A 1

Lösungsideen Blatt 5

„$\Rightarrow$" Wegen der Linearität genügt: Aus $\varphi_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$ in $\mathcal{D}$ folgt $T(\varphi_j) \xrightarrow{j\to\infty} 0$

Wegen $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{D}$ gilt:

$\exists\, K \subset_{kp} \Omega$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K \quad \forall j \in \mathbb{N}$

und $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$:

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi_j(x) \underbrace{}_{-D^\alpha 0}| = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ $\exists\, D \subset\subset \Omega$ mit $K \subset D$

Def. Distr. $\Rightarrow$ $\exists\, n_D, c_D$ mit

$$|T(\varphi_j)| \leq c_D \sum_{|\alpha|\leq n_D} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi_j(x)|$$

$\forall \varphi_j \in C_c^\infty(\Omega)$,

$\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K \subset D$

also $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset D$ erfüllt $\forall j$.

lim auf beiden Seiten und $(*)$ folgt

$$T(\varphi_j) \to 0.$$

A1

„⇐" Angenommen falsch:

d.h. $\exists D \subset\subset \Omega$, sd $\forall j \in \mathbb{N}$,

$\exists \varphi_j \in C_c^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset D$ mit

$$|T(\varphi_j)| = 1 \, , \quad \|\varphi_j\|_{C^j(D)} \leq \frac{1}{j}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_j \to 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}(\Omega)$$

aber $|T(\varphi_j)| \not\to 0$, was ein Widerspruch zu (3.6) (Vora.) ist.

Aufgabe 2

a) Falls $\underline{k \leq j}$:

$x \geq 0: f: x \mapsto x^j \qquad \frac{d^k}{dx^k} f(x) = \frac{j!}{(j-k)!} x^{j-k}$

$x \leq 0: \qquad x \mapsto (-1)^j x^j \qquad (-1)^j \frac{j!}{(j-k)!} x^{j-k}$

Insbesondere für $k=j$:

$$h = \frac{d^k}{dx^k} f(x) = \begin{cases} j! & j \text{ gerad} \\ j! \begin{cases} 1 ; & x \geq 0 \\ -1 ; & x < 0 \end{cases}, & j \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$= j! \begin{cases} 1 ; & x \geq 0 \\ (-1)^j ; & x < 0 \end{cases}$$

Falls $\underline{k > j}$:

$$\frac{d^k}{dx^k} T_f(\varphi) = \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-j} \left(\underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^j T_g}_{= T_h} \right) \right)(\varphi)$$

$$= (-1)^{k-j} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{0} (-1)^j j! \, \varphi^{(k-j)}(x)\, dx}_{= (-1)^j j! \, \varphi^{(k-j-1)}(0)} + \underbrace{\int_0^{\infty} j! \, \varphi^{(k-j)}(x)\, dx}_{= -j! \, \varphi^{(k-j-1)}(0)} \right) \quad \text{HDI}$$

$$= (-1)^k j! \, \delta_0 (\varphi^{(k-j-1)}) + (-1)^{k-j-1} j! \, \delta_0 (\varphi^{(k-j-1)}) .$$

b)

<u>zz</u>

$$T: \varphi \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \text{ ist in } \mathcal{D}'((0,1))$$

- linear ✓ $\quad \forall D \subset\subset \Omega \quad \exists C_D > 0, \quad n_D \in \mathbb{N}$.
- $|T(\varphi)| \leq C_D \sum_{|\alpha| \leq n_D} \sup_{x \in \overline{D}} |D^\alpha \varphi(x)| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset D$.

Wähle $D \subset\subset (0,1)$ fest, also $D \subsetneq (0,1)$, da $\overline{(0,1)} \subset (0,1)$, also

$\exists \quad k \in \mathbb{N} : \quad \frac{1}{k} \notin D$

$$\Rightarrow \quad T(\varphi) = \sum_{\ell=2}^{k-1} \frac{d^\ell}{dx^\ell} \varphi\left(\frac{1}{\ell}\right), \text{ da } \operatorname{supp}(\varphi) \subset D.$$

$D \subset (-1,1)$, $\forall C_D > 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset D$

mit

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right| > \underbrace{C_D \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in \overline{D}} |D^\alpha \varphi(x)|}_{(*)}$$

also <u>nicht</u> in $\mathcal{D}'((-1,1))$.

$\varphi^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right) > (*)$ wählen, $\frac{1}{n+1} \in D$!

c) $T: C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\varphi \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} n\,\varphi(n)$$ linear ✓

$\forall\ D \subset\subset \mathbb{R}$

$D \underset{\text{off}}{\subset} \mathbb{R}$, $D \neq \mathbb{R}$, da $\overline{\mathbb{R}} \not\subset \mathbb{R}$

$\exists\ c_D > 0$, $n_D \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset D$

$$|T(\varphi)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} n\,\varphi(n)\right|$$

$n = 0$, da $D \neq \mathbb{R}$, D offen $\exists\ K \underset{kp}{\supset} D$.

$\Rightarrow\ \exists\ k \in \mathbb{N}$, sd $\varphi(l) = 0\ \forall\ l \geq k$

$$\Rightarrow\ |T(\varphi)| = \left|\sum_{n=0}^{k-1} n\,\varphi(n)\right| =: k_1 \text{ endlich,}$$

wähle $c_D = k_1$.

d)

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{x \le 1\}} \varphi(x) dx = \int_{B_1(0)} \varphi(x) dx$$

$$\frac{d}{dx_i} T(\varphi) = - T\left(\frac{d}{dx_i} \varphi\right) = \int_{B_1(0)} \frac{d}{dx_i} \varphi(x) dx \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

$$\overset{\text{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^d}{\underset{\text{Gauß}}{=}} \; - \int_{\partial B_1(0)} \varphi \, \nu^i \, d\sigma$$

$$\frac{d^2}{dx_i^2} T(\varphi) = \int_{\partial B_1(0)} \left(\frac{d}{dx_i} \varphi\right) \nu^i \, d\sigma$$

$$\sum \ldots = - \int_{\partial B_1(0)} \underbrace{\sum_i \frac{d}{dx_i} \varphi \; \nu^i}_{\nabla \varphi \cdot \nu} d\sigma$$

$$= - \int_{\partial B_1(0)} \nabla \varphi \cdot \nu \, d\sigma$$

Aufgabe 3

„$\Rightarrow$" schon in der VL gesehen, durch Konstruktion der schwachen Formulierung.

„$\Leftarrow$"

Laut VL: Ω beschränktes Lipschitz-Gebiet

$\rightsquigarrow$ Satz von Gauß $\forall u \in C^1(\overline{\Omega})$ anwendbar

Es sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u|_{\Gamma_0} = 0$ eine schwache Lsg des geg. Problems, d.h.

$$\int_\Omega [(\nabla u)^T A \nabla \varphi + (b \cdot \nabla u)\varphi + c u \varphi]\, dx$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \gamma u \varphi \, d\sigma = \int_\Omega r \varphi \, dx \qquad (*)$$

$\forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $\varphi|_{\Gamma_0} = 0$.

Da $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi|_{\Gamma_0} = 0$ und $u \in C^2(\overline{\Omega})$, folgt mit dem Satz von Gauss:

$$\int_\Omega (\nabla u)^T A \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \operatorname{div}(A \nabla u \, \varphi) \, dx$$

$$- \int_\Omega \operatorname{div}(A \nabla u) \varphi \, dx$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \mu} \varphi \, d\sigma - \int_\Omega \operatorname{div}(A \nabla u) \varphi \, dx.$$

Mit (*) erhalten wir für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi|_{\Gamma_0} = 0$:

$$\int_\Omega \underbrace{(-\operatorname{div}(A\nabla u) + b \nabla u + cu - r)}_{=: T_1} \varphi \, dx$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial \mu} + \gamma u \right)}_{=: T_2} \varphi \, d\sigma = 0. \qquad (**)$$

Wähle zunächst $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega$ (d.h. $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$). Aus (**) folgt

$$\int_\Omega T_1 \varphi \, dx = 0$$

und da T_1 stetig in Ω, folgt $T_1 = 0$.

Einsetzen in (**) liefert nun

$$\int_{\Gamma_1} T_2 \varphi \, dx = 0 \qquad \forall \ \varphi \in C^\infty(\Omega), \ \varphi|_{\Gamma_0} = 0,$$

und mit der Stetigkeit von T_2 (γ stetig, Ω C^1-Gebiet)

folgt ebenso $T_2 = 0$.

Also erfüllt u das geg. Problem im klassischen Sinne.

<u>Bemerkung</u> zu den letzten Argumenten:

Wenn für einen Punkt $\neq 0$, dann auch für eine Umgebung (Stetigkeit), dort φ_α aus VL anwenden $\rightsquigarrow$ $\int \ldots dx > 0$.