Institut für Analysis

JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Rand- und Eigenwertprobleme, Sommersemester 17

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1

Seien $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^{m,m})$, $a_n(x)$ invertierbar für alle $x \in [a,b]$ sowie $r \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^m)$. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge des linearen inhomogenen DGL Systems

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) u^{(i)}(x) = r(x), \qquad x \in [a,b]$$

gegeben ist durch $\{u_s + v \mid v \in V\}$. Dabei ist u_s eine (feste) Lösung des inhomogenen Problems und

$$V = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \Big\}$$

mit linear unabhängigen Lösungen $v_1, \dots, v_{nm}$ von der homogenen Gleichung.

Hinweis: Transformieren Sie das System in ein System erster Ordnung.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Lösungen des Eigenwertproblems

$$-u'' = \lambda u$$

mit Randbedingungen

a) $u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1),$

b) $u(0) = u'(0), \quad u(1) = u'(1).$

Aufgabe 3

Die Bewegung eines mathematischen Pendels wird durch

$$\varphi''(t) + \omega^2 \sin \varphi(t) = 0 \tag{*}$$

beschrieben ($\omega > 0$).

a) Es sei $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (*) mit $\varphi(0) = 0$. Beweisen Sie die Identität

$$[\varphi'(t)]^2 - 2\omega^2 \cos \varphi(t) = [\varphi'(0)]^2 - 2\omega^2, \qquad t \in [0, \infty).$$

b) Sei φ wie in a) beschrieben und zusätzlich gelte $\varphi'(0) > 2\omega$.

Zeigen Sie, dass die Bewegung des Pendels „periodisch“ im folgenden Sinne ist:
Es gilt $\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi$ wobei T gegeben ist durch

$$T = \frac{1}{\varphi'(0)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{[\varphi'(0)]^2} \sin^2(\frac{y}{2})}} dy.$$

c) Beschreiben Sie die Bewegung des Pendels bei Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(0) = 2\omega$ (bzw. $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(0) < 2\omega$).

Besprechung in der Übung am 05.05.17