Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Rand- und Eigenwertprobleme, Sommersemester 17

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1

Es sei

$$L[u](x) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \qquad x \in \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ Gebiet}$$

ein linearer partieller Differentialoperator.

Zeigen Sie: Ist L elliptisch in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$, so folgt: n ist gerade oder $d = 1$.

Aufgabe 2

a) Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $L[u] = (-\Delta)^k u = \underbrace{(-\Delta) \circ \cdots \circ (-\Delta)}_{k \text{ mal}} u$.

Zeigen Sie, dass L gleichmäßig streng elliptisch ist.

b) Untersuchen Sie das in der Vorlesung vorgestellte quasilineare Problem der laminaren stationären Gasströmung,

$$0 = \nabla \rho^\top \nabla + \rho \Delta u \tag{1}$$

mit $\rho = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$, auf Elliptizität.

Aufgabe 3

a) Es sei $T \in \mathcal{C}^2_{\text{diff}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ $\big(T \in \mathcal{C}^n(\tilde{\Omega}, \Omega)$ und $\exists\, T^{-1} \in \mathcal{C}(\Omega, \tilde{\Omega})\big)$ eine Koordinatentransformation. Rechnen Sie explizit nach, dass auch in den neuen Koordinaten die Transformation der Differentialoperatoren ∂_{x_1} und ∂_{x_2} kommutieren, also auch

$$\partial_{x_1} \partial_{x_2} = \partial_{x_2} \partial_{x_1}$$

in den neuen Koordinaten gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Elliptizität nicht von der Wahl der Koordinaten abhängt, indem Sie zeigen, dass für einen linearen elliptischen partiellen Differentialoperator

$$L[u](x) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \qquad x \in \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ Gebiet}$$

und eine Koordinatentransformation $T \in \mathcal{C}^n_{\text{diff}}(\tilde{\Omega}, \Omega)$ der mit T transformierte partielle Differentialoperator ebenfalls elliptisch ist.

Besprechung in der Übung am 12.05.17