n+1} = Df(\underline{u})v_n$ bzw. zu dem von $\dot{v} = Df(\underline{u})v$ erzeugten DS jeweils bei 0 lokal topologisch konjugiert bzw. flussäquivalent.

Zeigen Sie, dass die Hyperbolizität jeweils unverzichtbar ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ eine hyperbolische Matrix.

a) Zeigen Sie

$$X_1 := \{u \in \mathbb{R}^m \mid \sup_{t \geq 0} \|e^{At}u\| < \infty\}$$
$$X_2 := \{u \in \mathbb{R}^m \mid \sup_{t \leq 0} \|e^{At}u\| < \infty\}$$

liefert eine Zerlegung $\mathbb{R}^m = X_1 \oplus X_2$ in A–invariante Unterräume.

b) Sei $\Pi \in \mathbb{R}^{m,m}$ der Projektor in $\mathbb{R}^m$ mit $\Pi(\mathbb{R}^m) = X_1$, $\ker(\Pi) = X_2$. Zeigen Sie, dass für $r \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ und $b \in X_1$ die Funktion

$$u(t) = e^{At}b + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\Pi r(\tau)d\tau + \int_t^\infty e^{A(t-\tau)}(\Pi - I)r(\tau)d\tau$$

beschränkt ist und der Gleichung genügt

$$\dot{u} = Au + r, \quad t \geq 0$$
$$\Pi u(0) = b.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, 11. Januar 13 Uhr (Postfach im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik).