Institut für Analysis

JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Rand- und Eigenwertprobleme, Sommersemester 17

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1

Gegeben sei das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x, u(x)), \qquad \text{in } (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

wobei $f \in \mathcal{C}([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Es existiere ein $L < 8$ mit

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \quad \text{für alle } (x,y), (x,\tilde{y}) \in [0,1] \times \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass das Randwertproblem eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: Greensche Funktion wie in der Vorlesung, Banachscher Fixpunktsatz

Aufgabe 2

Es sei

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x > 0,\ y^2 + z^2 > e^{-1/x}\right\}, \\ \Gamma_0 &= \left\{(x,y,z) \in \partial\Omega : x > 0,\ y^2 + z^2 = e^{-1/x}\right\}, \\ \Gamma_1 &= \left\{(x,y,z) \in \partial\Omega : x = 0,\ y^2 + z^2 > 0\right\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Die Funktion

$$v(x,y,z) = \begin{cases} 1, & y = z = 0, \\ -x \log(y^2 + z^2), & \text{sonst} \end{cases}$$

löst das Randwertproblem

$$-\Delta = 0 \text{ in } \Omega,\ u = 1 \text{ auf } \Gamma_0,\ u = 0 \text{ auf } \Gamma_1$$

aber $u \notin \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Aufgabe 3

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $0 < \alpha$. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt Hölderstetig auf U zum Exponenten α (α-Hölderstetig) genau dann, wenn ein $C > 0$ existiert, so dass $\forall\, x, y \in U$:

$$|f(x) - f(y)|_m \leq C|x - y|_n^\alpha.$$

a) Sei $\alpha > 1$ und $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass jede α-Hölderstetige Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ konstant ist.

b) Sei $\alpha \in (0, 1]$. Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto |x|^\alpha$ α-Hölderstetig auf $\mathbb{R}^d$ ist.

c) Sei $0 < \beta \leq 1 < \gamma$. Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto |x|^\gamma$ **nicht** β-Hölderstetig auf $\mathbb{R}^d$, aber β-Hölderstetig auf jeder kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ist.

d) Beweisen Sie: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, so gilt $\mathcal{C}^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ für alle $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$. Hierbei ist

$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ u \text{ ist } \alpha\text{-Hölderstetig auf } \overline{\Omega}\right\}.$$

Besprechung in der Übung am 26.05.17