12.5.17

Lösungsnotizen Blatt 2

Aufgabe 1

Sei L ell. im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$, d.h. $\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gilt:

$$\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha(x_0)\, \xi^\alpha \neq 0.$$

Für ein festes $\xi_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ def. den Weg

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ durch $\gamma(0) = \xi_0$, $\gamma(1) = -\xi_0$.

Fordere für $d \geq 2$: $\gamma(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1]$

Setze

$$\phi(t) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha(x_0)\, \gamma_1(t)^{\alpha_1} \cdots\cdots \gamma_d(t)^{\alpha_d}$$

$\neq 0$ wegen Ell. + $\gamma(t) \neq 0$

Es gilt $\phi \in C([0,1], \mathbb{R})$ (da γ als Weg stetig)

und $\phi(0) = (-1)^n \phi(1)$.

Falls n ungerade ist, folgt mit ZWS:

$\exists\, t_0 : \quad \phi(t_0) = 0.$

L ell. $\Rightarrow \gamma(t_0) = 0$ ↯ für $d \geq 2$. $\square$

Aufgabe 2

a) Wegen $\quad -\Delta u = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i}$ folgt

$$(-\Delta)\circ(-\Delta)\, u = \sum_{i_1=1}^{d} \sum_{i_2=1}^{d} \frac{\partial^4 u}{\partial x_{i_1}^2 \, \partial x_{i_2}^2}$$

und analog

$$L[u] = (-\Delta)^k u = (-1)^k \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{d} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x_{i_1}^2 \cdots \partial x_{i_k}^2} .$$

L ist glm. streng elliptisch, falls $c_0 > 0$ existiert, sd $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ gilt

$$(-1)^{\frac{2k}{2}} (-1)^k \underbrace{\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{d} \xi_{i_1}^2 \cdots \xi_{i_k}^2} \geq c_0 |\xi|^{2k} .$$

($n = 2k$, da $2k$ die höchsten Ableitungen)

$$= \left(\sum_{i=1}^{d} \xi_i^2 \right)^k = |\xi|_2^{2k}$$

Dies ist für $c_0 = 1$ erfüllt.

Aufgabe 2b

Aus VL: - $v = \nabla u$,

$$- \overset{\neq 0}{\rho} \left[\frac{-1}{1 - \frac{\gamma-1}{2} |\nabla u|^2} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \Delta u \right] = 0$$

Schreibe als

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

mit $a_{ij}(v_1, v_2, v_3) = \delta_{ij} - \dfrac{v_i v_j}{1 - \frac{\gamma-1}{2} |v|^2}$

Elliptisch (gemäß Def. 3.2) $\Leftrightarrow$ $\xi^T A(v) \xi \neq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{3}$ positiv oder negativ definit?

$$A(v) = I - \frac{1}{1 - \frac{\gamma-1}{2} |v|^2} v v^T$$

symmetrisch $\rightsquigarrow$ $\exists$ Basis aus Eigenvektoren

Eigenwerte:

2x EW 1: $\quad A w = w \quad \forall w \in \mathbb{R}^3 : v^T w = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\qquad$ ist 2dim. Eigenraum

Ferner:

$$A(v)\, v = \underbrace{\left(1 - \frac{|v|^2}{1 - \frac{\gamma-1}{2}|v|^2}\right)}_{= \lambda_3} v$$

Wann ist $\lambda_3 > 0$?

$$\frac{1 - \left(\frac{\gamma-1}{2} + 1\right)|v|^2}{1 - \frac{\gamma-1}{2}|v|^2} = \frac{1 - \frac{\gamma+1}{2}|v|^2}{1 - \frac{\gamma-1}{2}|v|^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\gamma+1}{2}|v|^2 < 1 \quad \left(\text{oder } \frac{\gamma-1}{2}|v|^2 > 1\right)$$

$\rightsquigarrow$ Elliptizität hängt von der Lösung v ab!

Aufgabe 3

a)

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2} \overset{VL}{=} \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial (T^{-1})_i}{\partial x_1}(T(y))\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial (T^{-1})_j}{\partial x_2}(T(y))\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

Produkt + Kettenregel

$$= \sum_{i,j=1}^{d} \frac{(\partial T^{-1})_i}{\partial x_1}(T(y))\,\frac{(\partial T^{-1})_j}{\partial x_2}(T(y))\,\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_j}$$ ✓

$$+ \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial (T^{-1})_i}{\partial x_1}(T(y))\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 (T^{-1})_j}{\partial x_k\,\partial x_2}(T(y))\,\frac{\partial T_k}{\partial y_i}(y)\,\frac{\partial}{y_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 (T^{-1})_j}{\partial x_k\,\partial x_2}(T(y))\underbrace{\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial (T^{-1})_i}{\partial x_1}(T(y))\,\frac{\partial T_k}{\partial y_i}(y)\,\frac{\partial}{\partial y_j}} = (*)$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial T_k}{\partial y_i}(y)\,\frac{\partial (T^{-1})}{\partial x_1}(T(y))$$

$$= \frac{\partial (T_k \circ T^{-1})}{\partial x_1}(T(y)) = \delta_{k,1}$$

also

$$(*) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 (T^{-1})_j}{\partial x_1 \partial x_2} (T(y)) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

symmetrisch in $\partial x_1, \partial x_2$ $\Rightarrow$ Beh.

Aufgabe 3b

Ann L elliptisch, T Koordinatentransformation

Beh $\tilde{L}$ elliptisch

Bew

$$\tilde{L}[\tilde{u}](y) \overset{(VL)}{=} L[\tilde{u} \circ T^{-1}](T(y))$$

$$L[u](x) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x) \qquad \tilde{u} = u \circ T$$

Gesucht: $$\tilde{L}[\tilde{u}](y) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha(y) D_y^\alpha \tilde{u}(y)$$

$$\tilde{L}[\tilde{u}](y) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha(T(y)) D_x^\alpha \underbrace{(\tilde{u} \circ T^{-1})(T(y))}_{=: \mathcal{K}}$$

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_e} \mathcal{K} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \tilde{u} \circ T}{\partial y_i}(T(y)) \cdot \frac{\partial (T^{-1})_i}{\partial x_e}(T(y))$$

$$- \quad \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_e} \mathcal{I}_2 = \dots$$

$$\dots = \sum_{j=1}^{d} \Big[\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_j \partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial (T^{-1})_j}{\partial x_k}(T(y)) \cdot \frac{\partial (T^{-1})_i}{\partial x_e}(T(y))$$

$$\underbrace{+ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial^2 (T^{-1})_i}{\partial x_k \partial x_e}(T(y))} \Big]$$

es tauchen keine zweiten Ableitungen nach y auf, kann also vernachlässigt werden, da Ell. nur $|\alpha| = n$ Ableitungen betrachtet.

Vereinfachung:

Zum Prüfen der Ell. wird $\frac{\partial}{\partial y_i}$ zu η_i,

sortiere um

$$\rightsquigarrow \sum_{j,i=1}^{d} \frac{\partial (T^{-1})_j}{\partial x_k} \eta_j \cdot \frac{\partial (T^{-1})_i}{\partial x_e} \eta_i .$$

Betrachte $D(T^{-1}) = \left(\frac{\partial (T^{-1})_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,d}$

$$\rightsquigarrow D(T^{-1})^T \eta = \left(\frac{\partial (T^{-1})_j}{\partial x_i} \right)_{i,j=1}^{d} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ | \\ \eta_d \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial (T^{-1})_j}{\partial x_i} \eta_j \right)_{i=1,\dots,d}$$

$$\leadsto \left(D(T^{-1})^T \eta \right)^{\alpha} = \sum_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_d \\ |\alpha| = n}} \dots$$

$$\dots \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial (T^{-1})_j}{\partial x_1} \eta_j \right)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial (T^{-1})_j}{\partial x_n} \eta_j \right)^{\alpha_n}$$

$\Rightarrow$ Es muss gelten

$$\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha(T(y)) \left(D(T^{-1})^T \eta \right)^{\alpha} \neq 0$$

$D(T^{-1})^T$ bijektiv, also für alle

$\xi = D(T^{-1})^T \eta$ und $x = T(y)$ erfüllt.