Institut für Analysis

JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Rand- und Eigenwertprobleme, Sommersemester 17

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass $T : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{K}$ genau dann eine Distribution ist, wenn für jede Folge

$$(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\Omega)$$

gilt

$$T(\varphi_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} T(\varphi) \text{ in } \mathbb{K}.$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie im Sinne der Distributionen $\left(\frac{d}{dx}\right)^k f$ $(k \in \mathbb{N})$ für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|^j$.

b) Zeigen Sie:

$$T : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}\varphi\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

ist in $\mathcal{D}'((0,1))$ aber **nicht** in $\mathcal{D}'((-1,1))$

c) Zeigen Sie, dass

$$T : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} n\,\varphi(n)$$

eine Distribution ist.

d) Sei $T : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ die Distribution, welche eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ über die Einheitskugel in $\mathbb{R}^d$ integriert. Berechnen Sie $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ für $i = 1, \dots, d$ sowie ΔT.

Aufgabe 3

Beweisen Sie Lemma 2.1 aus der Vorlesung:
Es seien $a_{ik} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, $b_i, c, r \in \mathcal{C}(\Omega)$ für $i, k = 1, \dots, d$ und $\gamma \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$. Für $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ gilt dann:
Die Funktion u ist eine klassische Lösung von

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) + b^\top \nabla u + cu = r, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{auf } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mu} + \gamma u = 0, & \text{auf } \Gamma_1 \end{cases} \tag{1.5}$$

genau dann, wenn u die schwache Formulierung erfüllt, d. h.

$$\begin{cases} \mathscr{b}[u,\varphi] = F[\varphi], & \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \varphi|_{\Gamma_0} = 0, \\ u = 0, & \text{auf } \Gamma_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Besprechung in der Übung am 02.06.17