JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Dynamische Systeme, WS 16/17

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $W_c(0)$ eine $\mathcal{C}^1$ Zentrumsmannigfaltigkeit für $\dot{u} = f(u)$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f(0) = 0$, $0 \in \Omega$, so gibt es $\varepsilon > 0$, so dass

$$Dh(x) f_c\big(x, h(x)\big) = f_s\big(x, h(x)\big), \quad \forall x \in \big\{x \in \mathbb{R}^{m_c} \mid \|x\| \le \varepsilon\big\}.$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es bezeichne $t \mapsto \varphi^t$ den Fluss zur DGL

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^2. \end{aligned}$$

Betrachten Sie den 1-Fluss, d. h. $F(u) := \varphi^1(u)$, wobei F definiert ist für alle Anfangswerte $u_0 \in \mathbb{R}^2$ für die das maximale Definitionsintervall $J(u_0)$ der Lösung mindestens das Intervall $[0,1]$ enthält, d. h. $\mathcal{D}(F) := \big\{u_0 \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\ \varphi^t(u_0) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ 0 \le t \le 1\big\}$.
Zeigen Sie:

a) Die Abbildung F hat einen hyperbolischen Fixpunkt in $(0,0)$.

b) Ist $u_0 \in F(\mathcal{D}(F))$, so ist F bei u_0 ein lokaler Diffeomorphismus.

c) Die stabile Mannigfaltigkeit

$$W_{s,F}(0) = \big\{u_0 \in \mathbb{R}^2 \mid F^n(u_0) \in \mathcal{D}(F),\ \forall n \in \mathbb{N},\ F^n(u_0) \to 0 \text{ für } n \to \infty\big\}$$

und die instabile Mannigfaltigkeit

$$W_{u,F}(0) = \big\{u_0 \in \mathbb{R}^2 \mid F^{-n}(u_0) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ F^n(u_0) \to 0 \text{ für } n \to -\infty\big\}$$

haben einen nichttrivialen Schnitt, d. h.

$$W_{s,F}(0) \cap W_{u,F}(0) \supsetneq \big\{0\big\}.$$

d) Die Menge $W_{s,F}(0) \cap W_{u,F}(0)$ hat unendlich viele Elemente.

e) In der Tat handelt es sich bei $W_{s,F}(0) \cap W_{u,F}(0)$ um eine geschlossene Kurve.

Abgabe: Bis Mittwoch, 25. Januar 13 Uhr (Postfach im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik).