Aufgabe 1

Wir berechnen die Greensche Fkt für

$$-u''(x) = r(x)\,, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Integrieren der Dgl. liefert

$$-u'(t) = \int_0^t r(s)\,ds + c_0\,, \quad -u(x) = \int_0^x \int_0^t r(s)\,ds\,dt + c_0 x + c_1$$

mit $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Wir integrieren $\int_0^x \int_0^t r(s)\,ds \cdot 1\,dt$ partiell und erhalten

$$-u(x) = \int_0^x (x-t)\, r(t)\,dt + c_0 x + c_1.$$

Die Randbed. liefern $u(0) = 0 \rightsquigarrow c_1 = 0$ und

$u(1) = 0 \rightsquigarrow \quad c_0 = -\int_0^1 (1-t)\, r(t)\,dt.$

Insgesamt also

$$u(x) = \int_0^x (t-x)\, r(t)\,dt + x \int_0^1 (1-t)\, r(t)\,dt$$

$$= \int_0^x \underbrace{(t-x+x-tx)}_{=t(1-x)} r(t)\,dt + \int_x^1 x(1-t)\, r(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 G(x,t)\, r(t)\, dt$$

mit $$G(x,t) = \begin{cases} t(1-x) & , \quad 0 \le t \le x \le 1 \\ x(1-t & , \quad 0 \le x \le t \le 1 \end{cases}.$$

Wir definieren den Operator $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ durch.

$$T(u)(x) = \int_0^1 G(x,t)\, f(t, u(t))\, dt$$

Es gilt:

$$\begin{array}{lcl} u \in \mathcal{C}([0,1]) & \Leftrightarrow & u \in \mathcal{C}^2((0,1)) \cap \mathcal{C}([0,1]) \\ u = T(u). & & -u'' = f(x, u(x)),\; u(0) = u(1) = 0 \end{array}$$

<u>Beweis</u>

<u>„$\Leftarrow$"</u> Setze $r(x) = f(x, u(x))$. Dann löst u das Problem $-u'' = r$, $u(0) = u(1) = 0$ und somit

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t)\, r(t)\, dt = \int_0^1 G(x,t)\, f(t, u(t))\, dt = T(u)(x)$$

„$\Rightarrow$" Es gilt

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t, u(t))\,dt$$

$$= \int_0^x G(x,t) f(t, u(t))\,dt + \int_x^1 G(x,t) f(t, u(t))\,dt.$$

Da $G, \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G^2}{\partial x^2} \in C(\mathring{\Delta}_1) \cap C'(\mathring{\Delta}_2)$

folgt $u \in C^2((0,1))$ und nachrechnen zeigt

$$-u''(x) = f(x, u(x)), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Wir verwenden nun den Banach'schen Fixpunktsatz:

B B-Raum, $D \subset B$, $D \neq \emptyset$ abg. TM von B.

$T: D \to B$ mit $T(D) \subset D$ Kontraktion

$\Rightarrow \exists!\ x^* \in D$ der Gleichung $Tx = x$.

Wir wählen $D = B = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Klar: T wie oben definiert erfüllt $T(D) \subset D$.

Für $u_1, u_2 \in C([0,1])$ gilt:

$$\| Tu_1 - Tu_2 \|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |(Tu_1)(x) - (Tu_2)(x)|$$

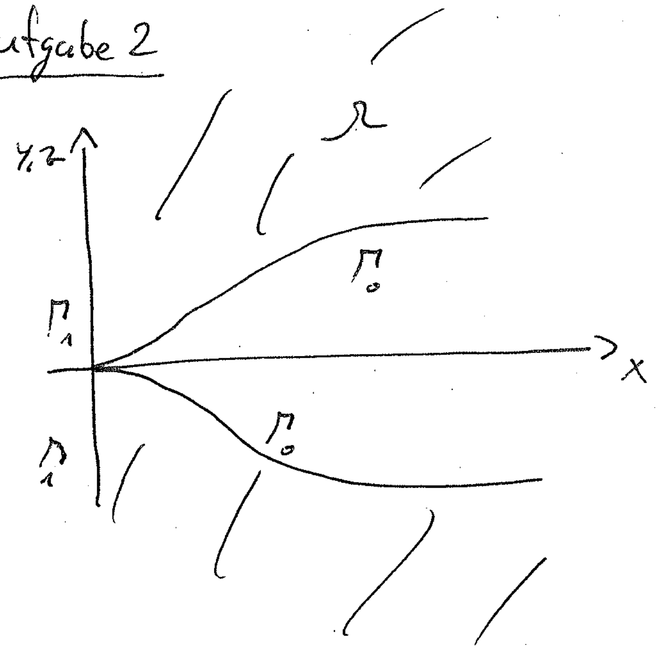
$$= \max \left| \int_0^1 G(x,t) \left[f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t)) \right] dt \right|$$

$$\leq \max \underbrace{\int_0^1 | G(x,t) | \, dt}_{\text{Kurvendiskussion zeigt: } \leq \frac{1}{8}} \; L \, \| u_1 - u_2 \|_\infty$$

$$\leq \underbrace{\frac{L}{8}}_{<1} \| u_1 - u_2 \|_\infty \qquad (L < 8)$$

Banach'sche FPS liefert eindeutiges $u^* \in C^1([0,1])$ von $Tu = u$ und somit eine Lsg des RWP.

Aufgabe 2



Ω ist rotationssym.

Die Eigenschaften lassen sich einfach nachrechnen:

$$V_x = -\log(y^2+z^2), \quad V_{xx} = 0$$

$$V_y = -x \frac{1}{y^2+z^2} \cdot 2y, \quad V_{yy} = \frac{2(y^2-z^2)x}{(y^2+z^2)^2}$$

$$V_{zz} = \frac{2(z^2-y^2)x}{(y^2+z^2)^2}$$

$\Rightarrow \quad -\Delta V = 0 \quad$ in Ω

Sei $(x,y,z) \in \Gamma_0$, d.h. $x>0$, $y^2+z^2 = e^{-1/x}$ (insb. $(y,z) \neq (0,0)$),

$$V(x,y,z) = -x \log(y^2+z^2) = -x \log\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) = 1$$

Sei $(x,y,z) \in \Gamma_1$, d.h. $x=0$, $(y,z) \neq (0,0) \Rightarrow V(x,y,z) = 0$

Also ist v Lösung des RWPs, aber offenbar ist $u \notin C(\overline{\Omega})$, da

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{y \to 0} v(0,y,0) = 0 \\ &\lim_{\substack{(x,y,z) \to (0,0,0) \\ (x,y,z) \in \Gamma_0}} v(x,y,z) = 1 \end{aligned}\right\} \text{ v in } (0,0,0) \text{ unstetig.}$$

Aufgabe 3

a) Betrachte für $i \in \{1, \dots, n\}$ e_i, $x \in \Omega$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{|u(x+he_i) - u(x)|}{|h|} \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha\text{-Hölderstetigkeit}}}{\leq} \lim_{h \to 0} C \frac{|he_i|^\alpha}{|h|} = \lim_{h \to 0} C |h|^{\alpha - 1}$$

$$= 0 \quad , \text{da } \alpha > 1$$

$\Rightarrow$ Alle partiellen Ableitungen von u ex. und sind in Ω gleich Null.

$\Rightarrow$ $u \in C^1(\Omega)$, $\nabla u = 0$ in Ω $\overset{\Omega \text{ Gebiet}}{\Rightarrow}$ u konstant

b) Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ bel. und $h > 0$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ gilt mit Δ-Ungleichung $|a+b| \geq ||a| - |b||$:

$$\frac{||x| - \overbrace{|vh|}^{=h}|^\alpha - |x|^\alpha}{\underbrace{|vh|^\alpha}_{= h^\alpha}} \leq \frac{|x+vh|^\alpha - |x|^\alpha}{|vh|^\alpha} \leq \frac{||x| + \overbrace{|vh|}^{=h}|^\alpha - |x|^\alpha}{|vh|^\alpha}$$

$x \neq 0$, $t = \frac{h}{|x|}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{|(1-t)|^\alpha - 1}{t^\alpha}}_{=: g(t)} \leq \frac{|x+vh|^\alpha - |x|^\alpha}{|vh|^\alpha} \leq \underbrace{\frac{(1+t)^\alpha - 1}{t^\alpha}}_{=: f(t) \geq 0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left| |x+vh|^\alpha - |x|^\alpha \right|}{|vh|^\alpha} \leq \max\left\{ \sup_{t>0} f(t), \sup_{t>0} |g(t)| \right\}$$

Es gilt $\sup\limits_{t>0} f(t) = 1$, denn $(\alpha \in (0,1],\ t>0)$

$$f'(t) = \frac{-\alpha t^\alpha \left[(t+1)^\alpha - (t+1) \right]}{t(t+1)} > 0 \text{ für } \alpha \neq 1,\ t>0, \text{ da}$$

$(t+1)^\alpha < (t+1)$

$\alpha = 1$: $f(t) = 1$.

$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 1$, also gilt: $f(t)$ monoton wachsend auf $(0,\infty)$ und $f(t) \leq 1 \ \forall t \in (0,\infty)$.

Es gilt $\sup\limits_{t>0} |g(t)| = 1$, denn für $t \geq 2$:

$$g(t) = \frac{(t-1)^\alpha - 1}{t^\alpha} \geq 0$$

$$g'(t) = \frac{\alpha t^{-\alpha} \left((t-1)^\alpha + t - 1 \right)}{t^\alpha} > 0 \quad \text{für } t \geq 2.$$

$\Rightarrow$ g auf $[2,\infty)$ streng monoton wachsend und $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 1$

$\Rightarrow \quad \sup\limits_{t\in[2,\infty)} |g(t)| = 1$

Für $t \to 0$ folgt mit l'Hospital: $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0$

Weitere Kurvendiskussion zeigt: $|g(t)| \leq 1$ in $(0,2]$.

$$\Rightarrow \quad \frac{\left||x+vh|^\alpha - |x|^\alpha\right|}{|vh|^\alpha} \leq 1$$, also auch

$$\left||x+vh|^\alpha - |x|^\alpha\right| \leq |vh|^\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1, h > 0.$$

Für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ $\exists\, v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, $h > 0$, so dass

$vh = y - x$

$$\Rightarrow \quad \left||y|^\alpha - |x|^\alpha\right| \leq |y-x|^\alpha \qquad \square$$

c) Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{|x|^\gamma - |0|^\gamma}{|x-0|^\beta} = |x|^{\gamma-\beta} \to \infty \text{ für } |x| \to \infty, \text{ da } \gamma - \beta > 0$$

$\Rightarrow$ $|x|^\gamma$ nicht β-Hölderstetig auf $\mathbb{R}^n$.

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $x, x+vh \in K$ mit $|v| = 1$, $h > 0$

(Insbesondere muss gelten: $|x|, h < R$ für ein $R > 0$).

Es gilt wie in c):

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left||x+vh|^\gamma - |x|^\gamma\right|}{|hv|^\beta} \leq \max\Big\{ \overbrace{\lim_{h\to 0} \frac{(|x|+h)^\gamma - |x|^\gamma}{h^\beta}}^{=0},$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left||x|-h\right|^\gamma - |x|^\gamma}{h^\beta} \Big\}$$

$(**)$

Zu (**):

$|x| = 0$: $\lim\limits_{h \to 0} \ldots = 0$

$|x| > 0$: $\lim\limits_{h \to 0} \ldots = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(|x|-h)^\gamma - |x|^\gamma}{h^\beta} = 0$

$(\gamma - \beta > 0)$

d) Da Ω beschränkt, ex $C > 0$ mit $|x-y| \leq C \ \forall x,y \in \overline{\Omega}$.

Sei $u \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$.

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} \ \forall x,y \in \overline{\Omega} : \ |u(x) - u(y)| \leq K |x-y|^\beta$

$= K |x-y|^\alpha |x-y|^{\beta-\alpha} \leq K \cdot |x-y|^\alpha C^{\beta-\alpha} \qquad (\beta - \alpha \geq 0)$

$= (K C^{\beta-\alpha}) |x-y|^\alpha \qquad \Rightarrow \quad u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.