Institut für Analysis

JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

# Rand- und Eigenwertprobleme, Sommersemester 17

## Aufgabenblatt 3

### Aufgabe 1

Es sei

$$L[u](x) = -a_2(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x), \quad x \in [a, b]$$

wobei $a_i \in \mathcal{C}([a, b]), (i = 0, 1, 2), a_2(x) \neq 0, (x \in [a, b])$. Weiter sei

$$\begin{aligned} R_1[u] &= -\alpha_{11}u'(a) + \alpha_{10}u(a) \\ R_2[u] &= \quad \beta_{21}u'(b) + \beta_{20}u(b) \end{aligned}$$

mit $\alpha_{11}^2 + \alpha_{10}^2 > 0, \beta_{21}^2 + \beta_{20}^2 > 0$. Das homogene Problem besitze nur die triviale Lösung, und es sei $(\varphi, \psi)$ ein Fundamentalsystem von $L[u] = 0$, das die Randbedingungen

$$R_1[\varphi] = 0, \quad R_2[\varphi] = 1, \quad R_1[\psi] = 1, \quad R_2[\psi] = 0$$

erfüllt. Mit $W(x) = \det \begin{pmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{pmatrix}$ werde (wie in der Vorlesung) die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems $(\varphi, \psi)$ bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion für das gegebene Randwertproblem gegeben ist durch

$$G(x, t) = \frac{1}{-a_2(t)W(t)} \cdot \begin{cases} \varphi(x)\psi(t), & a \leq x \leq t \leq b \\ \varphi(t)\psi(x), & a \leq t \leq x \leq b. \end{cases}$$

### Aufgabe 2

Betrachten Sie das homogene lineare Randwertproblem

$$L[u] = 0, \quad R_i[u] = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

wobei

$$L[u] = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)u^{(i)}(x), \qquad a_i \in \mathcal{C}[a, b],\ a_n(x) \neq 0\ \forall x \in [a, b]$$

und die $R_i$ sind lineare Randbedingungen, wie in der Vorlesung definiert.

Zeigen Sie: Falls das obige Problem nur die triviale Lösung besitzt, dann existiert ein Fundamentalsystem $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ der Differentialgleichung mit der Eigenschaft

$$R_i[\varphi_k] = \delta_{ik}, \qquad i, k = 1, \ldots, n.$$

**Aufgabe 3**

Betrachten Sie das Sturm'sche Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\big(p(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x) &= r(x), \quad x \in [0,1] \\ -\alpha_{11}u'(0) + \alpha_{10}u(0) &= \gamma_0, \\ \beta_{21}u'(1) + \beta_{20}u(1) &= \gamma_1 \end{aligned} \tag{*}$$

wobei $p \in \mathcal{C}^1([0,1]), q \in \mathcal{C}([0,1]), p(x) > 0, q(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ gelte, sowie $\alpha_{11}, \alpha_{10}, \beta_{21}, \beta_{20} \geq 0$ und $\alpha_{11}^2 + \alpha_{10}^2 > 0,\ \beta_{21}^2 + \beta_{20}^2 > 0$ sei.

a) Zeigen Sie: Ist $q(x) \neq 0$ für ein $x \in [0,1]$ oder $\alpha_{10} > 0$ oder $\beta_{20} > 0$, so besitzt das Randwertproblem für alle $r \in \mathcal{C}([0,1])$ und $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung.

b) Sei $q \equiv 0$ sowie $\alpha_{10} = \beta_{20} = 0$. Zeigen Sie, dass das Randwertproblem (*) genau dann lösbar ist, wenn gilt

$$\int_0^1 r(x)dx = -\Big(\frac{p(1)\gamma_1}{\beta_{21}} + \frac{p(0)\gamma_0}{\alpha_{11}}\Big).$$

Geben Sie in diesem Fall eine explizite Formel für die Lösung des Problems an. Ist die Lösung eindeutig?

Besprechung in der Übung am 19.05.17