Aufgabe 1

Definiere $A : [a,b] \to \mathbb{R}^{n \cdot m \times n \cdot m}$, $b : [a,b] \to \mathbb{R}^{n \cdot m}$ durch

$$A(x) := \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & I & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ \hline -a_n^{-1} a_0 & -a_n^{-1} a_1 & \cdots & & -a_n^{-1} a_{n-1} \end{array}\right)$$

$$b(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_n^{-1} r(x) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0, I \in \mathbb{R}^{m,m}.$$

A, b sind stetig auf $[a,b]$. Sei $w : [a,b] \to \mathbb{R}^{n \cdot m}$ stetig.

Lemma 1

Falls $w(x) = (w_1(x), \ldots, w_n(x))$ eine Lösung von $w' = Aw + b$ ist, dann ist w_1 eine Lösung von $\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, u^{(i)}(x) = r(x)$ und w hat die Form $w(x) = (w_1(x), w_1'(x), \ldots, w^{(n-1)}(x))$.

Umgekehrt, falls u eine Lösung von $\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, u^{(i)}(x) = r(x)$, dann ist $w(x) := (u(x), \ldots, u^{(n-1)}(x))$ eine Lösung von $w' = Aw + b$. Dies gilt insbesondere für die homogenen Probleme.

<u>Beweis</u> einfaches nachrechnen

Lemma 2

Es existieren linear unabhängige $v_1, \dots, v_n$, so dass

$$\sum a_i v^{(i)} = 0 \iff v \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} =: V$$

Beweis

Sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ein Fundamentalsystem von $w' = Aw$. Nach Lemma 1 löst φ_{i1} (erste komponente von φ_i, also $\varphi_{i1} \in \mathbb{R}^m$) die Gl. $\sum a_i u^{(i)} = 0$. Definiere $v_i := \varphi_{i1} \in \mathbb{R}^m$ $(i = 1, \dots, n)$.

Aus Lemma 1 folgt $\varphi_i = (v_i, v_i', \dots, v_i^{(n-1)})$.

Weil die φ_i linear unabh. sind gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j = 0 \iff \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \\ c_1 v_1' + \dots + c_n v_n' = 0 \\ \quad \vdots \\ c_1 v_1^{(n-1)} + \dots + c_n v_n^{(n-1)} = 0 \end{array} \right\}}_{} \iff c_j = 0 \ \forall j$$

$$\overset{(*)}{\iff} c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0.$$

Also sind $v_1, \dots, v_n$ lin. unabh.

[$(*)$ "$\Rightarrow$" klar

"$\Leftarrow$" diff. der Gl.]

Es folgt „<=".

Zu „=>"

Falls v die Gl $\sum a_i u^{(i)} = 0$ löst, gilt:
$w = (v, v', \dots, v^{(n-1)})$ löst $w' = Aw$ (Lemma 1),
sowie $w = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ (Def. von e_i).
Es folgt $v = w_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_{j1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$,

d.h. $v \in V$. $\square$

Sei u_s eine spezielle Lösung von $\sum a_i u^{(i)} = r$.
Dann ist die Lösungsmenge von $\sum a_i u^{(i)} = r$ gegeben durch $u_s + V$.

„$\supset$": $u_s + \sum \lambda_i v_i$ ist offensichtlich eine Lösung.
„$\subset$" Sei u eine Lösung von $\sum a_i u^{(i)} = r$, dann ist $u - u_s$ eine Lösung von $\sum a_i u^{(i)} = 0$,
d.h. es ex. $\lambda_i \in \mathbb{R}$, sd $u - u_s = \sum \lambda_i v_i$.

Aufgabe 2

Beachte: Wir sind nur an nicht-trivialen ($u \neq 0$) Lösungen interessiert.

$$A = -\partial_{xx} \rightsquigarrow Au(x) = \lambda u(x)$$

a) $\quad$ I: $u(0) = u(1)$, $\quad$ II: $u'(0) = u'(1)$

1. Fall $\lambda = 0$: $\quad -u'' = 0$

$\Rightarrow \quad u(x) = mx + b \qquad (m, b \in \mathbb{R})$

I: $\quad b = m + b \quad \Rightarrow \quad m = 0$

II: $\quad m = m \quad \checkmark$

$\Rightarrow$ alle Lsgn der Form $u(x) = b \quad \forall b \in \mathbb{R}$

2. Fall $\lambda > 0$: $\quad -u'' = \lambda u \quad , \mu := \sqrt{\lambda}$

$\Rightarrow \quad u(x) = a\cos(\mu x) + b\sin(\mu x) \qquad (a, b \in \mathbb{R})$

$u'(x) = -a\mu\sin(\mu x) + b\mu\cos(\mu x)$

I: $\quad a = a\cos(\mu) + b\sin(\mu)$

$\Leftrightarrow \quad 0 = a(\cos\mu - 1) + b\sin\mu$

II: $\quad b\mu = -a\mu\sin\mu + b\mu\cos\mu$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = -a\mu \sin\mu + b\mu(\cos\mu - 1),$$

also
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\mu - 1 & \sin\mu \\ -\mu\sin\mu & \mu(\cos\mu - 1) \end{pmatrix}}_{=:\,A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \mu(\cos\mu - 1)^2 + \mu\sin^2\mu$$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$
$\Leftrightarrow \quad \sin^2 = 1 - \cos^2$

$$= \mu(\cos\mu - 1)^2 + \mu(1 - \cos^2\mu)$$

$$= \mu\left[\cancel{\cos^2\mu} - 2\cos\mu + 1 + 1 - \cancel{\cos^2\mu}\right]$$

$$= 2\mu(1 - \cos\mu) \overset{?}{=} 0$$

$$\overset{(\mu\neq 0)}{\Leftrightarrow} \quad \cos\mu = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mu \in \{n\cdot 2\pi \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Falls $\cos\mu \neq 1$, ist $a = 0$, $b = 0$ eindeutige Lsg, also $u \equiv 0$.

Falls $\cos\mu = 1$, dann folgt aus I:

$$0 = b\sin\mu, \quad \sin\mu \neq 0 \Rightarrow b = 0,$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = a\cos(\mu x) \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

3. Fall $\lambda < 0$, $-u'' = \lambda u$, $\mu := \sqrt{-\lambda} > 0$

$$\Rightarrow \quad u(x) = a e^{\mu x} + b e^{-\mu x}$$

$$u'(x) = a\mu e^{\mu x} - b\mu e^{-\mu x}$$

I: $$a + b = a e^{\mu} + b e^{-\mu}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = a(e^{\mu} - 1) + b(e^{-\mu} - 1)$$

II: $$a\mu - b\mu = a\mu e^{\mu} - b\mu e^{-\mu}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = a\mu(e^{\mu} - 1) + b\mu(1 - e^{-\mu}),$$

also $$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{\mu} - 1 & e^{-\mu} - 1 \\ \mu(e^{\mu} - 1) & \mu(1 - e^{-\mu}) \end{pmatrix}}_{=: B} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \mu(e^{\mu} - 1)(1 - e^{-\mu}) - \mu(e^{\mu} - 1)(e^{-\mu} - 1)$$

$$= \mu(e^{\mu} - 1)[1 - e^{-\mu} - e^{-\mu} + 1]$$

$$= \mu(e^{\mu} - 1)(2 - 2e^{-\mu}) \neq 0 \quad \forall \mu > 0$$

$$\Rightarrow \quad u \equiv 0$$

b) $\quad \mathrm{I}: u(0) = u'(0) \quad , \quad \mathrm{II}: u(1) = u'(1).$

<u>1. Fall</u> $\lambda = 0 \qquad -u'' = 0$

$\to \quad u(x) = mx + b \qquad m, b \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{I}: & b = m \\ \mathrm{II} & m + b = m \end{array}\right\} \Rightarrow m = b = 0$$

$\Rightarrow \quad u \equiv 0$

<u>2. Fall</u> $\lambda > 0 \qquad \mu := \sqrt{\lambda}$

$\to \quad u(x) = a\cos(\mu x) + b\sin(\mu x)$

$\mathrm{I}: \quad a = b\mu \quad \Leftrightarrow \quad 0 = b\mu - a$

$\mathrm{II}: \quad a\cos\mu + b\sin\mu = -a\mu\sin\mu + b\mu\cos\mu$

$\Leftrightarrow \quad 0 = -a(\cos\mu + \mu\sin\mu) + b(\mu\cos\mu - \sin\mu)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & \mu \\ -\cos\mu - \mu\sin\mu & \mu\cos\mu - \sin\mu \end{pmatrix}}_{=: G} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det G = -\mu\cos\mu + \sin\mu + \mu\cos\mu + \mu^2\sin\mu$$
$$= \sin\mu(1 + \mu^2)$$

$\det C' = 0 \iff \mu = n\pi \implies$ nur triviale Lsg

Sei $\mu \neq n\pi$:

Falls $\mu = 1 \to$ I $a = b$, $u(x) = a\cos\mu x + a\sin\mu x$ $a \in \mathbb{R}$

Lösungen

Falls $\mu \neq 1$ keine Lösung

3. Fall $\lambda < 0$ $\mu := \sqrt{-\lambda}$

I: $a + b = a\mu - b\mu$

II: $a\mu e^{\mu} + b e^{-\mu} = a\mu e^{\mu} - b\mu e^{-\mu}$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \mu - 1 & -\mu - 1 \\ e^{\mu}(\mu - 1) & e^{-\mu}(-\mu - 1) \end{pmatrix}}_{=: D} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det D = -(\mu - 1) e^{-\mu} (\mu + 1) + e^{\mu}(\mu - 1)(\mu + 1)$$

$$= (\mu^2 - 1)(e^{-\mu} - e^{\mu}) \qquad (\mu > 0)$$

$\implies \det D = 0 \iff \mu = 1$

$\underline{\mu = 1}$ $\implies b = 0$, also $u(x) = a e^{\mu x}$ $(\forall a \in \mathbb{R})$

$\underline{\mu \neq 1}$ nur triviale Lsg.

Rand- und Eigenwertprobleme, Sommersemester 17

Lösungsidee Aufgabenblatt 1

Aufgabe 3

Die Bewegung eines mathematischen Pendels wird durch

$$\varphi''(t) + \omega^2 \sin \varphi(t) = 0 \tag{*}$$

beschrieben ($\omega > 0$).

a) Es sei $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (*) mit $\varphi(0) = 0$. Beweisen Sie die Identität

$$[\varphi'(t)]^2 - 2\omega^2 \cos \varphi(t) = [\varphi'(0)]^2 - 2\omega^2, \qquad t \in [0, \infty).$$

b) Sei φ wie in a) beschrieben und zusätzlich gelte $\varphi'(0) > 2\omega$.
Zeigen Sie, dass die Bewegung des Pendels „periodisch“ im folgenden Sinne ist:
Es gilt $\varphi(t + T) = \varphi(t) + 2\pi$ wobei T gegeben ist durch

$$T = \frac{1}{\varphi'(0)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{[\varphi'(0)]^2} \sin^2(\frac{y}{2})}} dy.$$

c) Beschreiben Sie die Bewegung des Pendels bei Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(0) = 2\omega$ (bzw. $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(0) < 2\omega$).

Lösungsidee/Notizen:

a) Sei φ eine Lösung von $\varphi'' + \omega^2 \sin \varphi = 0, \varphi(0) = 0$. Multipliziere die Gleichung mit φ':

$$\varphi'(t)\varphi''(t) + \omega^2 \sin(\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[\tfrac{1}{2}(\varphi'(t))^2 - \omega^2 \cos(\varphi(t))] = 0.$$

Also folgt $\frac{1}{2}(\varphi'(t))^2 - \omega^2 \cos(\varphi(t)) = \text{const.} = \frac{1}{2}(\varphi'(0))^2 - \omega^2 \cos(\varphi(0)) = \frac{1}{2}(\varphi'(0))^2 - \omega^2$.

b) Sei nun $\varphi'(0) > 2\omega, \varphi(0) = 0$. Mit a) folgt

$$(\varphi'(t))^2 = (\varphi'(0))^2 - 2\omega^2 + 2\omega^2 \cos(\varphi(t)) \geq (\varphi'(0))^2 - 2\omega^2 - 2\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\varphi'(0))^2 - 4\omega^2 > 0.$$

Also gilt $|\varphi'(t)| \geq \sqrt{(\varphi'(0))^2 - 4\omega^2}$ für alle $t \in [0, \infty)$. Wegen $\varphi'(0) > 0$ gilt ($\varphi \in \mathcal{C}^1[0, \infty)$): $\varphi'(t) \geq \sqrt{(\varphi'(0))^2 - 4\omega^2}$ und somit $\varphi(t) \geq \sqrt{(\varphi'(0))^2 - 4\omega^2}t$ (hier wurde auch $\varphi'(0) > 0$ verwendet).

Damit gilt $\varphi(t) \to \infty$ für $t \to \infty$ und φ ist streng monoton wachsend. Insbesondere folgt: Es ex. genau ein $T > 0$ mit $\varphi(T) = 2\pi$.

Mit der Identität aus a) gilt:

$$(\varphi'(T))^2 - 2\omega^2 \underbrace{\cos(\varphi(T))}_{=1} = (\varphi'(0))^2 - 2\omega^2,$$

also $(\varphi'(T))^2 = (\varphi'(0))^2$ und wegen $\varphi'(T) > 0$: $\varphi'(T) = \varphi'(0)$.

Betrachte die Funktion $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t+T) - 2\pi$ $(t \in [0,\infty))$. Dann löst $\tilde{\varphi}$ das Anfangswertproblem

$$\tilde{\varphi}'' + \omega^2 \sin\tilde{\varphi} = 0, \quad \tilde{\varphi}(0) = 0 \; (= \varphi(0)), \; \tilde{\varphi}'(0) = \varphi'(0).$$

Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit dieses Problems folgt (φ ist ebenso Lösung): $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t)$, $t \in [0,\infty)$. Dies beweist die Behauptung.

Bemerkung: In diesem Fall rotiert das Pendel.

Berechnung der Periodendauer:

Setze $\psi = \varphi^{-1}$ (beachte, dass φ streng monoton wachsend ist, also ex. φ^{-1}). Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned}\psi'(y) &= [\varphi'(\psi(y))]^{-1} \stackrel{\text{a)}}{=} \left[\sqrt{(\varphi'(0))^2 - 2\omega^2 + 2\omega^2\cos(\varphi(\psi(y)))}\right]^{-1} \\ &= \left((\varphi'(0))^2 - 4\omega^2\sin^2(\tfrac{y}{2})\right)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(hierbei haben wir $-1 + cos(y) = -2\sin^2(\frac{y}{2})$ benutzt). Es gilt nun

$$T = \psi(\varphi(T)) - \psi(\varphi(0)) = \int_0^{\varphi(T)} \psi'(y)dy = \int_0^{\varphi(T)} \frac{1}{\sqrt{(\varphi'(0))^2 - 4\omega^2\sin^2(\frac{y}{2})}}dy$$

$$\stackrel{\varphi(T)=2\pi}{=} \frac{1}{\varphi'(0)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{(\varphi'(0))^2}\sin^2(\frac{y}{2})}}dy$$

c) Im Fall $\varphi'(0) < 2\omega$: Pendel oszilliert um die Ruhelage. Im Fall $\varphi'(0) = 2\omega$ bewegt sich das Pendel (asymptotisch) zur Auslenkung $\varphi = \pi$ und hat dort (asymptotisch) die Geschwindigkeit 0.