Lösungsnotizen Blatt 3 19.5.17

Aufgabe 1

Da das homogene Problem nur die triviale Lösung besitzt, folgt mit Satz §II. 2.2, dass die Greensche Funktion existiert und durch die dort beschriebenen Eigenschaften 0.) – 5.) eindeutig bestimmt ist.

Es bleibt also zu zeigen, dass die Funktion

$$h(x,t) = \begin{cases} h_1(x,t) := \dfrac{\varphi(x)\,\psi(t)}{-a_2(t)\,W(t)} , & a \leq x \leq t \leq b \\ h_2(x,t) := \dfrac{\varphi(t)\,\psi(x)}{-a_2(t)\,W(t)} , & a \leq t \leq x \leq b \end{cases}$$

die Eigenschaften 0.) – 5.) besitzt.

Bemerkung:

Da (φ, ψ) FS, folgt $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$.

Bew

Sei $x_0 \in [a,b]$ mit $W(x_0) = 0$. Dann ex. $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit

$$\begin{pmatrix} \varphi(x_0) & \psi(x_0) \\ \varphi'(x_0) & \psi'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definiere $g(x) = c_1 \varphi(x) + c_2 \psi(x)$.

Dann gilt $L[g] = 0$, sowie $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) = 0$.

Nach Picard-Lindelöf besitzt das Problem

$$L[u] = 0\,,\quad u(x_0) = 0\,,\quad u'(x_0) = 0$$

nur die triviale Lsg, also $g \equiv 0$ und $c_1 = c_2 = 0$. $\lightning$

Eigenschaften: 0.) ✓ 1.) ✓

2.) Wegen 1) bleibt zz: h stetig in (t,t) $\forall t \in [a,b]$.

Erfüllt, da $\lim_{\mu \to 0} h_1(t+\mu_1, t+\mu_2) = \dfrac{\varphi(t)\,\psi(t)}{-a_2(t)\,W(t)}$

$= h(t,t) = \lim_{\mu \to 0} h_2(t+\mu_1, t+\mu_2)$.

3.) Es gilt: $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, x-0) = \dfrac{\varphi(x)\,\psi'(x)}{-a_2(x)\,W(x)}$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, x+0) = \dfrac{\varphi'(x)\,\psi(x)}{-a_2(x)\,W(x)}$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(x, x-0) - \frac{\partial h}{\partial x}(x, x+0) = \frac{1}{-a_2(t)} \cdot \underbrace{\frac{\varphi(x)\,\psi'(x) - \varphi'(x)\,\psi(x)}{W(x)}}_{=1}$$

4.) Für $a \le x < t \le b$ gilt

$$L[h(\cdot, t)] = \frac{\psi(t)}{-a_2(t)\,W(t)} \underbrace{L[\varphi]}_{=0} = 0$$

analog für $a \le t < x \le b$

5.) $R_1[h(\cdot,t)] = \dfrac{\psi(t)}{-a_2(t)\,W(t)} R_1[\varphi] = 0$

$R_2[h(\cdot,t)] = \dfrac{\varphi(t)}{-a_2(t)\,\psi(t)} R_2[\psi] = 0$

Aufgabe 2

Sei $\psi_1, \dots, \psi_n$ ein Fundamentalsystem von $L[u]=0$.

$$\begin{cases} L[u] = 0 \\ R_i[u] = 0 \qquad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

hat nur die triviale Lsg

$\overset{VL}{\Longrightarrow}$ $\det M \neq 0$ mit $M = (R_i[\psi_k])_{ik=1}^n$

Wir suchen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, sd

$$R_i[\varphi_k] = \delta_{ik} \qquad i,k = 1, \dots, n$$

durch $\varphi_p = \sum_{q=1}^n c_{qp} \psi_q$ (*)

$$R_i[\varphi_k] = \delta_{ik} \iff \sum_{q=1}^n c_{qk} R_i[\psi_q] = \delta_{ik}$$

$\iff M\, C = I$ mit $C := (c_{qp})_{q,p=1}^n$

$\det M \neq 0 \Rightarrow C = M^{-1}$

$\rightsquigarrow$ (*) ist neues FS mit den geforderten Eigenschaften

Aufgabe 3

a) Es sei $u \in C^2([0,1])$ eine Lösung des homogenen Problems.

Multiplizieren der hom. Dgl mit $u(x)$ und integrieren über $[0,1]$ liefert:

$$-\int_0^1 (p(x)\,u'(x))'\,u(x)\,dx + \int_0^1 q(x)\,u^2(x)\,dx = 0$$

part. Int. $\Rightarrow$

$$\underbrace{\Big[-p(x)\,u'(x)\,u(x)\Big]_{x=0}^{1}}_{=:A} + \int_0^1 p(x)\,(u'(x))^2\,dx + \int_0^1 q(x)\,u^2(x)\,dx = 0 \qquad (*)$$

$$A = -p(1)\,u'(1)\,u(1) + p(0)\,u'(0)\,u(0)$$

$$-p(1)\,u'(1)\,u(1)+p(0)\,u'(0)\,u(0)=:A$$

$$\alpha_{11}u'(0)+\alpha_{10}u(0)=0$$
$$\beta_{21}u'(1)+\beta_{20}u(1)=0$$

1. $\underline{\alpha_{11}=\beta_{21}=0}$ $\Rightarrow$ $\alpha_{10}\neq 0\neq\beta_{20}$

$\rightarrow$ $u(0)=0=u(1)$ $\rightarrow$ $A=0$

2. $\underline{\alpha_{11}=0}$

$\Rightarrow$ $u(0)=0$ $\rightarrow$ $A=-p(1)\,u'(1)\,u(1)$

$$u'(1)=-\frac{\beta_{20}}{\beta_{21}}u(1) \curvearrowright = p(1)\frac{\beta_{20}}{\beta_{21}}(u(1))^2\geq 0$$

3. $\underline{\beta_{21}=0}$

$\Rightarrow$ $u(1)=0$ $\rightarrow$ $A=p(0)\,u'(0)\,u(0)$

$$u'(0)=+\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}u(0) \curvearrowright =+p(0)\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}(u(0))^2\geq 0$$

4. $\underline{\alpha_{11}\neq 0\neq\beta_{21}}$

$$A=p(1)\frac{\beta_{20}}{\beta_{21}}(u(1))^2-p(0)\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}(u(0))^2\geq 0$$

Aus $A \geq 0$ und $(*)$ folgt mit $p > 0$, $q \geq 0$:

(**) $\quad A = 0$ und $q(x)\, u^2(x) = 0$, $u'(x) = 0$,

d.h. u ist konstant in $[0,1]$.

Fall 1: $\quad \exists\, x_0 \in [0,1]: \quad q(x_0) \neq 0$

$$\overset{(**)}{\Rightarrow} \quad u(x_0) = 0 \quad \overset{u \text{ konst}}{\Rightarrow} \quad u \equiv 0.$$

Fall 2: $\quad q(x) = 0 \;\; \forall x \in [0,1] \;\wedge\; (\alpha_{10} > 0 \;\vee\; \beta_{20} > 0)$

Wegen $A = 0$, $p > 0$ folgt dann

$$u(0) = 0 \quad \text{oder} \quad u(1) = 0,$$

also wieder $u \equiv 0$.

In jedem Fall besitzt das homogene Problem nur die triviale Lösung und nach Satz § II.2.1 folgt die eindeutige Lösbarkeit des inhomogenen Problems für alle $r \in C([0,1])$ und $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$.

b)

$$-(p(x)\,u'(x))' = r(x) \qquad \Big| \int_0^t \dots ds$$

$$\rightsquigarrow \quad -\int_0^t (p(s)\,u'(s))'\,ds = \int_0^t r(s)\,ds + c_1^*$$

$$\rightarrow \quad -p(t)\,u'(t) = \int_0^t r(s)\,ds + \underbrace{c_1^* - p(0)\,u'(0)}_{=:\,c_1}$$

$$\Rightarrow \quad u'(t) = -\int_0^t \frac{1}{p(t)}\,r(s)\,ds - \frac{1}{p(t)}\,c_1$$

$$\int_0^x \dots dt$$

$$\rightsquigarrow \quad \int_0^x u'(t)\,dt = \int_0^x \Big(-\int_0^t \frac{1}{p(t)}\,r(s)\,ds - \frac{1}{p(t)}\,c_1\Big)dt + c_2^*$$

$$\Leftrightarrow \quad u(x) = -\int_0^x \frac{1}{p(t)}\Big(\int_0^t r(s)\,ds + c_1\Big)\,dt + c_2$$

Einsetzen der Rb: $u'(0) = -\frac{\gamma_0}{\alpha_{11}}$, $u'(1) = \frac{\gamma_1}{\beta_{21}}$

- $u'(0) = -\frac{1}{p(0)} c_1 \overset{!}{=} -\frac{\gamma_0}{\alpha_{11}} \Rightarrow c_1 = \frac{p(0)\gamma_0}{\alpha_{11}}$

- $u'(1) = -\int_0^1 \frac{1}{p(1)} r(s)\,ds - \frac{1}{p(1)} c_1 \overset{!}{=} \frac{\gamma_1}{\beta_{21}}$

$$\rightsquigarrow \quad +\int_0^1 r(s)\,ds = -\left(c_1 + \frac{\gamma_1}{\beta_{21}} p(1) \right)$$

$$= -\left(\frac{\gamma_0}{\alpha_{11}} p(0) + \frac{\gamma_1}{\beta_{21}} p(1) \right)$$

Dies ist eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des RWPs. Ist die Bedingung erfüllt, so ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$u(x) = -\int_0^x \frac{1}{p(t)} \left(\int_0^t r(s)\,ds + \frac{\gamma_0}{\alpha_{11}} p(0) \right) dt + \underline{c}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ (c_1 eingesetzt in Lsg).

Insbesondere ist die Lösung <u>nicht</u> eindeutig.